EDP non linéaires en présence d'aléa singulier

• N. Tzvetkov

Ce texte décrit des résultats de construction de solutions de régularité faible d'équations aux dérivées partielles non linéaires, qui dépendent d'un paramètre aléatoire. Les motivations pour cette étude sont très variées. Cependant, il se trouve qu'à la fin les résultats obtenus et les méthodes utilisées sont conceptuellement très proches.

1. Séries de Fourier multiples et espaces de Sobolev sur le tore

Pour $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, on pose

$$\langle x\rangle := (1+x_1^2+\cdots+x_d^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\mathbb{T}^d=(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^d$ le tore de dimension d. Si $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{C}$ est une fonction de classe C^∞ alors pour tout $x\in\mathbb{T}^d$,

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\hat{f}(n)\,e^{in\cdot x},$$

où $\hat{f}(n)$ sont les coefficients de Fourier de f. Pour $s\in\mathbb{R}$, on définit la norme de Sobolev de f par

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\langle n\rangle^{2s}|\hat{f}(n)|^2. \tag{1}$$

Pour $s\geqslant 0$ entier, nous avons l'équivalence de normes

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)}\approx\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}. \tag{2}$$

Dans (2), ∂^α représente une dérivée partielle d'ordre au plus s. Pour $s=0$, on retrouve la norme de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{T}^d)$.

L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$ est défini comme l'adhérence de $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ par rapport à la norme (1). Au contraire du cas $s\geqslant 0$, les éléments de $H^s(\mathbb{T}^d)$ ne sont pas des fonctions classiques sur le tore pour $s<0$ mais s'interprètent comme des distributions de Schwartz. Notons que les espaces de Sobolev sont emboîtés : plus s est grand plus les éléments de $H^s(\mathbb{T}^d)$ sont réguliers, l'intersection de tous les $H^s(\mathbb{T}^d)$ étant $C^\infty(\mathbb{T}^d)$. Dans l'autre sens, plus s est petit plus $H^s(\mathbb{T}^d)$ est gros, la réunion de tous les $H^s(\mathbb{T}^d)$ étant les distributions de Schwartz $(2\pi\mathbb{Z})^d$ périodiques sur $\mathbb{R}^d$.

2. Effets probabilistes dans des questions d'analyse fine

2.1 – Une amélioration presque sûre de l'injection de Sobolev

Soit $(\Omega,\mathcal{F},p)$ un espace probabilisé. On rappelle qu'une variable aléatoire $g:\Omega\to\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\sigma>0$ si la mesure image de p par g est

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx, \tag{3}$$

dx étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La variable g a alors pour loi la loi normale centrée (3). De même, la variable aléatoire $g:\Omega\to\mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,\sigma^2)$, si $g=h+il$, avec $h\in\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $l\in\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ indépendantes.

Soit $u\in L^2(\mathbb{T})$ une fonction déterministe. Il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l^2(\mathbb{Z})$ (les coefficients de Fourier de u) telle que

$$u(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{inx}.$$

Considérons maintenant une version randomisée de u donnée par l'expression

$$u_\omega(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\,g_n(\omega)\,e^{inx},$$

où $(g_n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables indépendantes de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$. L'effet de la randomisation sur la régularité Sobolev de u_ω est presque sûrement nulle (voir par exemple [5]). En revanche, la randomisation a un effet important sur la régularité dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{T}^d)$. En utilisant l'invariance par les rotations de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, on obtient que $g_n(\omega)\, e^{inx} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, puis l'indépendance des g_n assure qu'à x fixé

$$u_\omega(x) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}\Big(0, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\Big).$$

Puisque les variables gaussiennes ont des moments finis à tout ordre, il vient

$$u_\omega(x) \in L^p(\Omega\times\mathbb{T}), \quad \forall\, p<\infty$$

ce qui implique que $u_\omega(x) \in L^p(\mathbb{T})$ presque sûrement, amélioration remarquable de la régularité L^p de u_ω par rapport à celle de u. Remarquons en effet que l'injection de Sobolev demande une régularité $H^{1/2}(\mathbb{T})$ d'une fonction déterministe pour pouvoir conclure qu'elle est dans $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $p<\infty$ (et cette restriction sur la régularité est optimale). De manière imagée, la randomisation fait gagner une demie dérivée par rapport à l'injection de Sobolev. Tout comme l'injection de Sobolev, cet effet est connu depuis le début du xx^e^ siècle et il peut sembler surprenant que l'interaction entre les deux phénomènes n'ait pas été plus étudiée dans le passé.

Remarquons finalement que grâce à l'inégalité de Khinchin, il est permis de remplacer dans la discussion précédente les variables gaussiennes par une famille de variables aléatoires plus générale (par exemples des variables de Bernoulli).

