

Московский Государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Минченко Андрей Николаевич

На правах рукописи
УДК 512.813.4

О ПОЛУПРОСТЫХ ПОДАЛГЕБРАХ
ОСОБЫХ АЛГЕБР ЛИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
д.ф.-м.н., профессор Э. Б. Винберг
и
к.ф.-м.н., доцент И. В. Аржанцев

Москва – 2008

Оглавление

0	Введение	5
0.1	Исторические сведения и краткое описание работы	5
0.2	Результаты главы 1	7
0.3	Результаты главы 2	11
1	Классификация в комплексном случае	17
1.1	Предварительные сведения	17
1.1.1	Эквивалентность и линейная эквивалентность	17
1.1.2	Описание регулярных подалгебр	21
1.1.3	Полные регулярные подалгебры	23
1.1.4	R- и S-подалгебры	24
1.1.5	Одно свойство линейно сопряжённых подалгебр	26
1.2	Классификация простых вложений	27
1.2.1	Идентификация простых подалгебр	27
1.2.2	Результат Дынкина	28
1.2.3	Описание таблиц 1.6-1.8	28
1.2.4	Несколько замечаний	29
1.2.5	Случай $\mathfrak{g} = E_6$	30
1.2.6	Случай $\mathfrak{g} = E_7$	31
1.2.7	Случай $\mathfrak{g} = E_8$	33
1.3	Инварианты особых алгебр Ли	36

1.4	Классификация полупростых вложений	39
1.4.1	Характеристики Дынкина 3-мерных подалгебр	39
1.4.2	Основная идея	39
1.4.3	Случай D	41
1.4.4	Случай E	43
1.4.5	Основной результат	44
1.5	Нормализаторы простых подалгебр	45
1.5.1	Результаты Алексеевского	45
1.5.2	Нахождение групп $N = \Gamma \ltimes Z$	47
1.5.3	Описание таблиц 1.10-1.14	48
1.5.4	Примеры нахождения группы $Z = Z_G(\mathfrak{h})$	49
1.5.5	Примеры нахождения группы $N = \Gamma \ltimes Z_G(\mathfrak{h})$	51
1.6	Таблицы	52
2	Классификация в вещественном случае	62
2.1	Предварительные замечания	62
2.2	Классификация инволюций	64
2.2.1	Редукция к классификации внутренних инволюций	65
2.2.2	Классификация внутренних инволюций	67
2.2.3	Случай $\omega \neq \text{Id}$	71
2.3	Частичный порядок на множестве подалгебр	71
2.3.1	Задание частичного порядка	71
2.3.2	Определение μ для классических алгебр Ли	72
2.3.3	Определение μ для особых алгебр Ли	74
2.4	Отображение ν и его слои	75
2.4.1	Теорема о редукции	75
2.4.2	Сведение к случаю: $\mathfrak{r}$ — простая алгебра Ли, $R = \text{Aut } \mathfrak{r}$, $G = R(\mathbb{C})$	76

2.4.3	Классификация вещественных форм $\mu[\mathfrak{g}]$ -примитивных подалгебр	77
2.5	Группа автоморфизмов полупростой вещественной алгебры Ли	90
2.6	Вложения между особыми вещественными алгебрами Ли	93
2.7	Таблицы	94

Глава 0

Введение

0.1 Исторические сведения и краткое описание работы

В диссертации решается проблема классификации с точностью до сопряженности полупростых подалгебр полупростых алгебр Ли над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$. Этот вопрос актуален со времени возникновения теории С. Ли о группах преобразований и тесно связан с классификацией однородных пространств групп Ли [11]. Проблемой описания подалгебр алгебр Ли занимались многие математики.

Первый значимый прогресс в этом направлении был сделан Э. Картаном [14], [15] и Г. Вейлем [22], развившим теорию представлений полупростых комплексных алгебр Ли. Тем самым была получена классификация полупростых подалгебр в A_n .¹ Описание полупростых подалгебр других классических алгебр Ли B_n , C_n и D_n было дано А. И. Мальцевым [10], им же частично были исследованы подалгебры особых алгебр Ли G_2 и F_4 .

Идея Мальцева использовать теорию представлений для классификации подалгебр, была реализована Е. Б. Дынкиным в работе [4] для классификации полупростых подалгебр особых комплексных алгебр Ли. А именно, Дынкин рассматривал классификацию с точностью до *линейной сопряженности*. (Подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются линейно сопряженными, если для любого линейного представления алгебры $\mathfrak{g}$ образы подалгебр $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ сопряжены в алгебре матриц.) Сопряженные подалгебры линейно сопряжены, и в подавляющем большинстве случаев верно обратное, как было

¹Поскольку группа внутренних автоморфизмов полупростой алгебры Ли раскладывается в прямое произведение соответствующих групп ее простых идеалов, для решения поставленной задачи достаточно классифицировать полупростые подалгебры простых алгебр Ли.

отмечено в [4]. (Дынкин классифицировал с точностью до сопряженности обширное и важное семейство подалгебр, о чем пойдет речь ниже.) Однако полный список линейно сопряженных несопряженных полупростых подалгебр особых комплексных алгебр Ли получен не был (в классическом случае ответ дается в работе [10]). В настоящей работе этот список найден, что в некотором смысле завершает классификацию полупростых подалгебр полупростых комплексных алгебр Ли.

Случай произвольного алгебраически замкнутого поля (с небольшими ограничениями на характеристику) был рассмотрен в [17]. А именно, были классифицированы простые подалгебры особых алгебр Ли с точностью до сопряженности, а также найдены их централизаторы.

Имея классификацию в комплексном случае, естественно попытаться получить таковую и для поля вещественных чисел. В предположении, что известна классификация с точностью до сопряженности полупростых подалгебр комплексной полупростой алгебры $\mathfrak{g}$, а также известны их нормализаторы в $\text{Int } \mathfrak{g}$, Ф. И. Карпелевич [6] предложил метод получения классификации с точностью до *квазисопряженности* полупростых подалгебр вещественных форм алгебры $\mathfrak{g}$. (Если $\mathfrak{r}$ — вещественная форма $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{r}$ квазисопряжены, если существует автоморфизм $\varphi \in \text{Int } \mathfrak{g}$ такой, что $\varphi(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$ и $\varphi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2$). Таким образом им была получена классификация с точностью до квазисопряженности полупростых подалгебр классических вещественных алгебр Ли.²

Некоторые результаты в вопросе описания подалгебр особых вещественных алгебр Ли получены в работах [13], [23], [16], [8]. А именно, были найдены вещественные формы комплексных пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в некоторых специальных случаях. (Комплексная (вещественная) пара — это набор из полупростой комплексной (вещественной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее полупростой подалгебры $\mathfrak{h}$. Вещественная форма комплексной пары — это набор из вещественной формы $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ и вещественной формы $\mathfrak{s}$ алгебры $\mathfrak{h}$ такой, что $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$. Всякая вещественная пара является вещественной формой комплексной пары.) Кроме того, Комраковым был предложен метод получения вещественных форм произвольных пар, зная вышеуказанные. Это дает некий способ описания всех полупростых подалгебр полупростых вещественных алгебр Ли, но тем не менее, вопрос о нахождении классов сопряженности остается открытым.

В настоящей диссертации излагается несколько отличное от предыдущего описание вещественных форм произвольных комплексных пар, а также дается классификация с точностью до сопряженности (и квазисопряженности)

²Формально Карпелевич классифицировал простые подалгебры, однако из его результатов, как мы увидим, легко вытекает и классификация полупростых подалгебр.

полупростых подалгебр полупростых вещественных алгебр Ли. В частности, мы получаем усиление классификации Карпелевича.

Отметим также работу [20], где классифицированы с точностью до сопряженности картановские подалгебры вещественных полупростых алгебр Ли. (Как известно, в комплексных полупростых алгебрах Ли все картановские подалгебры сопряжены.)

Автор выражает благодарность своим научным руководителям Э. Б. Винбергу и И. В. Аржанцеву за внимание к данной работе.

0.2 Результаты главы 1

Особые комплексные алгебры Ли представлены пятью типами (т. е. классами изоморфности) G_2 , F_4 , E_6 , E_7 и E_8 .³ В отличие от классических алгебр Ли, о которых удобно говорить на языке теории представлений, особые алгебры Ли, с точки зрения классификации их полупростых подалгебр, представляют собой довольно сложный объект в смысле какого бы то ни было матричного описания. Дынкин нашел выход из этой ситуации при помощи введения понятий регулярной подалгебры и S -подалгебры.

Полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$ называется *регулярной*, если она порождена некоторым множеством корневых векторов относительно некоторой картановской подалгебры $\mathfrak{g}$. Описание множества регулярных подалгебр сводится к описанию подсистем системы корней алгебры $\mathfrak{g}$. Дынкин классифицировал все регулярные подалгебры с точностью до сопряженности. Оказывается, что как правило регулярные подалгебры одного типа сопряжены. Это позволяет обозначать их классы сопряженности при помощи их типов, с некоторыми уточнениями в исключительных случаях, например, $A_2, \tilde{A}_2$ при $\mathfrak{g} = F_4$ или $[3A_1]', [3A_1]''$ при $\mathfrak{g} = E_7$.

Подалгебра, не содержащаяся ни в одной регулярной подалгебре, называется *S -подалгеброй*. Например, неприводимые подалгебры классических алгебр Ли являются S -подалгебрами, и как правило верно обратное (все исключения известны). В работе [4] классифицированы, с точностью до сопряженности, все S -подалгебры особых алгебр Ли. А именно, указаны их канонические образующие, выраженные через канонические образующие алгебры $\mathfrak{g}$.

Поскольку отношение регулярности транзитивно (регулярная подалгебра регулярной подалгебры $\mathfrak{g}$ регулярна в $\mathfrak{g}$), всякая полупростая подалгебра $\mathfrak{g}$ является S -подалгеброй некоторой регулярной подалгебры $\mathfrak{g}$ (называет-

³Иногда нам будет удобно к этому списку относить и D_4 , что будет специально оговариваться.

мой минимальной объемлющей регулярной подалгеброй). В силу того, что S -подалгебры $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ характеризуются тем, что их проекции на $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ являются S -подалгебрами, из описания регулярных подалгебр и S -подалгебр простых алгебр Ли выводится описание множества $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ всех полупростых подалгебр $\mathfrak{g}$ (как множества S -подалгебр регулярных подалгебр). Отметим, что несопряженные регулярные подалгебры могут содержать сопряженные S -подалгебры.

На множестве $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ действует группа $G = \text{Int } \mathfrak{g}$ внутренних автоморфизмов $\mathfrak{g}$ с конечным множеством $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G$ орбит (классов сопряженности). Под классификацией естественно было бы понимать перечисление представителей классов $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G$, а также решение вопроса о сопряженности произвольных двух подалгебр из $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$. Первое выглядит проблематичным, если размерность G достаточно велика: классов сопряженности слишком много. Поэтому мы ограничимся только решением вопроса о сопряженности.

Программа Мальцева решения обозначенной проблемы состоит в следующем: классифицировать полупростые подалгебры с точностью до линейной сопряженности, а затем в каждом классе линейной сопряженности описать классы сопряженности, на которые он разбивается. Например, в смысле этой программы имеется следующая классификация в классическом случае. Пусть V — комплексное конечномерное векторное пространство $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$, $\mathfrak{so}(V)$ или $\mathfrak{sp}(V)$, $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ — полупростые подалгебры, являющиеся образами вложений $\varphi_i: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$. Продолжение φ_i до вложения в $\mathfrak{gl}(V)$ (представление $\mathfrak{h}_i$ в V) обозначим через $\tilde{\varphi}_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим три условия:

(C1) $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ линейно сопряжены;

(C2) $\tilde{\varphi}_1 \tau \sim \tilde{\varphi}_2$ для некоторого автоморфизма $\tau \in \text{Aut } \mathfrak{h}$;

(C3) $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ сопряжены;

Из результатов работ [10], [4] непосредственно выводится

Теорема 1. Если $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{so}(V)$, то все условия эквивалентны. В любом случае верны импликации $(C3) \Rightarrow (C1) \Rightarrow (C2)$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$. Тогда условие (2) равносильно

(C2') $\mathfrak{h}_2 = \sigma(\mathfrak{h}_1)$, где $\sigma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ — автоморфизм, индуцированный ортогональным преобразованием V .

Импликация $(C2') \Rightarrow (C1)$ (соотв. $(C2') \Rightarrow (C3)$) неверна тогда и только тогда, когда представление $\tilde{\varphi}_1$ не содержит нулевого веса и $|\det \sigma| = -1$ (соотв. нельзя выбрать τ и σ так, чтобы $\varphi_1 \tau = \sigma \varphi_1$).

Теорема 1 дает ответы на все вопросы из программы Мальцева в классическом случае. Сформулируем известные результаты (см. [4]) относительно взаимосвязи условий $(C1) \Rightarrow (C3)$ для особых алгебр Ли. Определение $\tilde{\varphi}_i$ при этом обобщается следующим образом: $\tilde{\varphi}_i = \rho\varphi_i$, $i = 1, 2$, где $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — представление минимальной размерности.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — особая комплексная алгебра Ли. Тогда верны импликации $(C3) \Rightarrow (C1) \Leftrightarrow (C2)$ верны для всех особых алгебр Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ регулярны или типа A_1 , то $(C1) \simeq (C3)$. Если $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ являются S -подалгебрами $\mathfrak{g}$, то импликация $(C1) \Rightarrow (C3)$ неверна только в случаях $\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{h} \simeq A_2$ или G_2 . При этом $\mathfrak{h}_2 = \sigma(\mathfrak{h}_1)$, где $\sigma \in \text{Aut } E_6$ — внешний автоморфизм.

Теорема 2 дает классификацию существенного (но не всего) множества полупростых подалгебр особых алгебр Ли. Для классификации подалгебр $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ с точностью до линейной сопряженности достаточно (по той же теореме) уметь находить ограничения на $\mathfrak{h}$ минимального представления ρ алгебры $\mathfrak{g}$. В силу определения $\mathfrak{h}$ как S -подалгебры регулярной подалгебры, это сводится к нахождению ограничения ρ на регулярную подалгебру и, затем, ограничения полученного представления на S -подалгебру. Как правило, определение представления $\rho|_{\mathfrak{h}}$ не вызывает труда; при этом во многих случаях ответ дан в таблицах из [4], [19].

В работе [4] был получен следующий критерий линейной сопряженности.

Теорема 3. Две полупростые подалгебры полупростой алгебры Ли линейно сопряжены тогда и только тогда, когда их системы простых корней сопряжены.⁴

Дынкин классифицировал с точностью до линейной сопряженности простые подалгебры особых алгебр Ли. При этом для классификации трехмерных подалгебр была использована теорема 3, а для других подалгебр — равносильность условий $(C1)$ и $(C2)$. А именно, были рассмотрены все пары $(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$, где регулярная подалгебра $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ и S -подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$ взяты с точностью до сопряженности (в частности, число таких пар конечно). В случае $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, было найдено вложение в $\mathfrak{g}$ полупростого элемента (характеристики) $h \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ с квадратом длины 2 в терминах скалярных произведений h с простыми корнями относительно некоторой картановской подалгебры $\mathfrak{g}$. В других случаях было вычислено представление (его класс эквивалентности) $\rho|_{\mathfrak{h}}$. Таким образом, для каждого класса линейной сопряженности были указаны все пары $(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$, в него входящие.

⁴Система простых корней полупростой алгебры Ли вкладывается в ее картановскую подалгебру при помощи формы Картана-Киллинга.

Оказывается, почти всякий класс линейной сопряженности однозначно определяется типом T алгебры $\mathfrak{h}$ и ее индексом (Дынкина) d . По определению, индекс простой подалгебры — это коэффициент сжатия корней $\mathfrak{h}$ при вложении в $\mathfrak{g}$ с условием, что скалярные произведения на $\mathfrak{h}$ и простых идеалах $\mathfrak{g}$ одинаково нормированы: например, $(\alpha, \alpha) = 2$ для максимального корня α . В работе [4] доказано, что индекс является целым числом. Из теоремы 3 следует, что линейно сопряженные простые подалгебры имеют одинаковые индексы. Классы линейной сопряженности обозначаются как T^d или $T^{d'}, T^{d''}, \dots$, если первое обозначение можно отнести к нескольким классам.

Основным результатом первой главы является

Теорема 4. *Классы линейной сопряженности $A_2^9, B_2^3, G_2^3 \subset E_6$ и $A_2^{6'} \subset E_8$ содержат ровно два класса сопряженности, при этом в случае $\mathfrak{g} = E_6$ последние переводятся один в другой внешним автоморфизмом $\mathfrak{g}$. Остальные классы линейной сопряженности полупростых подалгебр особых алгебр Ли совпадают с классами сопряженности.*

Мы обозначаем классы сопряженности, на которые распадается класс линейной сопряженности L , как $L(1)$ и $L(2)$. Все классы сопряженности простых подалгебр ранга больше 1 представлены в таблицах 1.10–1.14.