2.2 – Produits presque sûrs dans des espaces de Sobolev d'indice négatif

Soit la série aléatoire

$$u_\omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{g_n(\omega)}{\langle n\rangle^\alpha}\, e^{inx}, \quad \frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2},$$

avec g_n comme dans la section précédente. Il est facile de vérifier que presque sûrement $u_\omega \in H^\sigma(\mathbb{T})$ pour $\sigma<\alpha-\frac{1}{2}$ mais presque sûrement $u_\omega \notin H^{\alpha-\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$. Dans la suite, on fixe un nombre σ tel que $\sigma<\alpha-\frac{1}{2}$ (il faut penser que ce nombre est très proche de $\alpha-\frac{1}{2}$). La série u_ω est donc dans un espace de Sobolev d'indice négatif et il s'avère difficile de définir un objet comme $|u_\omega|^2$. Après renormalisation, il est néanmoins possible de donner un sens à $|u_\omega|^2$, et même de déterminer sa régularité dans les espaces de Sobolev. Commençons par considérer les sommes partielles

$$u_{\omega,N}(x) = \sum_{|n|\leqslant N} \frac{g_n(\omega)}{\langle n\rangle^\alpha}\, e^{inx}$$

qui sont bien des fonctions de classe C^∞. On développe

$$|u_{\omega,N}(x)|^2 = \sum_{|n|\leqslant N} \frac{|g_n(\omega)|^2}{\langle n\rangle^{2\alpha}} + \sum_{\substack{n_1\neq n_2\\ |n_1|,|n_2|\leqslant N}} \frac{g_{n_1}(\omega)\overline{g_{n_2}(\omega)}}{\langle n_1\rangle^\alpha\langle n_2\rangle^\alpha}\, e^{i(n_1-n_2)x}.$$

Le premier terme de ce développement (le coefficient de Fourier d'ordre zéro) contient toute la singularité alors que le deuxième terme a une limite presque sûrement dans $H^{2\sigma}(\mathbb{T})$. On pose alors

$$c_N := \mathbb{E}\Big(\sum_{|n|\leqslant N} \frac{|g_n(\omega)|^2}{\langle n\rangle^{2\alpha}}\Big) = \sum_{|n|\leqslant N} \frac{2}{\langle n\rangle^{2\alpha}} \sim N^{1-2\alpha},$$

et on définit la somme partielle renormalisée

$$|u_{\omega,N}(x)|^2 - c_N = \sum_{|n|\leqslant N} \frac{|g_n(\omega)|^2-2}{\langle n\rangle^{2\alpha}} + \sum_{\substack{n_1\neq n_2\\ |n_1|,|n_2|\leqslant N}} \frac{g_{n_1}(\omega)\overline{g_{n_2}(\omega)}}{\langle n_1\rangle^\alpha\langle n_2\rangle^\alpha}\, e^{i(n_1-n_2)x}.$$

L'indépendance des variables aléatoires g_n assure que le coefficient de Fourier d'ordre zéro est bien défini. Plus précisément, on obtient

$$\mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{|n|\leqslant N} \frac{|g_n(\omega)|^2-2}{\langle n\rangle^{2\alpha}}\Big|^2\Big) = \sum_{|n|\leqslant N} \frac{4}{\langle n\rangle^{4\alpha}},$$

ce qui a une limite pour $N\to\infty$ si $\alpha>1/4$.

De même, l'indépendance conduit à ce que l'espérance

$$\mathbb{E}\Big(\Big\|\sum_{\substack{n_1\neq n_2\\ |n_1|,|n_2|\leqslant N}} \frac{g_{n_1}(\omega)\overline{g_{n_2}(\omega)}}{\langle n_1\rangle^\alpha\langle n_2\rangle^\alpha}\, e^{i(n_1-n_2)x}\Big\|^2_{H^{2\sigma}}\Big)$$

soit majorée par un terme de l'ordre de

$$\sum_{n_1,n_2} \frac{\langle n_1-n_2\rangle^{4\sigma}}{\langle n_1\rangle^{2\alpha}\langle n_2\rangle^{2\alpha}}.$$

Cette dernière somme est convergente sous la condition $-4\sigma+4\alpha > 2$, ce qui est équivalent à notre hypothèse $\sigma < \alpha - \frac{1}{2}$. La suite

$$\Big(|u_{\omega,N}(x)|^2 - c_N\Big)_{N\geqslant 1} \tag{4}$$

a donc une limite dans $L^2(\Omega; H^{2\sigma}(\mathbb{T}))$. Cette limite est par définition la renormalisation de $|u_\omega|^2$. On peut également démontrer (par des arguments plus élaborés) la convergence presque sûre dans l'espace de Sobolev $H^{2\sigma}(\mathbb{T})$ de la suite (4). Remarquons que puisque $\sigma < 0$ la norme dans $H^{2\sigma}(\mathbb{T})$ est plus faible que celle dans $H^{\sigma}(\mathbb{T})$ (où la série $u_\omega(x)$ est définie).

Pour résumer d'une manière très informelle, le module au carré d'un élément de H^σ est dans $H^{2\sigma}$, après renormalisation. Il s'agit d'un effet probabiliste remarquable qui est au coeur de l'étude d'EDP d'évolution, en présence d'aléa, dans des espaces de Sobolev d'indice négatif. Nous allons développer cette problématique dans la suite de ce texte.