При доказательстве теоремы 4 мы пользуемся следующими соображениями. Пусть $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$. Предположим, нам известна размерность m централизатора $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Пусть r — наименьший возможный ранг редуктивной алгебры Ли размерности m . Тогда существует минимальная объемлющая $\mathfrak{h}$ регулярная подалгебра $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ ранга не более $\text{rk } \mathfrak{g} - r$. Отметим, что число m есть кратность тривиального представления в $\text{ad } \mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}}$, в частности, это инвариант класса линейной сопряженности. В случае особой алгебры $\mathfrak{g}$ и простой алгебры $\mathfrak{h}$ ранга более 1 число m можно извлечь из таблицы 25 работы [4], где найдены ограничения $\text{ad } \mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}}$. Например, класс линейной сопряженности $C_4^1 \subset E_7$, с минимальными объемлющими регулярными подалгебрами E_6 и A_7 , имеет $m = 1$, а значит, и $r = 1$. Следовательно, любой представитель этого класса содержится в регулярной подалгебре ранга не более 6, т. е. в E_6 . Таким образом, все представители сопряжены, потому что S-подалгебры типа C_4 сопряжены в E_6 . Для непростых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ мы сводим вопрос к ее простым идеалам с помощью рассмотрения централизаторов их картановских подалгебр, а также теоремы 3. Оказывается, в этом случае класс линейной сопряженности $\mathfrak{h}$ совпадает с классом сопряженности.

Второй результат первой главы касается альтернативного описания полупростых подалгебр особых алгебр Ли. А именно, мы находим централизаторы $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ представителей всех классов сопряженности простых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$

ранга более 1. Алгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ находятся с помощью своей известной размерности m : если мы обнаружили подалгебру $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$ и $\dim \mathfrak{z} = m$, то $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Алексеевским были найдены [1] группы $Z_{\text{Int } \mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ в случае, когда $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{g}$ — особая алгебра Ли. Мы получили аналогичный результат для оставшихся простых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ теми же методами, что использовались в упомянутой работе. Более того, нами был получен образ группового нормализатора $N_{\text{Int } \mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ в $\text{Aut } \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Соответствующие результаты представлены в таблицах 1.10–1.14. Они используются нами в главе 2.

0.3 Результаты главы 2

В главе 2 объектом нашего исследования являются полупростые вещественные алгебры Ли и их полупростые подалгебры. Всякая полупростая вещественная алгебра Ли $\mathfrak{r}$ допускает разложение (Картана) $\mathfrak{r} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}$ — максимальная компактная подалгебра, $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$ — ее ортогональное дополнение. Все такие разложения сопряжены, иными словами, все максимальные компактные подалгебры $\mathfrak{r}$ сопряжены. При этом инволютивный оператор θ на $\mathfrak{r}$, $\theta|_{\mathfrak{k}} = E$, $\theta|_{\mathfrak{p}} = -E$ является автоморфизмом $\mathfrak{r}$; он называется *инволюцией Картана* алгебры $\mathfrak{r}$. Всякий автоморфизм алгебры $\mathfrak{r}$ однозначно продолжается до автоморфизма ее комплексификации $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathbb{C}) = \mathfrak{r} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Соответствие $\mathfrak{r} \mapsto (\mathfrak{g}, \theta)$ определяет биекцию между типами полупростых вещественных алгебр Ли и классами изоморфизма пар $(\mathfrak{g}, \theta)$, или пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\theta)$, где $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\theta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$, $\theta^2 = 1$. (Пары $(\mathfrak{g}_1, \theta_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \theta_2)$ изоморфны, если существует изоморфизм $\alpha: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ такой, что $\theta_2(\alpha(x)) = \alpha(\theta_1(x))$, $x \in \mathfrak{g}_1$.) При этом, если алгебра $\mathfrak{r}$ проста и не имеет комплексной структуры⁵, то алгебра $\mathfrak{g}$ также проста; в противном случае $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{r}$ и θ — перестановка идеалов $\mathfrak{r}$. Если $\mathfrak{r}$ компактна, то $\theta = 1$. Типы некомпактных вещественных форм простых комплексных алгебр Ли перечислены в следующей таблице.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^\theta$	$\mathfrak{r}$
$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C}) + \mathfrak{sl}_{n-k}(\mathbb{C}) + \mathbb{C}$	$\mathfrak{su}_n^s = \mathfrak{su}_{k,n-k}$, $s = n - 2k $
	$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$
	$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$, $n = 2m$	$\mathfrak{sl}_m(\mathbb{H})$
$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_k(\mathbb{C}) + \mathfrak{so}_{n-k}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_n^s = \mathfrak{so}_{k,n-k}$, $s = n - 2k $
	$\mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$, $n = 2m$	$\mathfrak{u}_m^*(\mathbb{H})$
$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}_{2k}(\mathbb{C}) + \mathfrak{sp}_{2(n-k)}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}_n^s = \mathfrak{sp}_{k,n-k}$, $s = n - 2k $

⁵Т. е. не существует линейного оператора $I: \mathfrak{r} \rightarrow \mathfrak{r}$ такого, что $I^2 = -E$ и $I[x, y] = [x, Iy]$ ($x, y \in \mathfrak{r}$).

	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$
G_2	$A_1 + \tilde{A}_1$	GI
F_4	$A_1 + C_3, B_4$	FI, FII
E_6	$C_4, A_1 + A_5, D_5 + T_1, F_4$	$EI, EII, EIII, EIV$
E_7	$A_7, A_1 + D_6, E_6 + T_1$	$EV, EVI, EVII$
E_8	$D_8, A_1 + E_7$	$EVIII, EIX$

Первым нашим результатом в главе 2 является представление нового (комбинаторного) метода описания типов пар $(\mathfrak{g}, \theta)$. При этом мы классифицируем инволюции θ не только с точностью до $\text{Aut } \mathfrak{g}$ -сопряженности, но и с точностью до $\text{Int } \mathfrak{g}$ -сопряженности, или (внутренней) сопряженности, что нам понадобится в дальнейшем. Мы сводим это описание к случаю простой алгебры $\mathfrak{g}$ и $\theta \in \text{Int } \mathfrak{g}$. Фиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ и систему простых корней $\Pi \subset \mathfrak{t}^*$ алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $\theta = \exp \pi i h$ для некоторого элемента $h \in \mathfrak{t}$, и для всякого $\alpha \in \Pi$ верно $\alpha(h) \in \mathbb{Z}$. Элементы $x_\alpha = \alpha(h) \bmod 2$ не зависят от выбора h ; таким образом, имеем отображение $\mathcal{I} \ni \theta \mapsto x(\theta) = \{x_\alpha, \alpha \in \Pi\} \in \mathbb{Z}_2^n$, где $\mathcal{I} \subset \text{Int } \mathfrak{g}$ — группа инволютивных элементов максимального тора $T \subset \text{Int } \mathfrak{g}$, $\text{Lie } T = \mathfrak{t}$, $n = \text{rk } \mathfrak{g}$. Группа Вейля W алгебры $\mathfrak{g}$ действует на $\mathcal{I}$, причем ее орбиты являются пересечениями с $\mathcal{I}$ орбит группы $\text{Int } \mathfrak{g}$. Для каждой простой алгебры $\mathfrak{g}$ мы выводим критерий сопряженности $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{I}$ в терминах $x(\theta_1), x(\theta_2)$, т. е. наборов из 0 и 1. Например, в случае $\mathfrak{g} = F_4$ инвариантом на $x(\mathcal{I}) = \mathbb{Z}_2^n$, разделяющим нетривиальные W -орбиты (их две), является $\mathbb{Z}_2$ -значная функция $x_\alpha \vee x_\beta$, где $\alpha, \beta \in \Pi$ — длинные корни. Похожие критерии приводятся и в других случаях. В частности, мы устанавливаем, что для простых алгебр $\mathfrak{g}$ внутренняя сопряженность инволюций из $\text{Aut } \mathfrak{g}$ равносильна их $\text{Aut } \mathfrak{g}$ -сопряженности за одной серией исключений. А именно, в случае $\mathfrak{g} = D_{2n}$, $n \geq 3$ (соотв. $n = 2$), класс $\text{Aut } \mathfrak{g}$ -сопряженности инволюции θ , для которой $\mathfrak{g}^\theta$ имеет тип A_{n-1} , содержит ровно два (соотв. три) класса сопряженности.

Пусть $R \subset G$ — замкнутая подгруппа, причем $\text{Lie } R = \mathfrak{r} \subset \mathfrak{g} = \text{Lie } G$. Функтор комплексификации определяет отображение множеств полупростых подалгебр $\mathcal{S}[\mathfrak{r}] \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, спускающееся до отображения множеств орбит

$$\nu: \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/R \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G,$$

где R и G действуют на $\mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ и $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ посредством присоединенного представления (как $\text{Ad } R$ и $\text{Ad } G$). Мы изложим метод, позволяющий перечислить представителей всех орбит произвольного слоя отображения ν . Тем самым получим классификацию полупростых подалгебр $\mathfrak{r}$ с точностью до R -сопряженности на основе классификации полупростых подалгебр $\mathfrak{g}$ с точностью до G -сопряженности.

Введем частичный порядок на $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, положив $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$, если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ и для всякого $\theta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ из того, что $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, следует $\theta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Алгебра $\mathfrak{g}$ является наибольшим элементом относительно этого порядка. Пусть $\mathfrak{h}, \mathfrak{p} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ и $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s \in \mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ — представители⁶ всех R -орбит из $\nu^{-1}(G\mathfrak{p})$. Положим $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i(\mathbb{C})$, $P_i = N_G(\mathfrak{p}_i)$, $Q_i = N_R(\mathfrak{q}_i)$, $1 \leq i \leq s$. Из соотношения $\mathfrak{p}_i = \text{Ad } g_i(\mathfrak{p})$ для некоторого $g_i \in G$, $1 \leq i \leq s$, определим $\mathfrak{h}_i = \text{Ad } g_i(\mathfrak{h})$. По аналогии с ν , имеем естественные отображения

$$\nu_i: \mathcal{S}[\mathfrak{q}_i]/Q_i \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{p}_i]/P_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Пусть $\mathfrak{q}_{ij}$, $1 \leq j \leq s_i$, — представители всех R -орбит слоя $\nu_i^{-1}(P_i\mathfrak{h}_i)$. Тогда

Теорема 5. *Подалгебры $\mathfrak{q}_{ij} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s_i$, являются представителями всех R -орбит слоя $\nu^{-1}(G\mathfrak{h})$.*

Подмножество $\Omega \subset \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ назовем *разделяющим*, если для любой подалгебры $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ найдется подалгебра $\mathfrak{p} \in \Omega$ такая, что $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$. Обнаружение теоремы 5 является важнейшим шагом в классификации подалгебр вещественных алгебр Ли. Это позволяет свести задачу к случаю $\mathfrak{h} \in \Omega$. Итак, задача описания слоев отображения ν распадается на несколько задач:

- (P1) построение разделяющего множества $\Omega = \Omega[\mathfrak{g}]$ для произвольной полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
- (P2) построение отображения $\mu\mathcal{S}[\mathfrak{g}] \rightarrow \Omega$, $\mathfrak{h} \prec \mu(\mathfrak{h})$;
- (P3) описание слоев ν в случае $\mathfrak{h} \in \Omega$;
- (P4) определение групп $\text{Ad } P$, $\text{Ad } Q$, где $P = N_G(\mathfrak{h})$, $Q = N_R(\mathfrak{s})$, $\mathfrak{s}$ — произвольная вещественная форма алгебры $\mathfrak{h} \in \Omega$, лежащая в R .

В данной работе эти вопросы решаются, однако, (P3) и (P4) — с некоторыми пробелами, которые мы надеемся заполнить в последующих публикациях. Проблема (P1) легко сводится к случаю простых алгебр $\mathfrak{g}$, для которых мы получаем следующий результат. Если $\mathfrak{g}$ — классическая алгебра Ли, то положим $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, где Ω_1 — множество регулярных подалгебр, а также типа $B_k + B_{n-k-1}$ в случае $\mathfrak{g} = D_n$; Ω_2 — множество неприводимых подалгебр, заданных тензорными произведениями матричных алгебр $\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_k(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_k(\mathbb{C})$, причем последние две возможности допускаются только в случаях $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$; Ω_3 — множество неприводимых простых подалгебр, а также G_2 в случае $\mathfrak{g} = D_4$. Если $\mathfrak{g}$ — особая алгебра Ли, то

⁶Когда речь идет о множестве представителей, предполагается, что они представляют различные орбиты.

положим $\Omega = \Omega_4 \cup \Omega_5 \cup \Omega_6$, где Ω_4 — множество максимальных среди полупростых подалгебр $\mathfrak{g}$; Ω_5 — множество максимальных S -подалгебр, в случае $\mathfrak{g} = E_8$ включающее также S -подалгебру $2G_2^1 + A_1^8$; подалгебры $\mathfrak{h} \in \Omega_6$ исчерпываются в списке пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$: (F_4, D_4) , (E_6, D_4) , $(E_7, D_4 + 3A_1)$, $(E_7, 7A_1)$, (E_7, D_4^2) , $(E_8, 2D_4)$, $(E_8, 8A_1)$, $(E_8, 4A_2)$, (E_8, A_1^{40}) .

Теорема 6. Построенные множества $\Omega = \Omega[\mathfrak{g}]$ являются разделяющими.

Комраков [8] построил разделяющие множества, которые совпадают с нашими в случае особых алгебр $\mathfrak{g}$. Подалгебры из этих множеств были названы *почти-примитивными* подалгебрами. Они представляют собой предмаксимальные элементы относительно выбранного выше упорядочения $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$. Однако с практической точки зрения результат Комракова представляется мало полезным, поскольку вопрос (P2) (а также остальные вопросы) оставался незатронутым. Мы решаем задачу (P1) одновременно с (P2). А именно, формула μ в классическом случае приводится для произвольных подалгебр $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, а в особом — только для изотипных подалгебр (табл. 2.4). Этого достаточно, чтобы определить μ на остальных подалгебрах.

Предполагая задачу (P4) решенной, мы сводим (P3) к случаю $R = \text{Aut } \mathfrak{r}$, $G = R(\mathbb{C}) \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ проста. В этом случае задача (P3) фактически решена Карпелевичем [6] для $\mathfrak{h} \in \Omega_1, \Omega_3$; оставшийся классический случай $\mathfrak{h} \in \Omega_2$ оказывается довольно простым. Для особых алгебр $\mathfrak{g}$ задача (P3) решается в случаях $\mathfrak{h} \in \Omega_4, \Omega_5$. Наш метод основан на представлении ν в виде композиции $\nu'' \circ \nu'$, где

$$\nu': \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/G \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G, \quad \nu'': \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/R \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/G \text{ ---}$$

естественные отображения. (Хотя группа G не действует на $\mathfrak{r}$, на $\mathfrak{r}$ определено отношение G -сопряженности.) Таким образом, задача (P3) разбивается на две подзадачи:

(P3') найти представителей классов эквивалентности в слоях отображения ν' ;

(P3'') найти представителей R -орбит слоев отображения ν'' ;

Пусть $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, $\theta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ — некоторая инволюция Картана алгебры $\mathfrak{r}$. Рассмотрим множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ инволюций $\theta' \in \text{Aut } \mathfrak{g}$, внутренне сопряженных θ , таких, что $\theta'(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ и инволюция $\theta'|_{\mathfrak{h}}$ $N_G(\mathfrak{h})$ -сопряжена τ . Пусть τ_i , $i \in I$, — представители всех $N_G(\mathfrak{h})$ -орбит инволюций τ алгебры $\mathfrak{h}$, для которых множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ не пусто. Соответствующие вещественные формы $\mathfrak{h}$ обозначим через $\mathfrak{s}_i$, $i \in I$.

Теорема 7. Подалгебры $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{h}$, $i \in I$, образуют множество представителей в $\mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ классов из слоя $\nu'^{-1}(G\mathfrak{h})$.

Опять же, предположив задачу (P4) решенной, задача (P3') сводится к проблеме определения множеств $\mathcal{E}(\tau, \theta)$. Мы решаем эту проблему для $\mathfrak{h} \in \Omega_4, \Omega_5$ (см. табл. 2.6–2.9). Вопрос (P3'') решается при помощи следующего утверждения.

Теорема 8. Пусть $\mathfrak{s} \in \mathfrak{r}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}(\mathbb{C}) \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, Если $\mathfrak{h}$ максимальна среди полупростых подалгебр либо является S-подалгеброй, то слой $\nu''^{-1}(\mathfrak{s})$ состоит из одной R-орбиты.