3. Résolution de l'équation des ondes non linéaire avec des données initiales peu régulières

L'équation des ondes est un exemple typique d'une EDP dispersive. La résolution d'EDP dispersives avec des données initiales peu régulières a une longue histoire depuis les travaux fondateurs de Ginibre-Velo et de Kato. Kenig-Ponce-Vega, Klainerman-Machedon et notamment Bourgain ont développé des outils permettant d'obtenir des solutions d'une régularité très basse. La question de l'optimalité des ces résultats s'est ensuite posée. C'est le travail de Lebeau qui a lancé une série de résultats de construction des contre-exemples qui montrent l'optimalité de l'hypothèse de régularité dans les résultats précédents. C'est dans ce contexte que l'idée de démontrer une sorte de caractère bien posé probabiliste, pour des régularités où des contre-exemples étaient construits, est apparue dans [21, Section 10.1], et ensuite mise en place dans [5, 4].

3.1 – Résolution de l'équation des ondes linéaire avec des données initiales distributions périodiques

On considère l'équation des ondes linéaire

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), \tag{5}$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^3$, $u : \mathbb{R}\times\mathbb{T}^3 \to \mathbb{R}$ et Δ est l'opérateur de Laplace. On vérifie aisément que pour

$$(u_0, u_1) \in C^\infty(\mathbb{T}^3)\times C^\infty(\mathbb{T}^3)$$

la solution de (5) est donnée par l'application $S(t)$ définie par

$$S(t)(u_0,u_1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3}\Big(\cos(t|n|)\widehat{u_0}(n) + \frac{\sin(t|n|)}{|n|}\widehat{u_1}(n)\Big)e^{in\cdot x},$$

où $|n| = (n_1^2+n_2^2+n_3^2)^{1/2}$. Pour $n = 0$, l'expression $\frac{\sin(t|n|)}{|n|}$ est ici naturellement comprise comme sa limite t.

Comme $|\cos(t|n|)| \leqslant 1$ et $|\sin(t|n|)| \leqslant 1$, il résulte de la définition ci-dessus que

$$\|S(t)(u_0,u_1)\|_{H^s} \leqslant C(1+|t|)(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}). \tag{6}$$

Puisque $S(t)$ est linéaire, nous pouvons définir une unique extension de $S(t)$ pour

$$(u_0,u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$$

et résoudre ainsi (5) avec des données initiales dans $H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$ pour $s\in\mathbb{R}$ arbitraire.

3.2 – Le problème non linéaire. Résolution par des méthodes déterministes.

La discussion précédente permet de facilement résoudre (5) avec des données initiales singulières (dans des espaces de Sobolev d'indice arbitrairement négatif). L'argument est basé sur l'estimation à priori (6) et la nature linéaire de l'application $S(t)$ (ou de l'équation (5)). La situation change radicalement si on considère une perturbation non linéaire de (5). Dans ce texte, nous restreignons notre attention au cas d'une interaction non linéaire cubique. Plus précisément, nous considérons le problème

$$(\partial_t^2 - \Delta)u + u^3 = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x). \tag{7}$$

Pour ce problème, on perd l'information cruciale (6) et la nature linéaire de l'équation. Néanmoins, l'équation (7) est de nature Hamiltonienne. Par conséquent, formellement, les solutions de (7) satisfont la relation algébrique suivante

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^3}\Big((\partial_t u(t,x))^2+|\nabla_x u(t,x)|^2 + \frac{1}{2}u^4(t,x)\Big)dx = 0. \quad (8)$$

Cette relation entraine que l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{T}^3)$ est l'un des cadres naturels de l'étude de (7). Le départ de cette étude est donné par le résultat classique suivant.

Théorème 1. *Pour tout $(u_0,u_1)\in H^1(\mathbb{T}^3)\times L^2(\mathbb{T}^3)$ (à valeurs réelles) il existe une unique solution globale de (7) dans la classe*

$$(u,\partial_t u)\in C^0(\mathbb{R};H^1(\mathbb{T}^3)\times L^2(\mathbb{T}^3)).$$

Si de plus $(u_0,u_1)\in H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$ pour un certain $s\geqslant 1$ alors

$$(u,\partial_t u)\in C^0(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)). \quad (9)$$

Finalement, la dépendance par rapport aux données initiales est continue.

Par des méthodes de compacité (remontant aux travaux de Leray) on peut exploiter (8) et obtenir une version beaucoup plus faible du Théorème 1, sans avoir l'unicité et sans avoir la propagation de régularité (9). Dans le Théorème 1, l'unicité résulte d'une utilisation de l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{T}^3)\subset L^6(\mathbb{T}^3)$. La norme L^6 apparaît naturellement ici lorsque l'on étudie la norme L^2 du terme non linéaire u^3. Quant à la propagation de la régularité, elle résulte de l'estimation suivante

$$\|u^3\|_{H^s(\mathbb{T}^3)}\leqslant C\|(1-\Delta)^{s/2}u\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}\|u\|^2_{L^6(\mathbb{T}^3)}. \quad (10)$$

Les détails de la preuve de (10), peuvent se consulter dans l'ouvrage [1] où les estimations de type (10) sont appelées « douces » (« tame » en anglais). Le point clé dans l'estimation (10) est que les s dérivées agissant sur l'expression u^3 sont redistribuées d'une telle manière qu'à la fin le membre de droite de (10) ne dépend que d'une manière linéaire de la norme forte (celle qui contient des dérivées).