В случае S-подалгебры $\mathfrak{h}$, теорема 8 была доказана Карпелевичем [6]. В общем случае им же в основном (с нашими дополнениями) получена

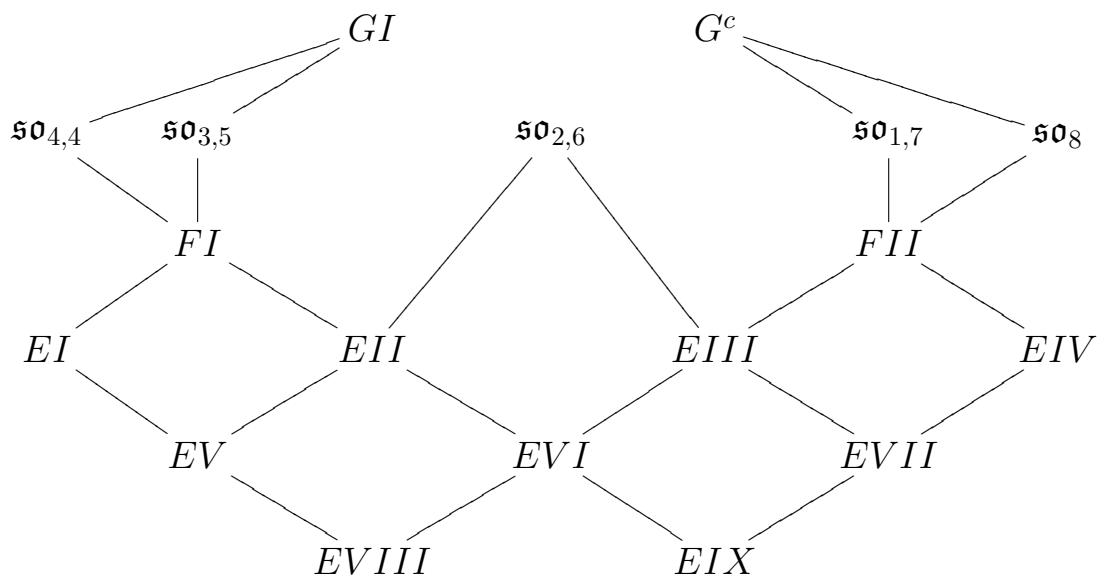
Теорема 9. R-орбиты слоя $\mu''^{-1}(G\mathfrak{s})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с орбитами действия $N_G(\mathfrak{h}) : \mathcal{E}(\tau, \theta)$.

Соответствие, о котором идет речь в теореме 9, указано в тексте работы.

Таким образом, задача классификации решена по модулю (P4) и (P3) для $\mathfrak{h} \in \Omega_6$. В последнем разделе мы изучаем группу автоморфизмов полупростой вещественной алгебры Ли. Это создает почву для последующего решения проблемы (P4).

В заключение приведем одно красивое утверждение, которое может быть доказано методами, изложенными в настоящей работе.

Теорема 10. Имеется следующая диаграмма включений:



При этом любые два включения изоморфных вещественных форм соседних элементов цепочки $G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$ сопряжены.

Некоторые обозначения.

$\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ — алгебра Ли группы Ли G ; в дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать группу G присоединённой;

$\hat{G}$ — односвязная накрывающая связной группы Ли G ;

G° — связная компонента единицы группы G ;

$\text{Aut } \mathfrak{g}$ — группа всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$;

$\text{Int } \mathfrak{g}$ — группа внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$;

$Z_G(\mathfrak{h})$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в группе G ;

$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(H)$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, состоящая из неподвижных векторов относительно присоединённого действия подгруппы $H \subset G$;

$\mathfrak{g}^\sigma$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, централизуемая автоморфизмом $\sigma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$;

$N_G(\mathfrak{h})$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в группе G ;

$\Pi(\mathfrak{g}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — система простых корней простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга n ; нумерация простых корней такая же, как в [3];

$\pi_1, \dots, \pi_n$ — фундаментальные веса, соответствующие $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;

$R(\lambda)$ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ ;

$P \ltimes Q$ — полупрямое произведение групп P и Q , где Q является нормальным сомножителем;

$\mathbb{Z}_n$ — циклическая группа порядка n ;

$\mathbb{S}_n$ — группа всех подстановок на n элементах;

$\mathbb{A}_n$ — группа чётных подстановок на n элементах;

$\mathbb{V}_4$ — группа, изоморфная $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, либо, в качестве подгруппы $\mathbb{S}_4$, четверная группа Клейна;

Id — тождественное преобразование.

$V^* = \text{Hom}(V, A)$ — двойственный модуль A -модуля V (A — кольцо),

$\mathfrak{g}'$ — коммутант алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Глава 1

Классификация в комплексном случае

1.1 Предварительные сведения

1.1.1 Эквивалентность и линейная эквивалентность

Вложения $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, называются *эквивалентными* ($\varphi_1 \sim \varphi_2$), если найдётся такой элемент $\theta \in \text{Int } \mathfrak{g}$, что $\varphi_2 = \theta \circ \varphi_1$. Из классификации вложений нетрудно получить классификацию подалгебр: нужно объединить те классы эквивалентных вложений $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, которые переводятся один в другой внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{h}$ (и рассмотреть их образы в $\mathfrak{g}$). Обратно, имея описание подалгебр и зная, какие их внешние автоморфизмы реализуются в $\mathfrak{g}$, можно получить классификацию вложений.

По аналогии с понятием линейной сопряжённости подалгебр возникает понятие линейной эквивалентности вложений. А именно, вложения $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, линейно эквивалентны ($\varphi_1 \stackrel{L}{\sim} \varphi_2$), если для любого представления $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ соответствующие представления $\rho \circ \varphi_i$, $i = 1, 2$, алгебры $\mathfrak{h}$ изоморфны. Очевидно, что из эквивалентности следует линейная эквивалентность. Связь эквивалентности и линейной эквивалентности описывается следующей теоремой (см. [4, теорема 1.1]).

Теорема 11. *Два вложения $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда их ограничения на картановскую подалгебру алгебры $\mathfrak{h}$ эквивалентны.*

Следствие 1. *Две изоморфные подалгебры $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ алгебры $\mathfrak{g}$ линейно сопряжены тогда и только тогда, когда какие-то их двойственные системы*

простых корней сопряжены в $\mathfrak{g}$ (двойственность будем понимать в смысле формы Картана-Киллинга).

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидным образом следует из теоремы 11. Докажем, что из линейной сопряжённости следует сопряжённость систем дуальных простых корней. Для этого, ввиду теоремы 11, достаточно доказать, что существует такое представление ψ алгебры $\mathfrak{g}$, что линейная эквивалентность произвольной пары вложений $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, определяется эквивалентностью представлений $\psi \circ \varphi_1$ и $\psi \circ \varphi_2$ алгебры $\mathfrak{h}$.

Пусть $\psi_1, \dots, \psi_n$ — представления алгебры $\mathfrak{g}$, старшие веса которых порождают пространство $\mathfrak{t}^*$, где $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$. Известно [4, теорема 1.2], что тогда линейная эквивалентность пары вложений следует уже из их эквивалентности относительно представлений $\psi_1, \dots, \psi_n$.

Пусть $\varphi: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ — произвольное вложение, $\mathcal{M}$ — множество всех неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{h}$ и $z = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ — набор целых положительных чисел. Рассмотрим композицию отображений:

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\beta_z} \mathbb{Z},$$

где $\alpha(x) = (m_1(x), m_2(x), \dots, m_n(x))$ — набор кратностей вхождения представления x в $\psi_i \circ \varphi$, $\beta_z(w) = (z, w)$ — обычное скалярное произведение. Множество $\text{Im } \alpha$ заведомо лежит в некотором ограниченном параллелепипеде (не зависящем от φ), а следовательно, конечно. Значит, существует такая точка $z \in \mathbb{N}^n$, что отображение β_z взаимно однозначно на $\text{Im } \alpha$. Докажем, что тогда соответствующее представление $\psi = \sum_{i=1}^n k_i \psi_i$ — искомое. Действительно, $\beta_z(\alpha(x))$ — кратность вхождения неприводимого представления x в $\psi \circ \varphi$. В силу выбора z , по ней однозначно определяется $\alpha(x)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 1. В работе [4] это следствие (теорема 1.5) формулируется без доказательства, и мы сочли уместным восполнить этот пробел. Отметим также, что существование представления ψ из доказательства следствия было доказано в работе [18], правда, несколько иным способом.

В частности, классы линейной сопряжённости подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ получают-ся объединением классов линейной эквивалентности вложений $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, переводимых друг в друга внешними автоморфизмами алгебры $\mathfrak{h}$. Обратно, классификация вложений очевидным образом получается из классификации подалгебр, если известно, какие внешние автоморфизмы двойственных систем простых корней алгебр $\mathfrak{h}$ реализуются в $\mathfrak{g}$ (или, что то же самое, в группе Вейля алгебры $\mathfrak{g}$).

В данной работе на самом деле решается задача классификации вложений в особые алгебры Ли с точностью до эквивалентности. Как уже отмечалось, это более общая задача, чем её аналог для подалгебр. С помощью теоремы 17, которую мы докажем в главе 4, классификация вложений с точностью до эквивалентности сведётся к их классификации с точностью до линейной эквивалентности. Последняя существенно упрощается с помощью следующего утверждения.¹

Теорема 12. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли и $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, — два вложения. Тогда

1. если $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{so}_{2n}$, то $\varphi_1 \stackrel{L}{\sim} \varphi_2 \iff \pi_1 \circ \varphi_1 \sim \pi_1 \circ \varphi_2$;
2. если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$, то $\varphi_1 \stackrel{L}{\sim} \varphi_2 \iff \pi_k \circ \varphi_1 \sim \pi_k \circ \varphi_2$, $k = 1, n$,

где π_i — фундаментальное представление, отвечающее i -му простому корню.

Замечание 2. Эта теорема в более слабом варианте была сформулирована в [4, теорема 1.3]. Дынкиным было доказано, что для проверки линейной эквивалентности достаточно рассмотреть те наборы представлений алгебры $\mathfrak{g}$, для которых совокупность весов, принадлежащих этажам ширины 1, порождает пространство $\mathfrak{t}^*$. Поэтому для случаев $\mathfrak{g} = E_7, E_8$ одним представлением ограничиться было нельзя: нужно было дополнительно рассматривать представления π_6, π_7 соответственно.² Результат Дынкина усилен в работе [18] с помощью принципиально иных соображений.

Обсудим подробнее задачу классификации вложений $\varphi: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ с точностью до линейной эквивалентности. Она оказывается вполне обозримой. Действительно, если $\mathfrak{g}$ — классическая алгебра Ли, то ответ даётся теоремой 12. Далее, в работе [4] получена классификация максимальных подалгебр особых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ с точностью до сопряжённости, а также найдены ограничения на них простейших ($\pi_{\mathfrak{g}}$) и присоединённых ($\text{ad}_{\mathfrak{g}}$) представлений алгебр $\mathfrak{g}$ (см. [4, табл. 25, 35], [19]; отметим, что ограничения представлений $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ на максимальные регулярные подалгебры могут быть легко получены с помощью метода, изложенного в [2]). Пусть $\varphi(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ — максимальная подалгебра в $\mathfrak{g}$. В силу сказанного, можно свести дело к случаю, когда алгебра $\mathfrak{m}$ является суммой классических.

Напомним простейшие представления особых алгебр Ли:

$$G_2 \subset \mathfrak{so}_7, \quad F_4 \subset \mathfrak{so}_{26}, \quad E_6 \subset \mathfrak{sl}_{27}, \quad E_7 \subset \mathfrak{sp}_{56}, \quad E_8 \subset \mathfrak{so}_{248}.$$

¹В дальнейшем мы будем предполагать, что для алгебры $\mathfrak{so}_{2n}$ выполнено $n \geq 4$.

²Замечание после теоремы 11.2 в работе [4] относится к простым подалгебрам.

Отметим, что $\pi_{E_8} \sim \text{ad}_{E_8}$. Известно, что имеется следующая цепочка включений:

$$G_2 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8, \quad (1.1)$$

и все такие цепочки сопряжены в E_8 . При этом выполнено:

$$\pi_{F_4}|_{G_2} \sim 3\pi_{G_2} + 5N, \quad (1.2)$$

$$\pi_{E_6}|_{F_4} \sim \pi_{F_4} + N, \quad (1.3)$$

$$\pi_{E_7}|_{E_6} \sim \pi_{E_6} + \pi_{E_6}^* + 2N, \quad (1.4)$$

$$\pi_{E_8}|_{E_7} \sim \text{ad}_{E_7} + \pi_{E_7} + 3N, \quad (1.5)$$

где N — тривиальное представление, R^* — представление, сопряжённое R .

Таким образом, проверка линейной эквивалентности вложений в особые алгебры Ли сводится к подсчёту ограничений на них представлений классических алгебр Ли (хотя во многих случаях и этого делать не нужно в силу таблиц из [4], [19]). Более подробное исследование мы делать не будем, поскольку для наших основных целей это не потребуется.

Приведём теперь известные факты, в определённых случаях сводящие классификацию вложений с точностью до эквивалентности к классификации с точностью до линейной эквивалентности. Пусть, как и выше, $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$.

Теорема 13. *Равносильность $\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff \varphi_1 \stackrel{L}{\sim} \varphi_2$ имеет место при выполнении любого из условий:*

1. $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sl}_2$;
2. $\text{Im } \varphi_i$, $i = 1, 2$, — регулярные подалгебры;
3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_n, \mathfrak{so}_{2n+1}, G_2, F_4$.

Прокомментируем утверждения теоремы. Утверждение 1 можно сформулировать так: две $\mathfrak{sl}_2$ -подалгебры сопряжены тогда и только тогда, когда их характеристики сопряжены. Впервые, по-видимому, оно было доказано Мальцевым (см. [10]). Утверждение 2 мы обсудим в следующем пункте. Утверждение 3 в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ есть определение изоморфизма представлений. Доказательство для алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n, \mathfrak{so}_{2n+1}$ приведено в [10] (в последнем случае оно следует из доказанного ещё Фробениусом факта: эквивалентные вполне приводимые ортогональные представления ортогонально эквивалентны). Случай $\mathfrak{g} = G_2$ очевиден в силу пунктов 1, 2. Случай $\mathfrak{g} = F_4$ разобран в работе [18].

Теорема 14. Пусть в предыдущих обозначениях $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$. Тогда

1. если вложения φ_1, φ_2 линейно эквивалентны, но не эквивалентны, то $\varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$, где σ — внешний автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, определённый элементом ортогональной группы O_{2n} ;
2. вложения $\varphi, \sigma \circ \varphi$ линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда представление $\pi_1 \circ \varphi$ алгебры $\mathfrak{h}$ содержит нулевой вес;
3. вложения $\varphi, \sigma \circ \varphi$ эквивалентны тогда и только тогда, когда представление $\pi_1 \circ \varphi$ имеет нечётномерное ортогональное подпредставление.

Пункты 1 и 3 теоремы были доказаны в работе [10], а пункт 2 — в [4, теорема 1.4].

Пример 1. Присоединённые представления алгебр $\mathfrak{sl}_3$ и $\mathfrak{so}_5$ определяют их вложения в алгебры $\mathfrak{so}_8$ и $\mathfrak{so}_{10}$ соответственно. Применяя теорему 14, нетрудно убедиться, что классы линейной эквивалентности этих вложений состоят из двух классов эквивалентных вложений и что это единственные вложения в указанные алгебры с таким свойством. Отметим, что для вложений $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{so}_{2n}$, где $\mathfrak{h}$ есть прямая сумма алгебр, изоморфных $\mathfrak{sl}_2$, понятия эквивалентности и линейной эквивалентности совпадают, так как неприводимое чётномерное представление такой алгебры $\mathfrak{h}$ не может иметь нулевого веса.

Таким образом, остаётся разобраться со случаями $\mathfrak{g} = E_6, E_7$ и E_8 . Соответствующий результат содержится в теореме 17. А именно, перечисляются все случаи, когда класс линейно эквивалентных вложений в $\mathfrak{g}$ нетривиально распадается на классы эквивалентных вложений, а также указано, как именно происходит это распадение. Имеется 3 таких случая для алгебры E_6 , 2 — для E_7 и 10 — для E_8 , причём в каждом из них распадение происходит ровно на два класса эквивалентности. Аналогичное утверждение (следствие 3) доказывается для подалгебр. Отметим, что методы работы с простыми и непростыми полупростыми вложениями существенно различаются. В первом случае мы будем опираться на классификацию Дынкина простых вложений, а во втором — на теоремы 13, 14.

1.1.2 Описание регулярных подалгебр

Редуктивная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *регулярной*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- (1) подалгебра $\mathfrak{h}$ нормализуется некоторым максимальным тором $\mathfrak{t}$ алгебры $\mathfrak{g}$;
- (2) редуктивная подалгебра $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ имеет максимальный ранг.

В частности, если подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ регулярна, то из соотношения $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ следует, что $\mathfrak{t} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{t} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. *Регулярным вложением* называется вложение, образ которого является регулярной подалгеброй. Если заменить в данных определениях алгебры Ли группами Ли, то получим определения регулярной подгруппы и регулярного вложения. Отметим, что подалгебры (подгруппы) максимального ранга регулярны.

Отметим, что из определения следует, что регулярное вложение однозначно с точностью до эквивалентности определяется по своему ограничению на картановскую подалгебру (утверждение 2 теоремы 13)³. Действительно, пусть $\varphi: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ — регулярное вложение и $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ — картановская подалгебра. Выберем максимальный тор $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ ⁴. Сопряжением при помощи элемента из $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ можно добиться выполнения условия $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Тогда отображение φ будет переводить корневые подпространства в корневые подпространства, причём корню $\alpha \in \mathfrak{k}^*$ будет отвечать корень алгебры $\mathfrak{g}$, равный 0 на $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\varphi(\mathfrak{h}))$ и равный $(\varphi^*|_{\varphi(\mathfrak{k})})^{-1}(\alpha)$ на $\varphi(\mathfrak{k})$. Из этого рассуждения и сопряжённости максимальных торов в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\varphi(\mathfrak{k}))$ следует, что линейно эквивалентные регулярные вложения эквивалентны.