Compte tenu de la discussion sur le problème linéaire (5), il est maintenant naturel de se demander si le Théorème 1 se généralise pour des données initiales dans $H^s\times H^{s-1}$ pour certains $s<1$. Comme on le verra ci-dessous une telle généralisation est possible pour certains s mais pas tous. En utilisant des estimations de Strichartz au lieu de l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{T}^3)\subset L^6(\mathbb{T}^3)$, une partie du Théorème 1 se généralise pour

$$(u_0,u_1)\in H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3),\quad s\geqslant 1/2. \quad (11)$$

Plus précisément, on peut obtenir le caractère localement bien posé de (7) sous l'hypothèse (11). Une description plus détaillée des estimations de Strichartz irait au delà de nos objectifs dans ce texte. Nous nous restreindrons à dire que les estimations de Strichartz peuvent être vues comme des améliorations presque partout en temps des injections de Sobolev, lorsqu'au lieu de considérer une fonction arbitraire on considère une fonction qui satisfait une EDP dispersive. Nous renvoyons à [22] pour plus de détails sur les estimations de Strichartz et la généralisation du Théorème 1 sous l'hypothèse (11). On peut conjecturer que la partie globale en temps du Théorème 1 reste vraie sous l'hypothèse (11). Les résultats les plus avancés vers la résolution de cette conjecture sont contenus dans [7, 20].

3.3 – La limite des méthodes déterministes

La restriction (11) est optimale en ce qui concerne le caractère bien posé au sens d'Hadamard de (7) avec des données initiales dans $H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $s\in(0,1/2)$ et $(u_0,u_1)\in H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$. Il existe une suite*

$$u_N(t,x)\in C^0(\mathbb{R};C^\infty(\mathbb{T}^3)),\quad N=1,2,\cdots$$

telle que

$$(\partial_t^2-\Delta)u_N+u_N^3=0$$

avec

$$\lim_{N\to+\infty}\|(u_N(0)-u_0,\partial_t u_N(0)-u_1)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)}=0$$

mais pour tout $T>0$,

$$\lim_{N\to+\infty}\|(u_N(t),\partial_t u_N(t))\|_{L^\infty([0,T];H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3))}=+\infty.$$

Le caractère bien posé au sens d'Hadamard requiert l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données initiales. Le Théorème 2 contredit la dépendance continue par rapport aux données initiales.

La preuve du Théorème 2 est basée sur une idée de Lebeau (voir par exemple [14]) : si les données initiales sont localisées à haute fréquence alors pour des temps petits une bonne approximation de la solution de (7) est donnée par la solution de

$$\partial_t^2 u + u^3 = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x) \tag{12}$$

qui est obtenue à partir de (7) en négligeant l'effet du laplacien Δ. Autrement dit, sous l'hypothèse du Théorème 2 , ce sont les effets non linéaires qui dominent dans le régime décrit ci-dessus. La solution de (12) manifeste le phénomène d'amplification décrit par le Théorème 2 et cette propriété est propagée aux solutions de (7) par un argument perturbatif, hautement non trivial. Une preuve détaillée du Théorème 2 se trouve dans [22].

3.4 – Résolution par des méthodes probabilistes au delà des limites de la théorie déterministe

Malgré le résultat du Théorème 2, on peut se demander si une forme du caractère bien posé de (7) reste vrai pour des données initiales dans

$$H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3), \quad s < 1/2. \tag{13}$$

La réponse à cette question est positive si on munit l'espace (13) d'une mesure de probabilité non dégénérée telle que nous avons l'existence, l'unicité et (une forme) de dépendance continue presque sûrement par rapport à cette mesure.

On va choisir les données initiales de (7) parmi les réalisations des séries aléatoires suivantes

$$u_0^\omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \frac{g_n(\omega)}{\langle n\rangle^\alpha} e^{in\cdot x},$$
$$u_1^\omega(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \frac{h_n(\omega)}{\langle n\rangle^{\alpha-1}} e^{in\cdot x}. \tag{14}$$

Ici $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}^3}$ et $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}^3}$ sont deux familles de variables aléatoires indépendantes conditionnées par $g_n = \overline{g_{-n}}$ et $h_n = \overline{h_{-n}}$, afin que u_0^ω et u_1^ω soient à valeurs réelles. De plus, on suppose que pour $n \neq 0$, g_n et h_n sont des variables gaussiennes complexes de loi $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, alors que g_0 et h_0 sont des variables gaussiennes réelles de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Les sommes partielles associées à (14) sont de Cauchy dans $L^2(\Omega; H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3))$ pour tout $s < \alpha - \frac{3}{2}$. Par conséquent, les données initiales (14) appartiennent presque sûrement à $H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$ pour $s < \alpha - \frac{3}{2}$. De plus, la probabilité de l'événement

$$(u_0^\omega, u_1^\omega) \in H^{\alpha-\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^3) \times H^{\alpha-\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^3)$$

est nulle. Il résulte que pour $\alpha > 5/2$ on peut appliquer le Théorème 1 pour des données (u_0, u_1) décrites par (14). Pour $\alpha > 2$, on peut appliquer les résultats déterministes raffinés (basés sur les estimations de Strichartz). Finalement pour $\alpha \in (3/2, 2)$, le Théorème 2 s'applique et on obtient :