Дынкин [4] предложил конструкцию, которая позволяет описать все полупростые регулярные подалгебры данной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Ясно, что достаточно научиться находить максимальные из этих подалгебр. Следовательно, можно считать алгебру $\mathfrak{g}$ простой. Рассмотрим подалгебры, системы простых корней которых получаются вычёркиванием одного элемента либо из расширенной, либо из обычной систем простых корней алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда всякая максимальная регулярная подалгебра в $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из получаемых таким образом. Из этого описания, в частности, следует

Предложение 1. *Всякая собственная регулярная подалгебра имеет нетривиальный централизатор в группе $G = \text{Int } \mathfrak{g}$. Централизатор полупростой максимальной подалгебры максимального ранга имеет простой порядок.*

Следствие 2. *Пусть $R \subset G$ — связная редуктивная подгруппа максимального ранга связной редуктивной группы Ли G и $Z = Z_G(R) = Z(R)$ — её централизатор (он же совпадает с её центром). Тогда $R = Z_G(Z)^\circ$.*

³Это утверждение доказано также в [18]

⁴В дальнейшем, для простоты, мы будем часто опускать обозначение φ , например, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\varphi(\mathfrak{k}))$

Доказательство. Положим $R' = Z_G(Z)^\circ$. Тогда $R \subset R'$ — подгруппа максимального ранга, причём $Z(R) = Z(R')$. Профакторизовав группы R и R' по общему центру, имеем, согласно первой части предложения 1, что полученные факторы совпадают. Но тогда $R = R'$. $\square$

Можно ожидать, что в случае небольших $\text{rk } \mathfrak{g}$ полупростые регулярные подалгебры одного типа сопряжены. Это действительно так: если $\mathfrak{g}$ — одна из особых алгебр Ли, то имеется лишь 6 исключений для $\mathfrak{g} = E_7$ и 5 — для $\mathfrak{g} = E_8$, причём в каждом таком случае множество регулярных подалгебр одного типа содержит ровно два класса сопряжённости. А именно, один из этих классов выделяется тем, что система простых корней некоторого его представителя содержится в A_7 (соотв. в A_8) в случае $\mathfrak{g} = E_7$ (соотв. E_8). Если обозначать регулярные подалгебры так же, как их типы (в дальнейшем мы так и будем делать), то для обозначения этого класса мы будем дополнительно использовать штрих, а для другого класса — два штриха. Например,

$$A_5'' \not\subset A_7 \subset E_7, \quad (2A_3)' \subset A_8 \subset E_8.$$

Отметим ещё одно хорошее свойство регулярных подалгебр. Напомним, что *инволюцией Вейля* редуктивной алгебры Ли называется автоморфизм, действующий умножением на -1 на некотором её максимальном торе. Такие автоморфизмы существуют и все они сопряжены посредством внутренних автоморфизмов.

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{h}$ — регулярная подалгебра редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда существует такая инволюция Вейля θ алгебры $\mathfrak{g}$, что $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ и $\theta|_{\mathfrak{h}}$ есть инволюция Вейля алгебры $\mathfrak{h}$.

Доказательство. В качестве θ надо взять инволюцию, действующую инверсией на торе, нормализующем подалгебру $\mathfrak{h}$. $\square$

Замечание 3. Известно, что для простой алгебры $\mathfrak{g}$ имеем $\theta \notin \text{Int } \mathfrak{g}$ лишь в случаях $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $n \geq 3$, $\mathfrak{so}_{4n+2}$, E_6 .

1.1.3 Полные регулярные подалгебры

Регулярная подалгебра редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *полной*, если она не содержится в качестве собственной подалгебры ни в одной регулярной подалгебре того же ранга. Полные полупростые подалгебры характеризуются тем, что они являются коммутантами централизаторов тором или тем, что их система простых корней может быть дополнена до системы простых корней

алгебры $\mathfrak{g}$. В дальнейшем множество регулярных (соотв. полных регулярных) подалгебр, содержащих данную подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, рассматриваемых с точностью до сопряжённости в $\mathfrak{g}$, мы будем обозначать $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ (соотв. $\tilde{\mathcal{R}}(\mathfrak{h})$). Полные регулярные подалгебры важны для нас по следующей причине:

Предложение 3. Пусть $\mathfrak{h}$ — полупростая подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда

1. найдётся единственная (с точностью до сопряжённости) подалгебра $\tilde{\mathfrak{t}} \in \tilde{\mathcal{R}}(\mathfrak{h})$, такая что

$$\mathrm{rk} \tilde{\mathfrak{t}} = \min_{\mathfrak{l} \in \tilde{\mathcal{R}}(\mathfrak{h})} \mathrm{rk} \mathfrak{l};$$

2. если вложения $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{t}} \subset \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$, эквивалентны в $\mathfrak{g}$, то элемент $\theta \in \mathrm{Int} \mathfrak{g}$ из определения эквивалентности можно выбрать так, что $\theta(\tilde{\mathfrak{t}}) = \tilde{\mathfrak{t}}$.

Доказательство. Выберем максимальный тор $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Тогда в качестве $\tilde{\mathfrak{t}}$ нужно взять коммутант подалгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$. Утверждения предложения следуют из сопряжённости максимальных торов в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$. $\square$

1.1.4 R- и S-подалгебры

Пусть $\mathfrak{h}$ — редуктивная подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $G = \mathrm{Int} \mathfrak{g}$.

Подалгебра $\mathfrak{h}$ называется *R-подалгеброй*, если $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) \neq \{\mathfrak{g}\}$. В противном случае она называется *S-подалгеброй*. Сама алгебра $\mathfrak{g}$ считается своей S-подалгеброй. Ясно, что всякая собственная регулярная подалгебра является R-подалгеброй, а главная 3-мерная подалгебра — S-подалгеброй. Аналогично определяются R- и S-вложения, а также R- и S-подгруппы. Заметим, что S-подалгебра обязательно полупроста (иначе она содержалась бы в централизаторе нетривиального тора). Такие подалгебры могут быть просто охарактеризованы:

Предложение 4. Связная подгруппа $H \subset G = \mathrm{Int} \mathfrak{g}$ является S-подгруппой тогда и только тогда, когда $Z_G(H) = \{e\}$.

Доказательство. Импликация 'тогда' немедленно вытекает из предложения 1. Пусть теперь H — S-подгруппа в G . Возьмём произвольный полупростой элемент $s \in Z_G(H)$. Тогда $Z_G(s)$ является регулярной подгруппой в G , содержащей H . Она совпадает со всей группой G лишь в случае $s = e$. $\square$

Для нас будут представлять интерес также подалгебры, имеющие тривиальные централизаторы в группе $\text{Aut } \mathfrak{g}$. Назовём их *T-подалгебрами*. Легко видеть, что всякая T-подалгебра является S-подалгеброй. Обратное не верно. Например, подалгебра F_4 алгебры E_6 является S-, но не T-подалгеброй. То же можно сказать про диагональное включение $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{h}$.

Предложение 5. Пусть $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$ — эквивалентные вложения полупростых алгебр Ли, являющиеся T-вложениями в $\mathfrak{r}$, и $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{r}, \mathfrak{g}\}$. Тогда элемент $\theta \in \text{Int } \mathfrak{g}$ из определения эквивалентности нормализует $\mathfrak{r}$.

Доказательство. Положим $Z = Z_G(\mathfrak{r}) \simeq \mathbb{Z}_p$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое число (см. предложение 1). Достаточно показать, что $Z_0 \div Z_G(\mathfrak{h}) = Z$ (будем отождествлять подалгебру $\mathfrak{h}$, например, с $\varphi_1(\mathfrak{h})$). Заметим, что группа Z_0 не содержит элементов порядка, отличного от p . Предположим, что порядок группы Z_0 не прост. Тогда найдётся элемент в Z_0 , нормализующий (и даже централизующий) подгруппу Z и не лежащий в ней. Значит он нетривиально действует на подалгебре $\mathfrak{r}$ и централизует подалгебру $\mathfrak{h}$. Получаем противоречие с тем, что $\mathfrak{h}$ является T-подалгеброй. $\square$

В работе [4] классифицированы с точностью до сопряжённости S-подалгебры особых алгебр Ли (но не классифицированы нерегулярные R-подалгебры). S-подалгебры особых алгебр Ли являются аналогами неприводимых подалгебр классических алгебр Ли. Действительно, в случаях $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_n, \mathfrak{so}_{2n+1}$ S-подалгебры — это в точности неприводимые подалгебры. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ класс S-подалгебр несколько шире: в него дополнительно включаются подалгебры, относительно которых основное векторное пространство разлагается в сумму двух неэквивалентных простых нечётномерных невырожденных (в смысле скалярного произведения) подмодулей.⁵ В последнем случае доказательство основано на том, что максимальные регулярные подалгебры в $\mathfrak{so}_{2n}$ — это $\mathfrak{so}_{2k} + \mathfrak{so}_{2(n-k)}$, $k = 2, \dots, n-2$, и $\mathfrak{sl}_n$. Интересно отметить, что всякая R-подалгебра при любом точном представлении алгебры $\mathfrak{g}$ представляется приводимой системой матриц [4, теорема 7.1].

Ясно, что проекции S-подалгебр на идеалы алгебры $\mathfrak{g}$ являются S-подалгебрами последних.

Пример 2. Предположим, что алгебра $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма двух своих изоморфных идеалов: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. Тогда имеется взаимно однозначное соответствие между элементами группы $\text{Aut } \mathfrak{h} / \text{Int } \mathfrak{h}$ и классами сопряжённости S-подалгебр, изоморфных $\mathfrak{h}$. А именно, эти классы могут быть описаны следу-

⁵В [4, теорема 7.2] имеется неточность: не требуется, чтобы подмодули не были изоморфными.

ющими представителями:

$$\mathfrak{h}_i = \{x + \sigma_i(x) : x \in \mathfrak{h}\},$$

где $\sigma_i \in \text{Aut } \mathfrak{h}$ — представители смежных классов $\text{Aut } \mathfrak{h}$ по $\text{Int } \mathfrak{h}$. Ясно, что внешние автоморфизмы подалгебр $\mathfrak{h}_i$ не реализуются в $\mathfrak{g}$. Поэтому, если говорить о вложениях $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, то число их классов эквивалентности равно квадрату числа классов сопряжённости подалгебр в $\mathfrak{g}$, изоморфных $\mathfrak{h}$.

Этот пример может быть очевидным образом обобщён на случай произвольного количества изоморфных идеалов, в сумму которых разлагается алгебра $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{h}$ — максимальная S -подалгебра простой особой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда, согласно результату Дынкина, алгебра $\mathfrak{h}$ изоморфна одной из следующего списка:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = G_2: & \quad \mathfrak{sl}_2; \\ \mathfrak{g} = F_4: & \quad \mathfrak{sl}_2, G_2 + \mathfrak{sl}_2; \\ \mathfrak{g} = E_6: & \quad \mathfrak{sl}_3, G_2, \mathfrak{sp}_8, G_2 + \mathfrak{sl}_3, F_4; \\ \mathfrak{g} = E_7: & \quad \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2 + \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_3, G_2 + \mathfrak{sl}_2, G_2 + \mathfrak{sp}_6, F_4 + \mathfrak{sl}_2; \\ \mathfrak{g} = E_8: & \quad \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{so}_5, \mathfrak{sl}_3 + \mathfrak{sl}_2, G_2 + F_4, \end{aligned}$$

причём изоморфные подалгебры сопряжены, кроме случаев $\mathfrak{sl}_2 \subset E_7, E_8$ (где таких подалгебр соответственно две и три), $A_2, G_2 \subset E_6$, которые не сопряжены своим образам при внешнем автоморфизме E_6 (см. [4, теорема 11.1]).

1.1.5 Одно свойство линейно сопряжённых подалгебр

Пусть $\mathfrak{h}$ — полупростая подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В дальнейшем нам будет удобно использовать обозначение

$$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^L = \bigcup_{\mathfrak{h}' \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{h}} \mathcal{R}(\mathfrak{h}').$$

Корангом подалгебры $\mathfrak{h}$ назовём число $\text{cork } \mathfrak{h} = \text{rk } \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{h}$. Для целого неотрицательного числа d обозначим через $m(d)$ минимальный возможный ранг редуکتивной алгебры Ли размерности d . Имеет место следующее очевидное

Предложение 6. Пусть $d = \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Тогда существует полная регулярная подалгебра, содержащая $\mathfrak{h}$, коранга не менее $m(d)$.

Рассмотрев присоединённое представление алгебры $\mathfrak{g}$, заметим, что централизаторы линейно сопряжённых подалгебр обязаны иметь равные размерности. Отметим в связи с этим

Предложение 7. Пусть s, s' — максимальные возможные коранги подалгебр из $\mathcal{R}(\mathfrak{h})^L$, $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ соответственно, причём $s \leq 2$. Тогда $s' = s$.

Доказательство. Ясно, что $s \geq s'$. Приведём к противоречию ситуацию $s = 2$, $s' = 1$ (остальные случаи очевидны). Если $s' = 1$, то подалгебра $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ изоморфна либо $\mathfrak{sl}_2$, либо T_1 . Но алгебра размерности 3 или 1 не может иметь ранг 2. $\square$

1.2 Классификация простых вложений

Начиная с этого момента мы будем предполагать, что $\mathfrak{g}$ является простой особой алгеброй Ли и $\mathfrak{h}$ — её полупростая подалгебра. Мы получим классификацию простых подалгебр с точностью до сопряжённости, а затем исследуем реализуемость в $\mathfrak{g}$ их внешних автоморфизмов. Тем самым придём к классификации простых вложений.

1.2.1 Идентификация простых подалгебр

Простые подалгебры особых алгебр Ли в работе [4] идентифицируются при помощи своих индексов. В этом пункте мы объясним эти понятия.

Пусть $\varphi: \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — вложение простой алгебры Ли. Рассмотрим инвариантные скалярные произведения $(\cdot, \cdot)$ на алгебрах $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, нормированные так, что наибольшая длина корня равна 2. Положим $(x, y)_1 = (\varphi(x), \varphi(y))$ — новое инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{h}$. Тогда для некоторого целого числа [4] j_φ , называемого *индексом* вложения φ , имеем $(x, y)_1 = j_\varphi(x, y)$.

Ясно, что индекс композиции вложений равен произведению индексов. Кроме того, индекс инвариантен относительно автоморфизмов алгебры $\mathfrak{h}$. Значит, имеет смысл говорить об индексах простых подалгебр.

Пусть вложения $\varphi_i: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, $i = 1, \dots, k$, таковы, что их образы коммутируют. Тогда $j_{\varphi_1 + \dots + \varphi_k} = j_{\varphi_1} + \dots + j_{\varphi_k}$.

Как правило, несопряжённые подалгебры имеют разные индексы. Поэтому разумно задавать простые подалгебры, указывая их индекс сверху, например, $A_1^{28} \subset G_2$. Если индексы подалгебр одинаковы, но они не линейно сопряжены, то дополнительно используются штрихи: $A_2^{6'}$, $A_2^{6''} \subset E_8$.

1.2.2 Результат Дынкина

В этом пункте мы изложим классификацию Дынкина простых подалгебр особых алгебр Ли с точностью до линейной сопряжённости. В силу теоремы 13, нас будут интересовать только нерегулярные подалгебры ранга более 1 алгебр $\mathfrak{g} = E_6, E_7, E_8$. Отметим, что S-подалгебры нам классифицировать не надо, поскольку это сделано Дынкиным; нужно только найти все их реализуемые автоморфизмы.

В [4, таблица 25] для каждой, с точностью до линейной сопряжённости, простой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ указаны ограничения $\pi_1|_{\mathfrak{h}}$ и $\text{ad}|_{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}$ простейшего и присоединённого представлений алгебры $\mathfrak{g}$ (интересно отметить, что по представлению $\text{ad}|_{\mathfrak{h}}$ класс линейной сопряжённости подалгебры $\mathfrak{h}$ идентифицируется однозначно). Кроме того, указан набор $\mathcal{R}(\mathfrak{h})^{LS}$, который называется набором *минимальных объемлющих регулярных подалгебр*. Он состоит из тех регулярных подалгебр, содержащих подалгебры $\mathfrak{h}' \stackrel{L}{\sim} \mathfrak{h}$, в которых $\mathfrak{h}'$ является S-подалгеброй.⁶ Отметим, что классификация с точностью до линейной эквивалентности простых вложений может быть легко получена из классификации Дынкина (теорема 12).

В классификации Дынкина имеется одна существенная для нас неточность: не существует подалгебры $\mathfrak{so}_7 \subset E_8$ с единственной минимальной объемлющей регулярной подалгеброй $2D_4$. Это можно понять, если выписать ограничения присоединённого представления алгебры E_8 на всевозможные подалгебры $\mathfrak{so}_7 \subset 2D_4$; окажется, что каждая из них линейно сопряжена одной из подалгебр $\mathfrak{so}_7 \subset A_6, A'_7$ или $\mathfrak{so}_7 \subset A''_7$. Кроме того, в [4, таблица 25] пропущены подалгебры $\mathfrak{sl}_3$ и $\mathfrak{sl}_5$ алгебры E_8 с единственными минимальными объемлющими регулярными подалгебрами $E_6 + A_2$ и $2A_4$ соответственно (линейная сопряжённость всевозможных S-подалгебр $\mathfrak{sl}_3 \subset E_6 + A_2$ и $\mathfrak{sl}_5 \subset 2A_4$ может быть проверена непосредственно с помощью теоремы 12).