Théorème 3. *Soit $\alpha \in (3/2,2)$ et $0 < s < \alpha - 3/2$. Pour presque tout ω, il existe une suite*

$$u_N^\omega(t,x) \in C^0(\mathbb{R}; C^\infty(\mathbb{T}^3)), \quad N = 1, 2, \cdots$$

telle que

$$(\partial_t^2 - \Delta) u_N^\omega + (u_N^\omega)^3 = 0$$

avec

$$\lim_{N\to+\infty} \|(u_N^\omega(0) - u_0^\omega, \partial_t u_N^\omega(0) - u_1^\omega)\|_{H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)} = 0$$

mais pour tout $T > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} \|(u_N^\omega(t), \partial_t u_N^\omega(t))\|_{L^\infty([0,T]; H^s(\mathbb{T}^3)\times H^{s-1}(\mathbb{T}^3))} = +\infty.$$

On peut néanmoins démontrer le résultat suivant.

Théorème 4. *Soit $\alpha \in (3/2,2)$ et $0 < s < \alpha - 3/2$. Définissons grâce au Théorème 1 la suite $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$ de solutions de (7) pour les conditions initiales régulières données par*

$$u_{0,N}^\omega(x) = \sum_{|n|\leqslant N} \frac{g_n(\omega)}{\langle n\rangle^\alpha} e^{in\cdot x},$$
$$u_{1,N}^\omega(x) = \sum_{|n|\leqslant N} \frac{h_n(\omega)}{\langle n\rangle^{\alpha-1}} e^{in\cdot x}. \tag{15}$$

La suite $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$ converge presque sûrement lorsque $N \to \infty$ dans $C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{T}^3))$ vers une (unique) limite qui satisfait (7) au sens des distributions.

Les résultats des Théorèmes 3 et 4 montrent que le type d'approximation des données initiales est crucial lorsque l'on établit le caractère bien posé probabiliste.

Par des méthodes de compacité (à la Leray), on peut espérer obtenir la convergence d'une sous-suite de $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$. La convergence de toute la suite $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$ est hors de portée des techniques de solutions faibles. Le fait que toute la suite converge contient déjà une forme d'unicité. Dans [4], on peut trouver une forme d'unicité qui se formule dans un cadre fonctionnel adapté.

Dans [4], on obtient aussi une dépendance continue par rapport aux données initiales probabiliste, dont la preuve fait appel à des propriétés de grandes déviations conditionnées qui semblent avoir un intérêt indépendant.

Enfin, on peut démontrer le résultat du Théorème 4 pour des randomisations plus générales que (14). Par exemple, on peut remplacer les variables gaussiennes par des variables de Bernoulli et les coefficients déterministes $\langle n\rangle^{-\alpha}$ par d'autres coefficients ayant un comportement « semblable » pour $|n|\gg 1$. On renvoie à [4] pour plus de détails.

3.5 – Aller encore plus loin

Pour $\alpha<3/2$, u_0^ω n'est plus une fonction classique. Dans ce cas, elle s'interprète comme une distribution qui appartient à un espace de Sobolev d'indice négatif. On ne peut pas espérer avoir un résultat comme celui du Théorème 4 pour $\alpha<3/2$. Une renormalisation est nécessaire, comme le montre le résultat suivant récemment établi dans [17].

Théorème 5. *Soit $\alpha\in(\frac{5}{4},\frac{3}{2})$ et $s<\alpha-3/2$. Il existe des constantes positives γ, c, C, T_0 et une suite divergente $(c_N)_{N\geqslant 1}$ telle que pour tout $T\in(0,T_0)$ il existe un ensemble Ω_T tel que la probabilité de son complémentaire est $\leqslant C\exp(-c/T^\gamma)$ et tel que si on note par $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$ la solution de*

$$\partial_t^2 u_N^\omega-\Delta u_N^\omega-c_N u_N^\omega+(u_N^\omega)^3=0, \tag{16}$$

avec une donnée initiale donnée par (15) alors pour tout $\omega\in\Omega_T$ la suite $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$ converge pour $N\to\infty$ dans $C^0([-T,T];H^s(\mathbb{T}^3))$. En particulier, pour presque tout ω il existe $T_\omega>0$ tel que $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$ converge dans $C^0([-T_\omega,T_\omega];H^s(\mathbb{T}^3))$.

Le Théorème 5 est un premier pas dans l'étude de (7) dans les espaces de Sobolev d'indice négatif. Le but ultime est d'arriver à traiter le cas $\alpha=1$. Dans ce cas un argument exploitant des mesures invariantes permettrait d'avoir aussi des solutions globales. Pour les autres valeurs de α, on peut espérer qu'un argument de type I-méthode à la Tao et al. permettrait de globaliser les solutions du Théorème 5. Toutes ces questions font l'objet du travail en cours [17].

4. Mesures invariantes pour l'équation de Schrödinger non linéaire

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger non linéaire, posée sur le tore de dimension deux,

$$(i\partial_t+\Delta)u-|u|^2u=0,\, u(0,x)=u_0(x),\, x\in\mathbb{T}^2. \tag{17}$$

Ici la solution u est à valeurs complexes mais l'équation est d'ordre 1 en temps. Nous avons l'analogue suivant du Théorème 1 dans le contexte de (17).

Théorème 6. *Pour tout $u_0\in H^1(\mathbb{T}^2)$ il existe une unique solution globale de (17) dans la classe $C^0(\mathbb{R};H^1(\mathbb{T}^2))$. Si de plus $u_0\in H^s(\mathbb{T}^2)$ pour un certain $s\geqslant 1$ alors $u\in C^0(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}^2))$. La dépendance par rapport aux données initiales est aussi continue.*

L'équation (17) est de nouveau de nature Hamiltonienne. Cela implique que la fonctionnelle

$$E(u)=\int_{\mathbb{T}^2}\Big(|\nabla_x u(t,x)|^2+|u(t,x)|^2 + \frac{1}{2}|u(t,x)|^4\Big)dx \tag{18}$$

est conservée par (17). La mesure de Gibbs associée à (17) est une « renormalisation » de l'objet complètement formel

$$\exp(-E(u))du. \tag{19}$$

Cette renormalisation est une procédure classique en théorie quantique des champs, qu'il serait impossible de présenter dans ce texte. Disons seulement que la mesure obtenue par cette renormalisation est absolument continue par rapport à la mesure gaussienne induite par la série aléatoire

$$u_0^\omega(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\frac{g_n(\omega)}{\langle n\rangle}e^{in\cdot x} \tag{20}$$

où $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}^2}$ est une famille de variables gaussiennes complexes indépendantes de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$. Une fois posée la définition rigoureuse de la mesure (19), la question naturelle est de savoir si on peut définir une dynamique reliée a (17) qui laisse cette mesure invariante. La réponse à cette question est donnée par le travail de Bourgain [3]. La difficulté tient au fait que (20) ne définit pas une fonction classique. L'objet défini par (20) appartient presque sûrement à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2)$ pour tout $s<0$. Une telle régularité implique que le Théorème 6 ne peut pas s'appliquer dans le contexte d'une donnée initiale donnée par (20). Cette régularité est également hors de portée des techniques déterministes les plus élaborées. Néanmoins, l'énoncé suivant peut se déduire de [3].

Théorème 7. *Définissons grâce au Théorème 6 la suite $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$ de solutions de (17) pour les conditions initiales de classe C^∞ données par*

$$u_{0,N}^\omega(x) = \sum_{|n|\leqslant N} \frac{g_n(\omega)}{\langle n\rangle} e^{in\cdot x}. \tag{21}$$

Alors pour tout $s<0$ la suite

$$\left(\exp\left(\frac{it}{2\pi^2}\|u_N^\omega(t)\|_{L^2}^2\right)u_N^\omega(t)\right)_{N\geqslant 1}$$

converge presque sûrement dans $C^0(\mathbb{R};H^s(\mathbb{T}^2))$ vers une limite qui satisfait (au sens des distributions) une version renormalisée de (17).

On observe une ressemblance entre les Théorèmes 4 et 7. Une différence notable est la nécessité de renormaliser la suite $(u_N^\omega)_{N\geqslant 1}$ du Théorème 7 afin d'obtenir une limite. Cette renormalisation est liée à la construction de la mesure provenant de l'objet formel (19) mentionné ci-dessus.

On peut formuler le résultat du Théorème 7 dans l'esprit du Théorème 5. Plus précisément, on peut démontrer la convergence des solutions du problème

$$i\partial_t u_N + \Delta u_N + c_N u_N - |u_N|^2 u_N = 0$$

avec donnée initiale (21), où $(c_N(\omega))_{N\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels presque sûrement divergente vers $+\infty$.

5. EDP stochastiques singulières

La problématique considérée dans les sections précédentes est très proche de l'analyse d'EDP en présence d'un terme source aléatoire singulier (bruit). Cette thématique a reçu beaucoup d'attention dans les dernières années (voir par exemple, [6, 8, 9, 10, 11, 13]).

L'équation la plus proche de celles des sections précédentes est l'équation de la chaleur non linéaire. Plus précisément, nous considérons

$$\partial_t u - \Delta u + u^3 = \xi, \quad u(0,x) = 0, \quad x\in\mathbb{T}^3. \tag{22}$$

Dans cette équation ξ est le bruit blanc espace-temps sur $[0,\infty[\times\mathbb{T}^3$. L'inconnue u est une fonction à valeurs réelles. Il existe beaucoup de motivations physiques à considérer une EDP perturbée par un bruit blanc. Une discussion sérieuse sur ces motivations n'entre pas dans l'objectif de ce texte.

C'est le terme source ξ qui représente l'aléa singulier dans (22), alors que dans (7) et (17) c'est la donnée initiale qui est la source d'aléa singulier. Un peu d'expérience avec l'analyse des EDP d'évolution suffit à savoir que les deux situations sont en fait très proches et que, même dans certains cas, pour des raisons de commodité, on transforme facilement le problème avec donnée initiale en un problème avec un terme source et donnée initiale zéro.