Результат Дынкина (точнее, та его часть, которая нам понадобится) представлен в первых трёх колонках таблиц 1.6, 1.7, 1.8.

1.2.3 Описание таблиц 1.6-1.8

В указанных таблицах содержится классификация с точностью до эквивалентности простых нерегулярных вложений ранга более 1 — результат, к ко-

⁶Термин 'минимальная объемлющая регулярная подалгебра' не надо понимать буквально: например, таковой может являться подалгебра $\mathfrak{t} = A_1 + A_1$ в случае $\mathfrak{g} = F_4$: диагонально вложенная $\mathfrak{sl}_2$ -подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{t}$ регулярна в $\mathfrak{g}$ (её простой корень отвечает короткому корню алгебры $\mathfrak{g}$), но является S-подалгеброй в $\mathfrak{t}$. Впрочем, в случаях $\mathfrak{g} = A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$, таких "сюрпризов" быть не может [4, теорема 2.4]

торому мы придём в данном параграфе. Первые три колонки таблиц содержат аналогичную классификацию с точностью до линейной эквивалентности (результат Дынкина).

В первой колонке указаны, с точностью до линейной сопряжённости, подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, чьи минимальные объемлющие регулярные подалгебры перечислены во второй колонке таблиц. Положим V — простейший модуль алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим $\Gamma(\mathfrak{h})^L$ группу реализуемых в $\mathfrak{gl}(V)$ внешних автоморфизмов подалгебры $R(\pi_1)(\mathfrak{h})$, иначе говоря, группу симметрии схемы представления $R(\pi_1)|_{\mathfrak{h}}$. Знание группы $\Gamma(\mathfrak{h})^L$ позволяет получить классификацию простых вложений с точностью до линейной эквивалентности. Эти группы для алгебр $\mathfrak{h}$, имеющих внешние автоморфизмы, указаны в третьей колонке таблиц.

В четвёртой колонке указано число $n(\mathfrak{h})$ классов сопряжённости, на которые распадается класс линейной сопряжённости подалгебры $\mathfrak{h}$. Если алгебра $\mathfrak{h}$ имеет внешние автоморфизмы, то в пятой колонке указывается группа $\Gamma(\mathfrak{h})$ реализуемых внешних автоморфизмов подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, т.е. образ естественного гомоморфизма

$$N_G(\mathfrak{h}) \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{h} \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{h} / \text{Int } \mathfrak{h}.$$

Очевидно, что $\Gamma(\mathfrak{h}) \subset \Gamma(\mathfrak{h})^L$. В случаях, когда $n(\mathfrak{h}) > 1$, группы $\Gamma(\mathfrak{h})$ для представителей различных классов сопряжённости перечисляются через запятую. Специфика распада соответствующих классов линейной эквивалентности даётся теоремой 17.

1.2.4 Несколько замечаний

В следующих пунктах данного параграфа, опираясь на сведения из первых трёх колонок таблиц 1.6-1.8 и некоторые дополнительные соображения, мы обоснуем результат, представленный в четвёртой и пятой колонках указанных таблиц. Существенную помощь при этом нам окажет таблица 1.5 (см. [19]), в которой значок $\otimes$ понимается как тензорное произведение представлений простых идеалов подалгебры $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$. Из неё, например, следует, что все внешние автоморфизмы подалгебры D_4 реализуются в F_4 (а значит, и в E_6 , E_7 , E_8). Следовательно, все S-подалгебры $\mathfrak{so}_7 \subset D_4$ сопряжены в F_4 (и в E_6 , E_7 , E_8). Действительно, имеется три, с точностью до сопряжённости таких S-подалгебры, заданных представлениями алгебры $\mathfrak{so}_7$: $R(\pi_1) + N$, $R(\pi_3)$, $R(\pi_3)$ — последнее представление определяет вложение, отличающееся от второго внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{so}_8$ (теорема 14). Данные подалгебры переводятся одна в другую посредством внешних автоморфизмов ал-

гебры $\mathfrak{so}_8$. В этом легко убедиться непосредственно, но можно воспользоваться результатами работы [7]: не существует внешнего автоморфизма третьего порядка алгебры $\mathfrak{so}_8$, централизующего подалгебру, изоморфную $\mathfrak{so}_7$.

1.2.5 Случай $\mathfrak{g} = E_6$

В этом пункте мы будем работать с таблицей 1.6. Докажем вначале, что верно содержащее четвёртой колонки.

Классификация подалгебр. Подалгебры под номерами 1-4 являются S-подалгебрами, и их классификация известна. Заметим только [4], что в случаях 1 и 2 подалгебры $\mathfrak{h}$ не сопряжены своим образам при внешнем автоморфизме алгебры $\mathfrak{g}$. Случаи подалгебр с номерами 5-13 очевидны (следуют из понятия S-подалгебры). Случай 14 мы уже разобрали. Подалгебры под номерами 15, 16, 17 рассмотрим отдельно.

Случай 15. В алгебре $\mathfrak{so}_{10}$ имеется две, с точностью до сопряжённости, S-подалгебры $\mathfrak{so}_5$, вложенные посредством присоединённого представления (см. пример 1). Обозначим их $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$. Из таблицы 1.6 следует, что они линейно сопряжены в $\mathfrak{g}$. Если бы они были сопряжены в $\mathfrak{g}$, то в силу предложения 3, они были бы сопряжены с помощью элемента, нормализующего D_5 . Но из таблицы 1.5 видно, что внешний автоморфизм подалгебры D_5 не реализуется в $\mathfrak{g}$. Следовательно, подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ не сопряжены.

Случаи 16, 17. Положим $\mathfrak{r} = 3A_2$ и исследуем S-подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$, изоморфные $\mathfrak{sl}_3$. Перечислим их с точностью до сопряжённости в $\mathfrak{r}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_1 &= \{x + x + x: \quad x \in \mathfrak{sl}_3\}, \\ \mathfrak{h}_2 &= \{x + \sigma(x) + x: \quad x \in \mathfrak{sl}_3\}, \\ \mathfrak{h}_3 &= \{x + x + \sigma(x): \quad x \in \mathfrak{sl}_3\}, \\ \mathfrak{h}_4 &= \{\sigma(x) + x + x: \quad x \in \mathfrak{sl}_3\},\end{aligned}$$

где σ — внешний автоморфизм алгебры $\mathfrak{sl}_3$. Из таблицы 1.5 видно, что перестановки первых двух (соотв. последних двух) простых идеалов подалгебры $\mathfrak{r}$ одновременно с внешним автоморфизмом третьего (соотв. первого) идеала реализуются в $\mathfrak{g}$. Следовательно, подалгебры $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_3$ и $\mathfrak{h}_4$ сопряжены в $\mathfrak{g}$. Значит, имеется не более двух классов сопряжённости, отвечающих перечисленным подалгебрам. С другой стороны, согласно результату Дынкина, их ровно два, поскольку существуют два класса линейной сопряжённости рассматриваемых подалгебр. Для определённости отметим, что случаю 16 отвечает подалгебра $\mathfrak{h}_2$, а случаю 17 — подалгебра $\mathfrak{h}_1$. Осталось доказать, что S-подалгебры $\mathfrak{sl}_3 \subset D_4$ и $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{r}$ сопряжены. Но это следует из предложения 7

и того, что обе S -подалгебры $\mathfrak{sl}_3 \subset D_4$ (они вложены посредством присоединённого представления) сопряжены в $\mathfrak{g}$. Отметим здесь же, что внешние автоморфизмы алгебр $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ реализуются элементами из $N_G(\mathfrak{r})$.

Перейдём теперь к классификации вложений, т.е. проверке последней колонки таблицы 1.6.

Классификация вложений. Во всех случаях, за исключением подалгебр под номером 1, легко проверить, что $\Gamma(\mathfrak{h})^L = \Gamma(\mathfrak{h})$, причём все автоморфизмы реализуются элементами из $N_G(\mathfrak{r})$ для некоторой минимальной объемлющей регулярной подалгебры $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{h}$. Разберём случай 1. Ясно, что достаточно найти группу $\Gamma(\mathfrak{h})$ только для представителя одного из классов сопряжённости (напомним, что последние переводятся один в другой внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$).

Положим $\{e_i, h_i, f_i\}$, $i = 1, \dots, 6$, — стандартные образующие 3-мерных подалгебр, отвечающих простым корням алгебры $\mathfrak{g}$ и $e_{ijk} = [[e_i, e_j], e_k]$, $i, j, k = 1, \dots, 6$. Тогда следующие векторы будут корневыми, отвечающими простым корням x и y S -подалгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_3 \subset \mathfrak{g}$:⁷

$$\begin{aligned} e_x &= \sqrt{2}(e_1 + e_2 + e_4 + e_5) + e_6, \\ f_x &= \sqrt{2}(f_1 + f_2 + f_4 + f_5) + f_6, \\ e_y &= (-1 + i)e_{123} + \sqrt{2}(e_{634} - e_{236}) + (1 + i)e_{345} + ie_{234}, \\ f_y &= (-1 - i)f_{123} + \sqrt{2}(f_{634} - f_{236}) + (1 - i)f_{345} - if_{234}. \end{aligned}$$

Рассмотрим инволюцию θ алгебры $\mathfrak{g}$, определяемую самым длинным элементом её группы Вейля: $\theta(e_i) = -f_{6-i}$, $i = 1, \dots, 5$, $\theta(e_6) = -f_6$. Легко видеть, что тогда $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, $\theta(e_x) = -f_x$, $\theta(e_y) = f_y$. Значит, автоморфизм θ индуцирует внешний автоморфизм подалгебры $\mathfrak{h}$ и $\Gamma(\mathfrak{h}) = \mathbb{Z}_2$.

На этом разбор случая $\mathfrak{g} = E_6$ закончен.

1.2.6 Случай $\mathfrak{g} = E_7$

Классификация подалгебр. Подалгебра под номером 1 таблицы 1.7 является S -подалгеброй, и тут доказывать нечего. Подалгебры под номерами 2-18 линейно сопряжены подалгебрам из E_6 . Случаи 2-12 уже разобраны в предыдущем пункте. Поскольку внешний автоморфизм подалгебры E_6 реализуется в $\mathfrak{g}$ (предложение 2), получаем, что в случаях 13-15 классы линейной сопряжённости не распадаются. В случаях 16, 17 (равно как и 24, 25) четвёртая

⁷В [4, таблица 24] имеется опечатка: коэффициент при f_{234} в формуле для f_y равен $-i$, а не i , что следует из предшествующих (там же) соотношений, или может быть проверено прямым вычислением при помощи приведённых здесь формул.

колонка обосновывается с помощью предложения 7. Линейно сопряжённые подалгебры под номером 18 сопряжены. Это следует из предложения 6: достаточно доказать, что $\dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) > 3$. Но это очевидно, поскольку $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A_4) \supset A_2$. Случаи 19-23 очевидным образом следуют из классификации S-подалгебр классических алгебр Ли.

Случаи 26, 27. В алгебре $\mathfrak{sl}_6 + \mathfrak{sl}_3$ имеются две, с точностью до сопряжённости, S-подалгебры, изоморфные $\mathfrak{sl}_3$ (последняя вкладывается в $\mathfrak{sl}_6$ через симметрический квадрат своего тавтологического представления). Как видно из таблицы 1.7, эти подалгебры не являются линейно сопряжёнными. Поэтому нужно только доказать, что найдутся две регулярные подалгебры $\mathfrak{r}_1 = A_7$, $\mathfrak{r}_2 = A_5 + A_2 \subset \mathfrak{g}$, которые пересекаются по подалгебре, изоморфной $\mathfrak{sl}_3$, являющейся S-подалгеброй в каждой из них. Во всяком случае, они пересекаются по главной 3-мерной подалгебре $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_3$ (теорема 13). Из работы [1] узнаём, что $Z_G(\mathfrak{s}) \simeq SO_3$. Заметим, что $Z_G(\mathfrak{r}_1) \simeq \mathbb{Z}_2$ и $Z_G(\mathfrak{r}_2) \simeq \mathbb{Z}_3$ (см. [7]). Известно, что любые две изоморфные конечные подгруппы в SO_3 сопряжены. Поэтому нас не будет интересовать способ вложения той или иной подгруппы в SO_3 .

Положим $Z = A_4 \subset SO_3$ и докажем, что $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Z) \simeq \mathfrak{sl}_3$. Поскольку подалгебра $\mathfrak{so}_8 \subset \mathfrak{sl}_8$ является централизатором некоторой инволюции алгебры $\mathfrak{sl}_8$, заключаем, что $Z_G(\mathfrak{so}_8) = V_4 \subset Z$ (более формально это будет доказано в примере 11). Имеет место разложение:

$$A_4 = \mathbb{Z}_3 \ltimes V_4.$$

Поэтому на подалгебре $\mathfrak{so}_8 \subset \mathfrak{g}$ возникает (нетривиальная) градуировка периода 3, при этом элементы нулевой степени образуют подалгебру $\mathfrak{so}_8^0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Z)$. Эта градуировка не может быть внутренней, так как можно проверить, что $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{so}_8$ является S-подалгеброй. Значит [7], алгебра $\mathfrak{so}_8^0$ изоморфна либо $\mathfrak{sl}_3$, либо G_2 . Последний случай невозможен: $G_2 \not\subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{Z}_3) = \mathfrak{r}_2$. Значит, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Z) = \mathfrak{sl}_3$ — S-подалгебра в $\mathfrak{so}_8$, а следовательно, и в $\mathfrak{r}_1$. Таким образом, этот случай разобран.

Классификация вложений. Все случаи, за исключением 1 и 22, разбираются тривиально с помощью предложения 2. Найдём группы $\Gamma(\mathfrak{h})$ для подалгебр под вышеуказанными номерами.

Случай 1. Этот случай разбирается аналогично случаю 1, когда $\mathfrak{g} = E_6$. В тех же обозначениях, приведём формулы для корневых векторов S-

подалгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_3 \subset \mathfrak{g}$:⁸

$$\begin{aligned} e_x &= e_2 + \sqrt{6}(e_4 + e_5) + 2(e_6 + e_7), \\ f_x &= f_2 + \sqrt{6}(f_4 + f_5) + 2(f_6 + f_7), \\ e_y &= e_{4357} + \sqrt{6}(e_1 - e_{2347}) + 2(e_{2345} + e_{3456}), \\ f_y &= f_{4357} + \sqrt{6}(f_1 - f_{2347}) + 2(f_{2345} + f_{3456}). \end{aligned}$$

Очевидно, что автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующий самому длинному элементу её группы Вейля реализует внешний автоморфизм подалгебры $\mathfrak{h}$.

Случай 22. Пусть $\mathfrak{s}$ — главная 3-мерная подалгебра алгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_8$. Тогда [1] $Z_G(\mathfrak{s}) \simeq \mathrm{SO}_3$. Нам уже известно, что $Z_G(\mathfrak{h}) = \mathbb{V}_4 \subset \mathrm{SO}_3$. Поскольку в группе SO_3 есть подгруппа, изоморфная $\mathbb{S}_4$, получаем, что найдётся подгруппа $\mathbb{S}_3 \subset \mathrm{SO}_3$, действующая на подалгебре $\mathfrak{h}$. Ясно, что она действует внешними автоморфизмами. Тем самым, результат, представленный в пятой колонке таблицы 1.7 полностью обоснован.

1.2.7 Случай $\mathfrak{g} = E_8$

Докажем результат, представленный в четвёртой и пятой колонках таблицы 1.8.

Классификация подалгебр. Подалгебра под номером 1 является S-подалгеброй, и интереса не представляет. Номерам 2-17 (соотв. 18-24) отвечают подалгебры, линейно сопряжённые подалгебрам в E_6 (соотв. E_7). Случаи 2-13 (соотв. 18-20) разбираются так же, как при $\mathfrak{g} = E_6$ (соотв. $\mathfrak{g} = E_7$). Случаи 14-16 уже разобраны в предыдущем пункте.

Чтобы доказать, что класс линейной сопряжённости в случае 17 не распадается, достаточно доказать, что внешний автоморфизм подалгебры A_2 реализуется в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A_2) = E_6$. Но это очевидно, поскольку он реализуется уже в $G_2 \subset E_6$.

Случаи 21, 22, 36 разбираются с помощью предложения 7, а в случаях 27-35 обоснование четвёртой колонки основано на классификации S-подалгебр и не представляет труда.

Докажем, что линейно сопряжённые подалгебры, отвечающие номеру 37 (38) сопряжены. Для этого достаточно доказать, что внешние автоморфизмы подалгебры D_4 (A_3) реализуются в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A_2) = E_6$ ($\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A_3) = D_5$). Но это нам уже известно (имеется две, с точностью до сопряжённости, подалгебры $A_3 \subset D_5$,

⁸В [4, таблица 24] опять вкралась опечатка: скалярное произведение $(\alpha_7^\vee, h_y)$ равно -1 , а не 1 ; отсюда берётся неточность в формулах для e_y, f_y .

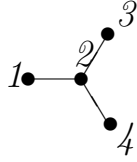


Рис. 1.1: Схема Дынкина D_4

соответствующие представлениям $R(\pi_1) + R(\pi_3) + 2N$ и $R(\pi_2) + 4N$; в обоих случаях внешний автоморфизм реализуется).

Случаи 39, 40 легко разбираются с помощью предложения 5.

Осталось рассмотреть подалгебры под номерами 23-26 и 41-43.

Случаи 24-26. Пользуясь предложением 7 и тем, что все подалгебры $\mathfrak{so}_8 \subset \mathfrak{sl}_8$ сопряжены, приходим к выводу, что любая из подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в рассматриваемых случаях вкладывается в $\mathfrak{r} = 2D_4$. Приведём для удобства схему Дынкина D_4 (рис. 1.1).

Обозначим симметрии схемы с неподвижными вершинами $i, 2$ через σ_i , $i = 1, 3, 4$, а цикл (134) — через θ . Соответствующие автоморфизмы алгебры будем обозначать теми же буквами. В алгебре $\mathfrak{r}$ имеются 6 классов сопряжённости S-подалгебр, изоморфных $\mathfrak{so}_8$, с представителями:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_2 &= \{x + x : x \in \mathfrak{so}_8\}, \\ \mathfrak{h}_i &= \{x + \sigma_i(x) : x \in \mathfrak{so}_8\}, \quad i = 1, 3, 4, \\ \mathfrak{h}_5 &= \{x + \theta(x) : x \in \mathfrak{so}_8\}, \\ \mathfrak{h}_6 &= \{x + \theta^{-1}(x) : x \in \mathfrak{so}_8\}. \end{aligned}$$

С помощью таблицы 1.5 находим, что одновременные внешние автоморфизмы простых идеалов подалгебры $\mathfrak{r}$, а также их перестановка, реализуются в $\mathfrak{g}$. Поэтому подалгебры $\mathfrak{h}_i$, $i = 1, 3, 4$, сопряжены. То же можно сказать и о подалгебрах $\mathfrak{h}_5$, $\mathfrak{h}_6$. Следовательно, имеем не более трёх классов сопряжённости S-подалгебр $\mathfrak{so}_8 \subset \mathfrak{r}$. С другой стороны, из таблицы 1.8 видно, что существует ровно три класса линейной сопряжённости таких подалгебр. Значит, они совпадают с классами сопряжённости. Выписывая ограничения присоединённого представления алгебры $\mathfrak{g}$ на подалгебры $\mathfrak{h}_i$, $i = 1, \dots, 6$, можно убедиться, что подалгебры $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ линейно сопряжены (а значит, сопряжены) подалгебрам в A'_7 , A''_7 соответственно.

Легко видеть, что $\Gamma(\mathfrak{h}_i)^L = \Gamma(\mathfrak{h}_i)$, $i = 1, \dots, 6$, причём соответствующие внешние автоморфизмы реализуются элементами из $N_G(\mathfrak{r})$. Интересно отметить, что отсюда следует (предложение 3: $\tilde{\mathfrak{r}} = E_7$) реализуемость всех внешних автоморфизмов подалгебры под номером 22 таблицы 1.7 в $\mathfrak{g} = E_7$.

Случай 23. Пользуясь предложением 7, получаем, что всякая подалгебра, линейно сопряжённая $\mathfrak{h}$, сопряжена одной из S -подалгебр $\mathfrak{h}_1 \subset A'_7$ или $\mathfrak{h}_2 \subset A''_7$. Из работы [4] узнаём, что подалгебра $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1) \simeq \mathfrak{sl}_3 + \mathfrak{sl}_2$ является (максимальной) S -подалгеброй в $\mathfrak{g}$, чего нельзя сказать о $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_2 + A_1$, которая, очевидно, является R -подалгеброй. Значит, подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ не сопряжены (и, более того, их централизаторы не сопряжены, хотя и изоморфны).

Заметим, что подалгебры $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ вкладываются в подалгебры под номерами соответственно 26 и 24. В частности, они содержатся в $2D_4$.

Случай 41. В обозначениях из разбора случаев 26, 27 для $\mathfrak{g} = E_7$, имеем: $\mathfrak{r}_1 = 2A_4$, $\mathfrak{r}_2 = A_3 + D_5$, $Z_G(\mathfrak{s}) \simeq \mathbb{S}_5$, $Z_G(\mathfrak{r}_1) = \mathbb{Z}_5 \subset \mathbb{S}_5$, $Z_G(\mathfrak{r}_2) = \mathbb{Z}_4 \subset \mathbb{S}_5$. Ввиду того, что все S -подалгебры $\mathfrak{so}_5 \subset \mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{so}_5 \subset \mathfrak{r}_2$ каждом случае сопряжены (в последнем случае это вытекает из предложения 2), достаточно доказать, что найдутся подалгебры, сопряжённые $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$, содержащие общую S -подалгебру, изоморфную $\mathfrak{so}_5$.

Заметим, что в группе $\mathbb{S}_5$ существует подгруппа $\mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_5$ (сомножители порождены циклами (2354) и (12345) соответственно). Это означает, что в алгебре $\mathfrak{g}$ найдутся подалгебры, сопряжённые $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ (будем их обозначать так же: $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$), которые пересекаются по подалгебре $\mathfrak{r}_1^0$, состоящей из элементов нулевой степени относительно некоторой градуировки на $\mathfrak{r}_1$ периода 4. Эта градуировка не внутренняя, потому что $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}_1$ является S -подалгеброй. Тогда ясно, что $\mathfrak{r}_1^0$ и есть искомая подалгебра $\mathfrak{so}_5$.

Случаи 42, 43. В алгебре $\mathfrak{so}_{16}$ имеются ровно две несопряжённые подалгебры, изоморфные $\mathfrak{so}_9$, которые вкладываются в первую через спинорное представление и переводятся одна в другую внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{so}_{16}$. Как видно из таблицы 1.8, эти подалгебры линейно не сопряжены в $\mathfrak{g} = E_8$. Поэтому достаточно рассмотреть только случай 42.

В обозначениях разбора предыдущего случая имеем: $\mathfrak{r}_1 = A_8$, $\mathfrak{r}_2 = D_8$, $Z_G(\mathfrak{s}) \simeq \mathbb{S}_3$, $Z_G(\mathfrak{r}_1) = \mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{S}_3$, $Z_G(\mathfrak{r}_2) = \mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{S}_3$. Из того, что $\mathbb{S}_3 = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}_3$ очевидно следует, что класс линейной сопряжённости подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ не распадается и в этом случае: $\mathfrak{r}_1^0 \simeq \mathfrak{so}_9$.

Классификация вложений. Все ещё не рассмотренные случаи легко разбираются с помощью предложений 2, 5.

На этом классификация простых вложений завершена.

1.3 Инварианты особых алгебр Ли

Пусть $H \subset G$ — редуктивная подгруппа редуктивной группы Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — соответствующее включение алгебр Ли. Рассмотрим присоединённое действие Ad группы G . Соответствующая алгебра инвариантных полиномов обозначается $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$. Алгебра ограничений этих функций на подпространство $\mathfrak{h}$ обозначается $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G$. Её спектр $\mathfrak{h}/G$ совпадает с замыканием множества $\pi_G(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{g}/G$, где $\pi_G: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/G$ — морфизм факторизации. Пусть $\psi: \mathfrak{h}/H \rightarrow \mathfrak{h}/G$ — морфизм, отвечающий включению $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G \subset \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^H$. Известно [18], что морфизм ψ конечен.

Рассмотрим цепочку включений:

$$G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7. \quad (1.6)$$

В работе [18] доказана

Теорема 15. *Следующие условия эквивалентны:*

1. Для любых двух вложений тора $\varphi_i: \mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$, $i = 1, 2$, таких что $\varphi_2 = \text{Ad } g \circ \varphi_1$, $g \in G$, следует $\varphi_2 = \text{Ad } h \circ \varphi_1$, $h \in H$;
2. Для любого полупростого элемента $h \in H$ верно $Gh \cap H = Hh$;
3. Отображение ψ биективно.

В силу (2)–(5) имеем, что условия теоремы 15 выполнены для пар $H = G_2$, $G = F_4$ и $H = F_4$, $G = E_6$. В этом параграфе мы покажем, что эти условия имеют место в случае любого включения $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ из (1.6). При этом в качестве групп выступают $G = \text{Int } \mathfrak{g}$, $H = N_G(\mathfrak{h}) \simeq \text{Aut } \mathfrak{h}$. Отсутствие в (1.6) алгебры E_8 объясняется тем, что для включения $E_7 \subset E_8$ условия теоремы (15) не выполнены: регулярные подалгебры A'_5 и A''_5 в E_7 , получающиеся одна из другой внешним автоморфизмом $D_6 \subset E_7$, линейно не сопряжены в E_7 , но являются таковыми в E_8 (поскольку $D_6 \subset B_6 \subset E_8$).

Теорема 16. *Если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — включение (не обязательно соседних) подалгебр из (1.6), то*

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^H. \quad (1.7)$$

Сведём доказательство к случаю $\mathfrak{h} = E_6$, $\mathfrak{g} = E_7$. Для начала отметим, что достаточно доказать теорему 16 для соседних включений.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{h}_n$ — включения полупростых алгебр Ли. Предположим, что для любой пары соседних включений $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{h}_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-2$, существуют внешние автоморфизмы алгебры $\mathfrak{h}_{i+1}$, централизующие $\mathfrak{h}_i$ и порождающие группу внешних автоморфизмов $\text{Aut } \mathfrak{h}_{i+1} / \text{Int } \mathfrak{h}_{i+1}$ алгебры $\mathfrak{h}_{i+1}$. Тогда из выполнения условия $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_i]^{H_k} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}_i]^{N_{H_k}(\mathfrak{h}_i)}$, $i = k-1 = 1, \dots, n-1$, $H_i = \text{Int } \mathfrak{h}_i$ следует его выполнение уже при любых $i < k$, $i, k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Достаточно доказать лемму в случае $i = 1$, $k = n$. Доказывая утверждение индукцией по k , можно считать, что оно имеет место при $k = n-1$. Докажем его в случае $k = n \geq 3$. Действительно, имеется цепочка равенств: $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_1]^{H_n} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}_n]^{H_n}|_{\mathfrak{h}_1} = (\mathbb{C}[\mathfrak{h}_n]^{H_n}|_{\mathfrak{h}_{n-1}})|_{\mathfrak{h}_1} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}_{n-1}]^{H_n}|_{\mathfrak{h}_1} = (\mathbb{C}[\mathfrak{h}_{n-1}]^{N_{H_n}(\mathfrak{h}_{n-1})})|_{\mathfrak{h}_1} = (\mathbb{C}[\mathfrak{h}_{n-1}]^{H_{n-1}})|_{\mathfrak{h}_1} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}_1]^{H_{n-1}} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}_1]^{N_{H_{n-1}}(\mathfrak{h}_1)}$ — содержит $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_1]^{N_{H_n}(\mathfrak{h}_1)}$. Следовательно, $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_1]^{H_n} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}_1]^{N_{H_n}(\mathfrak{h}_1)}$, что и требовалось. $\square$

Очевидно, лемма 1 будет применима к цепочке (1.6), если мы докажем теорему 16 применительно к соседним включениям из (1.6). Для этого приведём таблицу 1.1 степеней образующих алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ (см., напр., [3, справочный раздел]).

Таблица 1.1: Степени образующих $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$

$\mathfrak{g}$	$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$
G_2	2, 6
D_4	2, 4, 4, 6
F_4	2, 6, 8, 12
E_6	2, 5, 6, 8, 9, 12
E_7	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18

Известно, что если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, то алгебра $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^{\text{Int } \mathfrak{g}}$ порождается функциями $\text{tr } \pi_1(x^k)$, $x \in \mathfrak{g}$, k пробегает множество степеней её минимальной системы образующих (см., напр., [9]). Отсюда и из таблицы 1.1 следует, что теорема 16 верна для включения $G_2 \subset D_4$ (так как $\pi_{D_4}|_{G_2} \sim \pi_{G_2} + N$). Из соотношения (3) вытекает, что она верна и в случае $F_4 \subset E_6$. В случае $D_4 \subset F_4$ надо перейти к максимальным торам (теорема Шевалле) и заметить, что группа Вейля F_4 получается расширением группы Вейля D_4 при помощи группы S_3 . Таким образом, остаётся доказать

Предложение 8. Имеет место равенство $\mathbb{C}[E_6]^{E_7} = \mathbb{C}[E_6]^{\text{Aut } E_6}$.

Для доказательства нам понадобится

Лемма 2. Пусть $A \subset B$ — расширение коммутативных градуированных конечно-порождённых алгебр. Предположим, что в A и B можно так выбрать однородные образующие $f_i \in A$, $g_i \in B$, $i = 1, \dots, n$, что выполнены условия:

1. $\deg f_i = \deg g_i$;
2. система образующих $f_i \in A$ минимальна.

Тогда $A = B$.

Доказательство. Нужно доказать, что $g_i \in A$ для всех $i = 1, \dots, n$. Применим индукцию по степени. Пусть $g_1, \dots, g_{k_1}$ — образующие степени 1 (их может и не быть). Тогда $f_1, \dots, f_{k_1}$ через них линейно выражаются. Если соответствующая матрица вырождена, то получаем противоречие с минимальностью системы образующих алгебры A . Значит, $g_1, \dots, g_{k_1} \in A$. Аналогично осуществляется шаг индукции для степени $d > 1$ с учётом того, что элементы алгебры B степеней меньше d принадлежат алгебре A . $\square$

Доказательство предложения 8. В качестве алгебр A и B из условия леммы возьмём

$$A = \mathbb{C}[E_6]^{E_7}, \quad B = \mathbb{C}[E_6]^{\text{Aut } E_6}.$$

В каждой из них можно выбрать образующие степеней 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18. Действительно, для алгебры A это следует из таблицы 1.1. Докажем это для алгебры B . Пусть $C = \mathbb{C}[E_6]^{\text{Int } E_6} = \mathbb{C}[\chi_2, \chi_5, \chi_6, \chi_8, \chi_9, \chi_{12}]$, где χ_k — инвариант степени k . Тогда элементы $\chi_2, \chi_6, \chi_8, \chi_5^2, \chi_{12}, \chi_5\chi_9, \chi_9^2$ принадлежат алгебре B . На самом деле они её порождают, так как инволюция Вейля алгебры E_6 действует на элементы из C нечётной степени умножением на -1 , и алгебра C свободна.

Для применения леммы нужно только проверить условие минимальности указанной системы порождающих для A . В силу того, что морфизм ψ конечен, $\text{tr. deg } \text{Quot } A = 6$. Поэтому достаточно доказать, что алгебра A не свободно порождена. Из результатов работы [18] следует, что морфизм ψ бирационален (следовательно, является нормализацией), если группы G и H простые и все внешние автоморфизмы подгруппы H реализуются в G . В частности, это выполнено в нашем случае. Если бы алгебра A была свободно порождена, то многообразие $\mathfrak{h}/G$ было бы изоморфно векторному пространству и совпадало со своей нормализацией, что невозможно, так как

алгебра B не свободна (соответствующая "группа Вейля" не порождается отражениями).

Осталось воспользоваться леммой и получить требуемый результат. $\square$

1.4 Классификация полупростых вложений

В этом параграфе мы найдём все классы линейно эквивалентных вложений, которые распадаются на несколько классов эквивалентных вложений. Нам осталось рассмотреть вложения непростых полупростых алгебр Ли $\mathfrak{h}$ в особые алгебры Ли $\mathfrak{g} = E_6, E_7, E_8$.

1.4.1 Характеристики Дынкина 3-мерных подалгебр

Этот пункт является вспомогательным. Мы изложим здесь некоторые результаты работы [4], которые нам пригодятся в этом параграфе.

Характеристикой простой 3-мерной подалгебры $\mathfrak{s} = \langle e, h, f \rangle \subset \mathfrak{g}$ называется элемент h её картановской подалгебры. По теореме 13 подалгебра $\mathfrak{s}$ определяется своей характеристикой однозначно с точностью до сопряжённости. Можно считать вектор h лежащим в некоторой фиксированной камере Вейля. Тогда он задаётся набором неотрицательных целых чисел (отметок) $\alpha_i(h)$, где α_i , $i = 1, \dots, n$ — простые корни алгебры $\mathfrak{g}$. Можно доказать, что эти отметки равны 0, 1 или 2. Например, на характеристике главной 3-мерной подалгебры все простые корни принимают значение 2.

Дынкин нашёл характеристики всех простых 3-мерных подалгебр особых алгебр Ли [4, табл. 16-20]. Из этого, в свою очередь, легко получить список подалгебр $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h)$, где h — характеристика некоторой 3-мерной подалгебры. Система простых корней коммутанта такой подалгебры состоит из тех корней α_i , которые равны 0 на h .

1.4.2 Основная идея

Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ — разложение в сумму ненулевых идеалов и $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$, — картановские подалгебры. В дальнейшем мы будем предполагать, что дано вложение $\varphi: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Нас будет интересовать, насколько однозначно оно определяется по вложению $\varphi|_{\mathfrak{k}}$, а именно, будет ли существовать в классе линейной эквивалентности φ неэквивалентное вложение. Вложения φ ,

класс линейной эквивалентности которых распадается, а также соответствующие подалгебры $\varphi(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$, мы будем называть *интересными*, а в противном случае — *неинтересными*.