Une représentation dans l'esprit de (14) et (20) du bruit blanc sur $[0,\infty[\times\mathbb{T}^3$ est donnée par la formule

$$\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \dot\beta_n(t) e^{in\cdot x}, \tag{23}$$

où β_n sont des mouvements Browniens indépendants, conditionnés par $\beta_n = \overline{\beta_{-n}}$ (β_0 est réel et pour $n\neq 0$, β_n est à valeurs dans $\mathbb{C}$). La dérivée par rapport à t de β_n dans (23) est au sens des distributions.

Si $\xi\in C^\infty([0,\infty[\times\mathbb{T}^3)$, l'équation (22) se résout par des méthodes déterministes. C'est l'analogue des Théorèmes 1 ou 6 dans le contexte de (22). Pour $N\gg 1$, on définit une approximation de ξ donnée par (23) par des fonctions lisses par

$$\xi_N(t,x) = \rho_N \star \xi$$

où $\rho_N(t,x) = N^5\rho(N^2t, Nx)$ avec ρ une fonction-test d'intégrale 1 sur $[0,\infty[\times\mathbb{T}^3$. C'est une régularisation par convolution, très proche des régularisations utilisées dans (15) et (21). L'énoncé suivant peut être déduit de [10, 16].

Théorème 8. *Il existe une suite $(c_N)_{N\geqslant 1}$ de nombres positifs, divergente lorsque $N\to\infty$ telle que si on note par u_N la solution de*

$$\partial_t u_N - \Delta u_N - c_N u_N + u_N^3 = \xi_N, \quad u(0,x) = 0$$

alors $(u_N)_{N\geqslant 1}$ converge en loi lorsque $N\to\infty$.

On peut aussi avoir convergence presque sûre dans des espaces de Hölder convenables. La donnée initiale $u(0,x)$ peut être différente de zéro : il suffit qu'elle appartienne à un espace fonctionnel bien choisi (voir [16]).

L'analogue complet de (14) et (20) dans le contexte de (22) serait le bruit blanc sur $\mathbb{T}\times\mathbb{T}^3$ défini par

$$\xi = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}^3} g_{m,n}(\omega)e^{imt}e^{in\cdot x}, \tag{24}$$

où $\{g_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^4}$ est une famille de variables gaussiennes indépendantes conditionnées pour que ξ

soit à valeurs réelles. Le résultat du Théorème 8 reste vrai pour un bruit ξ défini par (24).

Il y a d'autres EDP paraboliques pour lesquelles un résultat dans l'esprit du Théorème 8 peut être obtenu, l'exemple le plus connu est peut-être l'équation de KPZ (voir [11]).

6. Discussion finale

Les énoncés des Théorèmes 4, 5, 7 et 8 se ressemblent. Leurs preuves aussi suivent le même schéma conducteur. D'abord, on construit des solutions locales en temps. Ensuite, on utilise une information globale qui est soit une mesure invariante, soit une estimation d'énergie pour passer vers des solutions globales en temps.

Pour construire des solutions locales, on cherche les solutions sous la forme

$$u = u_1 + u_2,$$

où u_1 contient la partie singulière de la solution.

Par des arguments probabilistes, très proches des considérations de la Section 2, u_1 a des propriétés meilleures que celles données par les méthodes déterministes. Toute la partie probabiliste se trouve dans cette partie de l'analyse. Dans la preuve du Théorème 4, on utilise des améliorations presque sûres de l'injection de Sobolev alors que dans les preuves des Théorèmes 5, 7 et 8, on construit des produits presque sûrs dans des espaces de Sobolev d'indice négatif.

Ensuite, on résout le problème pour u_2 par des arguments déterministes. À cet endroit la nature de l'équation devient encore plus importante. Dans le cas du Théorème 8 l'outil de base est la régularité elliptique alors que dans les Théorèmes 4, 5 et 7 on exploite d'une manière cruciale les oscillations en temps (captées par les espaces de Bourgain, par exemple).

Le passage vers des solutions globales en temps dans le Théorème 7 utilise une mesure invariante comme un contrôle global sur les solutions. Dans le Théorème 4 la globalisation des solutions se fait par un argument basé sur des estimations d'énergie. Il est remarquable que, dans le contexte du Théorème 8, on puisse aussi utiliser ces deux méthodes pour globaliser les solutions locales : dans [12] la globalisation se fait en utilisant un contrôle provenant d'une mesure invariante alors que le travail [16] utilise la (bien plus flexible) méthode d'estimations d'énergie.

Le travail d'Oh [18] établit l'analogue du Théorème 2 dans le contexte du Théorème 7. À ma connaissance, un tel résultat d'amplification de certaines approximations particulières n'est pas connu dans le contexte du Théorème 8.

Nous avons déjà mentionné que, dans le Théorème 4, nous autorisons des randomisations plus générales comparé au Théorème 7. Cela a permis de considérer des randomisations pour les fonctions des espaces de Sobolev sur l'espace entier $\mathbb{R}^d$ et de démontrer des résultats dans l'esprit de Théorème 4 pour des problèmes posés sur l'espace entier (au lieu du tore). Pour des travaux dans cette direction, on peut consulter [2, 15].

Le Théorème 4 autorise des randomisations plus générales que le Théorème 7 mais il ne dit rien concernant le transport de la mesure définissant l'ensemble des données initiales (alors que la preuve du Théorème 7 nous dit que la mesure gaussienne initiale est quasi-invariante par le flot). On ne connaît toujours pas la nature de la mesure transportée par le flot dans le contexte du Théorème 4. On peut consulter [19] pour un progrès récent sur ce problème intéressant.

La liste des références ci-dessous est loin d'être complète. Il s'agit d'un domaine très actif. Pour la description d'autres résultats directement liés à ce que nous venons de décrire dans les pages précédentes, nous renvoyons le lecteur à [8, 11, 22].

Références

[1] S. Alinhac et P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels. [Current Scholarship]. InterEditions, Paris; Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Meudon, 1991, p. 190.

[2] A. Benyi, T. Oh et O. Pocovnicu. « On the probabilistic Cauchy theory of the cubic nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$ ». *Transactions of the American Mathematical Society, Series B* **2**, n° 1 (2015), p. 1-50.

[3] J. Bourgain. « Invariant measures for the 2*D*-defocusing nonlinear Schrödinger equation ». *Communications in mathematical physics* **176**, n° 2 (1996), p. 421-445.

[4] N. Burq et N. Tzvetkov. « Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **16**, n° 1 (2014), p. 1-30.

[5] N. Burq et N. Tzvetkov. « Random data Cauchy theory for supercritical wave equations ». *Inventiones mathematicae* **173**, nº 3 (2008), p. 449-475.

[6] G. Da Prato et A. Debussche. « Strong solutions to the stochastic quantization equations ». *The Annals of Probability* **31**, nº 4 (2003), p. 1900-1916.

[7] B. Dodson. « Global well-posedness and scattering for the radial, defocusing, cubic wave equation with initial data in a critical Besov space ». *Analysis & PDE* **12**, nº 4 (2018), p. 1023-1048.

[8] M. Gubinelli. « A panorama of singular SPDEs ». *Proc. Int. Cong. Math-Rio de Janeiro* **Vol. 2** (2018), p. 2277-2304.

[9] M. Gubinelli, P. Imkeller et N. Perkowski. « Paracontrolled distributions and singular PDEs ». *Forum of Mathematics Pi* **3** (2015).

[10] M. Hairer. « A theory of regularity structures ». *Inventiones mathematicae* **198**, nº 2 (2014), p. 269-504.

[11] M. Hairer. « Singular stochastic PDEs ». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians-Seoul 2014. Vol. IV* (2014), p. 49-73.

[12] M. Hairer et K. Matetski. « Discretisations of rough stochastic PDEs ». *The Annals of Probability* **46**, nº 3 (2018), p. 1651-1709.

[13] A. Kupiainen. « Renormalization group and stochastic PDEs ». *Ann. Henri Poincaré* **17**, nº 3 (2016), p. 497-535.

[14] G. Lebeau. « Perte de régularité pour les équations d'ondes sur-critiques ». *Bull. Soc. Math. France* **133**, nº 1 (2005), p. 145-157.

[15] J. Lührmann et D. Mendelson. « Random data Cauchy theory for nonlinear wave equations of power-type on $\mathbb{R}^3$ ». *Communications in Partial Differential Equations* **39**, nº 12 (2014), p. 2262-2283.

[16] J.-C. Mourrat et H. Weber. « The dynamic Φ^4_3 model comes down from infinity ». *Communications in Mathematical Physics* **356**, nº 3 (2017), p. 673-753.

[17] T. Oh, O. Pocovnicu et N. Tzvetkov. *Probabilistic local Cauchy theory of the cubic wave equation in negative Sobolev spaces*.

[18] T. Oh. « A remark on norm inflation with general initial data for the cubic nonlinear Schrödinger equations in negative Sobolev spaces ». *Funkcialaj Ekvacioj* **60**, nº 2 (2017), p. 259-277.

[19] T. Oh et N. Tzvetkov. « Quasi-invariant Gaussian measures for the cubic fourth order nonlinear Schrödinger equation ». *Probab. Theory Related Fields* **169**, nº 3-4 (2017), p. 1121-1168.

[20] T. Roy. « Adapted linear-nonlinear decomposition and global well-posedness for solutions to the defocusing cubic wave equation on $\mathbb{R}^3$ ». *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A* **24**, nº 4 (2009), p. 1307-1323.

[21] N. Tzvetkov. « Invariant measures for the defocusing Nonlinear Schrödinger equation (Mesures invariantes pour l'équation de Schrödinger non linéaire) ». *Annales de l'institut Fourier* **58** (2008), p. 2543-2604.

[22] N. Tzvetkov. « Random data wave equations ». *arXiv preprint arXiv:1704.01191* (2017).

Nikolay Tzvetkov

Université de Cergy-Pontoise

nikolay.tzvetkov@u-cergy.fr

Nikolay Tzvetkov est professeur au laboratoire d'Analyse, Géométrie et Modélisation de l'université de Cergy-Pontoise. Ses travaux portent sur l'analyse d'équations aux dérivées partielles modélisant la propagation d'ondes.

Je remercie les éditeurs de la *Gazette* pour leur invitation à écrire ce texte. Ce texte a bénéficié des remarques de Benoît Claudon, Patrick Gérard, Philippe Gravejat, Jean-Christophe Mourrat, Tadahiro Oh et Frédéric Rousset.