Мы будем рассматривать алгебру $\mathfrak{h}$ как подалгебру в $\mathfrak{g}$, имея ввиду вложение φ . Положим $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_i)$, $\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_i)$, $i = 1, 2$. Ясно, что $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{z}_i$ и коммутант подалгебры $\mathfrak{z}_i$ является полной регулярной подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Предположим, что алгебра $\mathfrak{z}_1$ не содержит простых идеалов типа $D_n (n \geq 4)$, E_6 , E_7 . Тогда, по теореме 13, вложение $\varphi|_{\mathfrak{h}_2}: \mathfrak{h}_2 \hookrightarrow \mathfrak{z}_1$ определяется однозначно, с точностью до сопряжения в $\mathfrak{z}_1$, по вложению $\varphi|_{\mathfrak{k}_2}$. Далее, если подалгебра $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{g}$ не содержит простых идеалов перечисленных выше типов, то вложение $\varphi|_{\mathfrak{h}_1}: \mathfrak{h}_1 \hookrightarrow \mathfrak{a}_2$ также определяется однозначно по вложению $\varphi|_{\mathfrak{k}_1}$. Таким образом, получаем, что при сделанных предположениях класс линейной эквивалентности вложения φ совпадает с классом эквивалентности. Докажем, что если не выполнено последнее предположение, то подалгебра $\mathfrak{a}_2$ обязана быть регулярной. Действительно, достаточно рассмотреть только случай $\mathfrak{so}_8 \subset E_8$: в остальных случаях это следует из классификации простых подалгебр. Но из той же классификации (см. [4]) следует, что только в случае нерегулярной подалгебры $\mathfrak{so}_8 \subset E_7 \subset E_8$ имеем $\dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{so}_8) \geq 3$ (номер 24 в таблице 1.8). При этом $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{so}_8) = A_1$, но $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A_1) = E_7 \neq \mathfrak{so}_8$.

Предложение 9. Пусть φ — интересное вложение. Тогда в алгебре $\mathfrak{h}$ найдётся такой собственный идеал $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, что либо подалгебра $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{g}$, либо $\mathfrak{z}_1 \subset \mathfrak{g}$ содержат ровно одну из подалгебр D_4 , D_5 , D_6 , E_6 , E_7 в качестве простого идеала.

Доказательство. Единственное, что осталось доказать после уже проведённого рассуждения — это то, почему в указанном в условии списке отсутствует подалгебра $D_7 \subset \mathfrak{g} = E_8$. Ясно, что она не лежит в централизаторе никакой полупростой подалгебры в $\mathfrak{g}$. Более того, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(D_7) \simeq T_1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(D_7)$ является картановской подалгеброй некоторой простой 3-мерной подалгебры $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$. Из классификации характеристик получаем, что существуют две подалгебры $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ с таким свойством. Приведём вспомогательное утверждение, доказательство которого вытекает непосредственно из определений.

Лемма 3. Для того, чтобы данная неинтересная подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ являлась идеалом некоторой интересной подалгебры в $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись два вложения в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, линейно эквивалентные в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ ($\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$ — картановская подалгебра), не переводимые одно в другое ни одним элементом группы $Z_G(\mathfrak{h})$.

Согласно результату работы [1], $Z_G(\mathfrak{s}_1) = \text{Spin}_{13}$, $Z_G(\mathfrak{s}_2) = \mathbb{Z}_2 \ltimes (G_2 \times G_2)$.

В таком случае подалгебры $\mathfrak{s}_i$, $i = 1, 2$, не могут быть идеалами интересных подалгебр. Действительно, линейно эквивалентные вложения в $\mathfrak{so}_{14}$, лежащие в $\mathfrak{so}_{13}$, линейно эквивалентны и в $\mathfrak{so}_{13}$, чем объясняется первый случай. Во втором случае претендентов на интересные вложения мало, учитывая, что максимальные полупростые подалгебры в G_2 суть A_2 и $A_1 + A_1$. Несложный перебор вариантов доказывает предложение. $\square$

Пользуясь теоремой 14, легко найти все пары линейно эквивалентных, но не эквивалентных вложений в $\mathfrak{so}_8$, $\mathfrak{so}_{10}$, $\mathfrak{so}_{12}$. В первых двух случаях они перечислены в примере 1. В последнем случае имеются ровно две пары таких вложений. Первая пара определяется вложением $ad \otimes N \otimes N + N \otimes T \otimes T$ алгебры $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_3 + \mathfrak{sl}_2 + \mathfrak{sl}_2$, где N , T — соответственно тривиальное и тавтологическое представления алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Вторая пара определяется ограничением указанного вложения на подалгебру, составленную из первых двух идеалов алгебры $\mathfrak{a}$.

Рассмотрим отдельно два случая: случай D (случай E), когда либо $\mathfrak{z}_1$, либо $\mathfrak{a}_2$ содержат в качестве простого идеала одну из подалгебр D_4 , D_5 , D_6 (соотв. E_6 , E_7) алгебры $\mathfrak{g}$. Соответствующие подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ мы будем называть подалгебрами типа D или E.

1.4.3 Случай D

В силу приведённого выше описания линейно эквивалентных, но не эквивалентных вложений в $\mathfrak{so}_8$, $\mathfrak{so}_{10}$, $\mathfrak{so}_{12}$, получаем, что среди простых идеалов алгебры $\mathfrak{h}$ найдётся один типа A_2 или B_2 . Тогда в первом случае его образ при вложении φ содержится в D_4 либо в $D_4 + A_2$, а во втором — в D_5 . Поскольку S-подалгебра $\mathfrak{sl}_3 \subset D_4 + A_2$ (при $\mathfrak{g} = E_8$) имеет 2-мерный тор в качестве централизатора в $\mathfrak{g}$, случай вложения в $D_4 + A_2$ не возможен (напомним, что мы рассматриваем только непростые подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$).

Итак, можно считать, что $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}_3 \subset D_4$ или $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{so}_5 \subset D_5$ (в обоих случаях вложение определяется присоединённым представлением). Нужно найти все пары таких линейно эквивалентных вложений в $\mathfrak{z}_1$, которые не переводятся одно в другое элементом из группы $Z_G(\mathfrak{h}_1)$ (см. лемму 3). Ясно, что сразу можно отбросить варианты тех особых алгебр $\mathfrak{g}$, для которых подалгебра $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{g}$ имеет ранг полупростой части не больше 1.

Случай $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}_3$. Используя классификацию Дынкина простых подалгебр, можно найти размерности подалгебр $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{z}_1$ для каждой особой алгебры $\mathfrak{g}$, после чего эти подалгебры легко угадать. Приведём соответствующую таб-

личку 1.2.⁹

Таблица 1.2: $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}_3$

$\mathfrak{g}$	E_6	E_7	E_8
$\mathfrak{a}_1$	T_2	$3A_1$	D_4
$\mathfrak{z}_1$		$A_5 + T_2$	$E_6 + T_2$

Как из неё видно, случай $\mathfrak{g} = E_6$ невозможен. Пусть $\mathfrak{g} = E_7$. В следующем параграфе мы покажем, что $Z_G(\mathfrak{h}_1) = \mathbb{Z}_3 \ltimes (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)$. Легко понять, что только при $\mathfrak{h}_2 = 2A_1$ и $\mathfrak{h}_2 = 3A_1$ имеем интересные вложения алгебр $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, причём распадение происходит ровно на два класса эквивалентности в каждом случае (они отличаются транспозицией простых идеалов подалгебры $\mathfrak{h}_2$).

Рассмотрим, наконец, случай $\mathfrak{g} = E_8$. В следующем параграфе мы установим, что $Z_G(\mathfrak{h}_1) = \mathbb{Z}_3 \ltimes \mathrm{Spin}_8$. Тогда из теоремы 16 и леммы 3 следует, что всякая интересная подалгебра вида $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ должна удовлетворять условию: вложение $\varphi_2: \mathfrak{h}_2 \hookrightarrow D_4(\sim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(D_4))$ таково, что $\sigma \circ \varphi_2 \not\sim \tau \circ \varphi_2$, где σ — внешняя инволюция алгебры D_4 , а $\tau \in \mathbb{Z}_3 \ltimes \mathrm{Int} D_4$. Такие подалгебры $\mathfrak{h}_2 \subset D_4$ мы будем называть *чётными*. Они характеризуются тем, что никаким внешним автоморфизмом алгебры D_4 не переводятся в подалгебры, действующие на невырожденном нечётномерном подпространстве. Действительно, если алгебра $\mathfrak{h}_2$ нормализует такое подпространство, то $\sigma \circ \varphi_2 \sim \varphi_2$. Обратно, если существует внешний автоморфизм (схема Каца которого имеет индекс 2) алгебры D_4 , централизующий $\mathfrak{h}_2$, то $\mathfrak{h}_2$ лежит в одной из подалгебр (см., напр., [7]) $\mathfrak{so}_7$, $\mathfrak{so}_3 + \mathfrak{so}_5$. Отсюда получаем, что в качестве $\mathfrak{h}_2$ могут выступать только четыре подалгебры: D_4 , $4A_1$, $3A_1$ и $\mathfrak{sl}_3$ (последняя вложена в D_4 через своё присоединённое представление). Соответствующие классы линейной эквивалентности содержат, очевидно, ровно по два класса эквивалентности.

Случай $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{so}_5$. В этом пункте мы будем использовать табличку 1.3.

Таблица 1.3: $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{so}_5$

$\mathfrak{g}$	E_6	E_7	E_8
$\mathfrak{a}_1$	T_1	$A_1 + T_1$	A_3
$\mathfrak{z}_1$			$D_4 + T_4$

⁹Мы не будем заполнять те клетки, из которых не получим полезной информации.

Ясно, что представляет интерес только случай $\mathfrak{g} = E_8$. Отметим, что $Z_G(\mathfrak{h}_1) = \mathrm{SL}_4$. Поскольку в алгебре D_4 инволюция Вейля является внутренним автоморфизмом, получаем, что подалгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_2 = A_3$ либо $\mathfrak{h}_2 = A_2$, и только они являются интересными, содержащими $\mathfrak{h}_1$ в качестве простого идеала. При этом соответствующие классы линейной эквивалентности распадаются на два класса эквивалентных вложений, отличающихся внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{h}$.

Из полученной классификации уже следует, что непростых интересных вложений в E_6 не существует. Следовательно, любые два линейно эквивалентных неэквивалентных вложения в E_6 переводятся одно в другое внешним автоморфизмом алгебры E_6 .

1.4.4 Случай E

Поскольку $Z_{E_7}(E_6) = T_1$, достаточно разобраться со случаями, когда подалгебра $\mathfrak{h}_1$ есть простая 3-мерная подалгебра, централизатор тора которой имеет тип E_6 . Из классификации характеристик находим, что имеется ровно один претендент для $\mathfrak{h}_1$, причём [1] $Z_{E_7}(\mathfrak{h}_1) = F_4$. Таким образом, в случае $\mathfrak{g} = E_7$ интересных подалгебр типа E не существует (теоремы 16, 13).

Таким образом, мы получили классификацию интересных вложений в E_7 . В отличие от случая $\mathfrak{g} = E_6$, здесь не существует простых интересных вложений, но существуют два полупростых.

Рассмотрим теперь алгебру $\mathfrak{g} = E_8$. Все простые 3-мерные подалгебры $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{g}$, централизаторы характеристик h_i которых имеют один из типов (не учитывая центров) E_6 , $E_6 + A_1$, E_7 , перечислены в таблице 1.4 (отметим, что указанная в таблице группа Spin_5 содержится в регулярной подгруппе $\mathrm{SL}_4 \subset G$).

Таблица 1.4: Централизаторы 3-мерных подалгебр и их характеристик

i	1	2	3	4	5
$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h_i)$	$E_7 + T_1$	$E_7 + T_1$	$E_6 + A_1 + T_1$	$E_6 + A_1 + T_1$	$E_6 + T_2$
$Z_G(\mathfrak{s}_i)$	$\widehat{E_7}$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes \widehat{E_6}$	$F_4 \times \mathrm{SL}_2$	$\mathrm{Spin}_5 \times \mathrm{SL}_2$	F_4

По теореме 16 и уже имеющейся классификации интересных вложений в E_6 , E_7 , получаем лишь одну серию интересных подалгебр $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ в $\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{sl}_2$: $\mathfrak{h}_1 = A_1$ ($i = 1$), $\mathfrak{h}_2$ — интересная подалгебра в E_7 .

Осталось рассмотреть случай $\text{rk } \mathfrak{h}_1 = 2$, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_1) = E_6 + T_2$. Можно считать алгебру $\mathfrak{h}_1$ простой, то есть одного из типов A_2 , B_2 , G_2 . Ясно, что главная 3-мерная подалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}_1$ обязана быть представлена в таблице 1.4. Индексы подалгебр $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{g}$, $i = 1, \dots, 5$, равны соответственно 1, 3, 4, 12, 28 (см. [4]), а индексы главных 3-мерных подалгебр $\mathfrak{s}$ могут быть равными $4k$, $10k$, $28k$, $k \in \mathbb{N}$, соответственно в случаях $\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{so}_5$, G_2 . Поэтому нужно рассмотреть лишь случаи, когда $\mathfrak{h}_1$ является подалгеброй $\mathfrak{sl}_3 \subset \mathfrak{g}$ индекса 1 или 3 (индекса 7 быть не может [4]), либо $\mathfrak{h}_1 = G_2 \subset F_4 \subset \mathfrak{g}$. В последнем случае имеем $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A_2) = E_6$; этот случай не представляет интереса по теореме 16 (так как $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(G_2) = F_4$). Пусть теперь $\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{sl}_3$ является подалгеброй индекса 3. Тогда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_1) = E_6$ только если $\mathfrak{h}_1 \subset D_4$ — S-подалгебра, что следует из [4, табл. 25]. Этот случай мы уже рассмотрели выше. Пусть, наконец, $\mathfrak{h}_1 = A_2$. Тогда $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}_1) = E_6$. Следовательно, в этом случае получаем ещё одну серию интересных подалгебр $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$: $\mathfrak{h}_1 = A_2$, $\mathfrak{h}_2 \subset E_6$ — интересная подалгебра в E_6 .

На этом классификация интересных подалгебр особых алгебр Ли завершена.

1.4.5 Основной результат

Подведём итог всем нашим предыдущим рассмотрениям.

Теорема 17. Пусть $\mathfrak{g}$ — особая алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ полупростая алгебра Ли. Тогда класс линейной эквивалентности произвольного вложения $\varphi: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ состоит, как правило, из одного класса эквивалентных вложений. Все исключения перечислены в таблице 1.9.

Поясним обозначения в таблице 1.9: $\varphi^L = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ обозначает множество представителей классов эквивалентных вложений для данного класса линейной эквивалентности вложения $\varphi = \varphi_1$. При описании вложения φ_1 мы указываем регулярную подалгебру $\mathfrak{r}$, относительно которой φ_1 является S-вложением. Исключением из этого являются только случаи $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{sl}_3 \subset E_8$, когда $\mathfrak{h}_0$ является либо интересной подалгеброй в E_6 , либо чётной подалгеброй в D_4 . Произвольный внешний автоморфизм второго порядка алгебры $\mathfrak{r}$ обозначается σ , а алгебры $\mathfrak{h} — \tau$. Остальные обозначения очевидны.

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{h}$ — полупростая подалгебра простой особой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда класс линейной сопряжённости подалгебры $\mathfrak{h}$ совпадает с её классом сопряжённости в случае $\mathfrak{g} = E_7$. В остальных случаях имеются исключения, которые приводятся следующим списком:

- (1) $\mathfrak{g} = E_6$: $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}_3$, G_2 , $\mathfrak{so}_5$ — S-подалгебры соответственно в E_6 , E_6 , D_5 , $\mathfrak{h}_2 = \sigma(\mathfrak{h}_1)$;

(2) $\mathfrak{g} = E_8$: $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}_3$ — S -подалгебра в $E_6 + A_2$, $\mathfrak{h}_2 = (\sigma \times \text{Id})(\mathfrak{h}_1)$.

Здесь $\mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$, обозначают представителей классов сопряжённости одного класса линейной сопряжённости, σ — внешняя инволюция соответствующей простой алгебры Ли.

Замечание 4. Дынкин [4] указал три (из четырёх) случая распадаения классов линейной сопряжённости. А именно, два из них — это S -подалгебры в E_6 , а третий случай — S -подалгебра $\mathfrak{sl}_3 \subset D_4 + D_4 \subset E_8$. Правда, в последнем не было указано, на сколько классов сопряжённости происходит распадение. Согласно следствию 3, этих классов ровно два в каждом таком случае.

1.5 Нормализаторы простых подалгебр

В этом параграфе мы найдём нормализаторы простых подалгебр ранга $\mathfrak{h}$ больше 1 в присоединённых особых группах Ли G , точнее, группы $\Gamma \ltimes Z_G(\mathfrak{h})$, где группы $\Gamma \simeq \Gamma(\mathfrak{h}) \subset \text{Aut } \mathfrak{h} / \text{Int } \mathfrak{h}$ были вычислены нами ранее. В подавляющем большинстве случаев группа реализуемых внешних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{h}$ вкладывается в $N_G(\mathfrak{h})$, т.е. $N_G(\mathfrak{h}) = \Gamma \ltimes (H \cdot Z_G(\mathfrak{h}))$. Вначале мы найдём группы $Z_G(\mathfrak{h})$, а затем определим действие группы Γ на группе $Z_G(\mathfrak{h})$. Тем самым мы найдём группы $\Gamma \ltimes Z_G(\mathfrak{h})$.

Централизаторы простых трёхмерных подалгебр были вычислены Алексеевским [1]. Способ, предложенный в указанной работе, годится и в нашем случае. Мы изложим его в удобной для нас форме.

1.5.1 Результаты Алексеевского

Пусть G — присоединённая полупростая группа Ли, $\mathfrak{h}$ — полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathcal{R}(\mathfrak{h})^S = \{\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_k\}$ — множество регулярных подалгебр, рассматриваемых с точностью до сопряжённости в $\mathfrak{g}$, в которых подалгебра $\mathfrak{h}$ является S -подалгеброй.

Предположим, что для всякой подалгебры $\mathfrak{r}_i \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$, $i = 1, \dots, k$ выполнено условие C : если два вложения $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{r}_i$ эквивалентны в $\mathfrak{g}$, то они переводятся одно в другое с помощью элемента из $N_G(\mathfrak{r}_i)$. Это условие выполнено в случае, когда алгебра $\mathfrak{h}$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2$. Это можно увидеть из классификации Дынкина [4, теоремы 9.2, 9.3] $\mathfrak{sl}_2$ -подалгебр: трёхмерные S -подалгебры одинакового индекса в простых алгебрах Ли сопряжены. Если алгебра $\mathfrak{h}$ простая и $\mathfrak{g}$ — особая алгебра Ли, то условие C также выполнено, за исключением двух случаев. Это следует из классификации простых вложений (для

случаев G_2 и F_4 см. первые две колонки таблиц 1.10, 1.11). Исключительные случаи: $\mathfrak{g} = E_7$ или E_8 , $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_8 \subset A_7 \subset E_7$.

Пусть R_i — связная регулярная подгруппа в G с касательной алгеброй $\mathfrak{r}_i$ и $\bar{R}_i$ — подгруппа максимального ранга с полупростой частью R_i . Рассмотрим множество $\mathcal{D}(\mathfrak{h}) = \{D_1, \dots, D_k\}$, где $D_i = Z(\bar{R}_i)$. Из условия С вытекает, что классы сопряжённости подалгебр $\mathfrak{r}_i \subset \mathfrak{g}$, содержащих $\mathfrak{h}$, взаимно однозначно соответствуют классам сопряжённости подгрупп $D_i \subset Z = Z_G(\mathfrak{h})$. Подгруппы из $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ характеризуются тем, что это максимальные, с точностью до сопряжённости в Z , квазиторы¹⁰ в Z , регулярные в G (т.е. лежащие в некотором максимальном торе группы G). Отметим, что подгруппа в односвязной группе, изоморфная $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, регулярна. Это следует из того, что всякий полупростой элемент односвязной группы имеет связный централизатор (см., напр., [3]).

Полный набор инвариантов редуктивной группы Z таков:

- (1) алгебра Ли $\mathfrak{z}$ группы Z ;
- (2) фундаментальная группа F полупростой части Z^s группы Z° ;
- (3) группа $P = Z^s \cap C^\circ$, где C — центр группы Z ;
- (4) группа компонент $K = Z/Z^\circ$;
- (5) класс расширения ω группы Z° с помощью K .

В большинстве случаев группа F находится с помощью следующего утверждения.

Предложение 10. *Предположим, что ни одна из групп D_i/D_i° не содержит подгруппу вида $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, где p — простой делитель порядка центра группы $\hat{Z}^s$. Тогда, если группа G односвязна, то односвязна и группа Z^s . В любом случае $Z^s \simeq \hat{Z}^s/S$, где группа S изоморфна подгруппе центра односвязной накрывающей $\hat{G}$ группы G .*

В случае, когда группа G односвязна, для большинства подалгебр $\mathfrak{h}$ группа Z^s односвязна, что доказывается применением предложения 10. В остальных случаях группу F можно найти также лишь из описания групп D_i . Для неодносвязной группы G используется метод вложения в меньшую подгруппу. Он состоит в переходе от группы G к подгруппе $Z_G(Y)$, где Y — некоторая подгруппа центра группы Z° . Ясно, что $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y) \supset \mathfrak{h}$. Этот же метод

¹⁰Квазитор — это коммутативная алгебраическая группа, состоящая из полупростых элементов. Такие группы ещё называют диагонализуемыми.

используется при нахождении группы P : в этом случае полагаем $Y = C^\circ$. Всё это мы проиллюстрируем дальнейшими примерами. Полезно также иметь в виду, что коммутанты полных регулярных подгрупп односвязных групп односвязны (см., напр., [3]).

Пусть $\tau: K \rightarrow \text{Aut } Z^\circ / \text{Int } Z^\circ$ — канонический гомоморфизм и K_0 — его ядро. Следующие предложения легко вытекают из характеристики подгрупп $D_i \subset Z$.

Предложение 11. *Группа K_0 тривиальна тогда и только тогда, когда среди групп $D_i \in \mathcal{D}(\mathfrak{h})$ найдётся связная группа максимальной размерности.*

Предложение 12. *Если все группы D_i имеют одинаковую размерность, то $K = K_0$.*

Предложение 13. *Пусть $\pi: Z \rightarrow K$ — естественная проекция. Тогда, если D_i/D_i° — нетривиальная циклическая группа, то $\pi(D_i) \neq 1$. Кроме того, всякий элемент группы K сопряжён в K элементу одной из подгрупп $\pi(D_i)$.*

Класс расширения ω определяется элементом группы $H^2(K, C)$. В случаях $K \neq 1$, $C \neq 1$ группы K довольно маленькие ($\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{V}_4$ и $\mathbb{S}_3$), поэтому группы когомологий легко вычисляются. Они как правило тривиальны. В других случаях можно воспользоваться методом вложения в меньшую подгруппу.

1.5.2 Нахождение групп $N = \Gamma \ltimes Z$

Сделаем несколько замечаний, которые упростят вычисления. Некоторые примеры их применения будут разобраны в конце параграфа.

Как правило, если группа Γ нетривиальна, то она изоморфна $\mathbb{Z}_2$ (исключением может быть только случай алгебры $\mathfrak{h}$ типа D_4). Поэтому фактически нужно найти действие на Z только одного элемента.

Во многих случаях внешний автоморфизм σ подалгебры $\mathfrak{h}$ реализуется при помощи некоторой инволюции Вейля θ алгебры $\mathfrak{g}$, нормализующей некоторую регулярную подалгебру $\mathfrak{r}_1 \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})^S$. Тогда θ будет действовать инверсией на соответствующей группе $D_1 \subset Z$. Если автоморфизм σ реализуется уже в $\mathfrak{r}_1$, то соответствующий элемент группы Γ будет коммутировать с D_1 . С помощью этих соображений зачастую уже можно определить группу N .

Заметим, что если $Z_G(\mathfrak{h}) = Z_L(\mathfrak{h}) \cdot Z_G(L)$ — почти прямое произведение, где $H \subset L \subset G$, и внешние автоморфизмы подалгебры $\mathfrak{h}$ реализуются в $\mathfrak{l}$, то $\Gamma \ltimes Z = (\Gamma \ltimes Z_L(\mathfrak{h})) \cdot Z_G(L)$.

Многое (если не всё) о группе N можно извлечь из группы $Z_0 = Z_G(\mathfrak{h}^\Gamma)$. Это следует из того, что $N \subset Z_0$.

Если регулярная подалгебра минимального ранга $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})^S$ только одна и является полной, что практически всегда выполнено, то элемент $\sigma \in \Gamma$ действует внутренним автоморфизмом на группе Z° тогда и только тогда, когда автоморфизм подалгебры $\mathfrak{h}$, отвечающий σ , реализуется в $\mathfrak{r}$. Это следует из того, что централизатор максимального тора группы Z° есть связанная регулярная подгруппа с касательной алгеброй $\mathfrak{r}$ (если предположения относительно подалгебры $\mathfrak{r}$ не выполнены, то её нужно заменить на $\tilde{\mathfrak{r}}$ из предложения 3).

Отметим, что для некоторых подалгебр $\mathfrak{h}$ (а именно, для $\mathfrak{h} = A_2^1 \subset E_6$, $\mathfrak{h} = D_4^2 \subset E_8$) группа N была фактически найдена нами в параграфе 2.

1.5.3 Описание таблиц 1.10-1.14

В таблицах $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — простая подалгебра особой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Напомним, что в случаях $\mathfrak{g} = G_2, F_4, E_8$ группа $G = \text{Int } \mathfrak{g}$ односвязна, а в случаях $\mathfrak{g} = E_6, E_7$ её фундаментальная группа изоморфна соответственно $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2$.

Обозначения для подалгебр $\mathfrak{h}$ взяты из работы [4] (т.е. указывается тип и индекс, возможно со штрихами). Мы их используем потому, что это согласуется с обозначениями из работы [1]. Таким образом обозначаются подалгебры, рассматриваемые с точностью до линейной сопряжённости. Согласно полученной нами классификации подалгебр с точностью до сопряжённости, для подалгебр, классы линейной сопряжённости которых распадаются, мы указываем соответствующий номер в скобках.

Во второй и третьей колонках приведены наборы $\mathcal{R}(\mathfrak{h})^S$ и $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$. Первые нам известны из полученной классификации простых подалгебр, а центры подалгебр максимального ранга можно взять, например, из работы [1]. В четвёртой колонке мы указываем алгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, а их нетрудно определить, зная их размерности, которые были найдены в [4].

Пятая и шестая колонки содержат основной результат данного параграфа, а именно, в них указаны группы $Z = Z_G(\mathfrak{h})$ и $N = \Gamma \ltimes Z$.

Поясним некоторые обозначения. Запись $(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n)/S$ означает, что прямое произведение групп $G_1, \dots, G_n$ факторизуется по подгруппе, изо-

морфной S и диагонально вложенной в прямое произведение центров этих групп. Во всех случаях, которые нам встретятся, такая подгруппа определена однозначно с точностью до автоморфизма группы $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$. Прямое произведение группы G на себя n раз мы будем записывать как G^n . Запись $G \cdot T$ означает почти прямое произведение полупростой группы G и тора T , в котором $G \cap T = Z(G)$, за исключением случая, рассматриваемого в примере 8 (см. ниже). Запись $G_1 \ltimes G_2$ во всех случаях означает такое полупрямое произведение, что ни один нетривиальный элемент из группы G_1 не централизует группу G_2 . Как правило, с учётом такой оговорки, группа $G_1 \ltimes G_2$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Перечислим исключения:

- (1) $\mathfrak{h} = A_2^1$, $\mathfrak{g} = E_6$, $N = \mathbb{Z}_2 \ltimes ((\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mathbb{Z}_3)$, группа $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ действует перестановкой прямых сомножителей;
- (2) $\mathfrak{h} = A_3^1$, $\mathfrak{g} = E_6$, $N = \mathbb{Z}_2 \ltimes ((\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2) \cdot T_1)$, группа $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ действует перестановкой сомножителей SL_2 ;
- (3) $\mathfrak{h} = A_4^1$, $\mathfrak{g} = E_7$, $N = \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathrm{SL}_3 \cdot T_1)$, нетривиальный элемент группы $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ действует как инволюция Вейля на Z ;

Через $N(T_1)$ обозначена группа, изоморфная нормализатору тора в SL_2 . Группы $\tilde{\mathbb{V}}_4$, $\tilde{\mathbb{A}}_4$, $\tilde{\mathbb{S}}_4$ суть прообразы соответствующих групп при накрытии $\mathrm{SL}_2 \rightarrow \mathrm{SO}_3$.

1.5.4 Примеры нахождения группы $Z = Z_G(\mathfrak{h})$

Пример 3. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{h} = A_2^{3'}$ алгебры $\mathfrak{g} = F_4$. В этом случае $D_1 \simeq \mathbb{V}_4$, $D_2 \simeq \mathbb{Z}_3$ (напомним, что максимальные диагонализуемые подгруппы $D_i \in \mathcal{D}(\mathfrak{h})$ являются характеристиками минимальных объемлющих $\mathfrak{h}$ регулярных подалгебр; для всех регулярных подалгебр они известны). Следовательно, группа Z конечна и содержит, кроме единицы, только элементы порядков 2 и 3 (так как всякая конечная циклическая подгруппа регулярна). Значит, $Z = S_2 \cdot S_3$, где S_p — силовская p -подгруппа, причём $S_2 \simeq \mathbb{Z}_2^k$, $k \geq 2$. В силу односвязности группы G , имеем $S_3 \simeq \mathbb{Z}_3$, иначе группа Z содержала бы регулярную подгруппу вида $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, что неверно. Тогда из того, что все подгруппы в Z , изоморфные $\mathbb{V}_4$, сопряжены, получаем, что их число в S_2 не больше, чем порядок подгруппы S_3 , то есть 3. Значит, $k = 2$. Далее, число силовских 2-подгрупп в Z равно либо 1, либо 3. Докажем, что последний случай невозможен. Предположим противное и рассмотрим естественный гомоморфизм перестановки силовских 2-подгрупп $\varphi: Z \rightarrow \mathbb{S}_3$. Очевидно, что

он сюръективен (иначе его ядро было бы силовой 2-подгруппой, которая не может лежать в нормализаторе другой силовой 2-подгруппы). Значит, $\text{Ker } \varphi \simeq \mathbb{Z}_2$. Отсюда получаем существование элемента шестого порядка в группе Z , чего быть не может. Итак, $Z \simeq \mathbb{Z}_3 \ltimes \mathbb{V}_4 \simeq \mathbb{A}_4$.

Пример 4. Пусть $\mathfrak{g} = F_4$ и $\mathfrak{h} = G_2^1$. Имеем $D_1 \simeq T_1$, $D_2 \simeq \mathbb{V}_4$, $\mathfrak{z} \sim A_1^8$. Найдём группу K . По предложению 11, она действует внешними автоморфизмами на Z° . Но $\text{Aut } \mathfrak{sl}_2 = \text{Int } \mathfrak{sl}_2$, поэтому группа K тривиальна. Следовательно, группа Z связна. Так как в группе SL_2 нет подгруппы, изоморфной $\mathbb{V}_4$, получаем, что $Z \simeq \text{SO}_3$.

Пример 5. Рассмотрим случай $\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{h} = A_2^1 = A_2$, $D_1 \simeq T_4$, $\mathfrak{z} \sim 2A_2^1$ ($\sim$ означает сопряжённость в $\mathfrak{g}$). Из предложения 13 следует, что группа Z связна. Значит, нужно найти только группу F . Согласно предложению 10, она либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}_3$. Докажем от противного, что первый случай невозможен. Заметим, что простые идеалы подалгебры $\mathfrak{z}$ сопряжены $\mathfrak{h}$. Значит, связная регулярная подгруппа в G с алгеброй Ли $3A_2$ односвязна, что противоречит тому, что, как известно, её центр изоморфен $\mathbb{Z}_3$. Значит, $Z \simeq (\text{SL}_3 \times \text{SL}_3)/\mathbb{Z}_3$, где подгруппа $\mathbb{Z}_3 \subset Z(\text{SL}_3) \times Z(\text{SL}_3)$ вложена диагональным образом.

Пример 6. Разберём случай $\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{h} = G_2^1$, $D_1 \simeq T_2$, $\mathfrak{z} \sim A_2^{2''}$. Ясно, что группа Z связна. Найдём её фундаментальную группу F . Если бы она была тривиальна, то подалгебра $G_2^1 + A_2^{2''}$ была бы R-подалгеброй (поскольку имела бы нетривиальный централизатор в G). Но из классификации Дынкина следует, что это S-подалгебра. Значит, $Z \simeq \text{PSL}_3$.

Пример 7. Разберём случай $\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{h} = B_2^1$, $D_1 \simeq T_3$, $\mathfrak{z} \sim B_2^1 + T_1$. По предложениям 11, 12, группа Z связна, а по предложению 10, группа F тривиальна (так как группа $\mathbb{Z}_2 \simeq Z(\text{Sp}_4)$ не вкладывается в группу $\mathbb{Z}_3 \simeq Z(\hat{E}_6)$). Найдём группу P . Применим метод вложения в меньшую подгруппу. Очевидно, что связный центр C° группы Z есть одномерный тор. Далее, $Z_G(D_5^1)$ есть также одномерный тор и, более того, он сопряжён в $\mathfrak{g}$ тору C° , так как $2B_2^1 \subset D_5^1$. Поэтому для подгруппы $\text{Spin}_{10} \subset G$, отвечающей подалгебре $D_5^1 \supset \mathfrak{h}$, имеем $C \cap \text{Spin}_{10} = Z(\text{Spin}_{10})$. Тогда $P = Z(\text{Spin}_{10}) \cap \text{Spin}_5 \simeq \mathbb{Z}_2$. Последний изоморфизм следует, например, из того, что образ группы Spin_5 при каноническом гомоморфизме $\pi: \text{Spin}_{10} \rightarrow \text{SO}_{10}$ изоморфен SO_5 . Итак, получаем $Z \simeq \text{Sp}_4 \cdot T_1 \simeq (\text{Sp}_4 \times T_1)/\mathbb{Z}_2$.

Пример 8. Пусть $\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{h} = A_3^1$. Тогда $D_1 \simeq T_3$, $\mathfrak{z} \sim 2A_1^1 + T_1$. Ясно, что в этом случае группа Z связна, а группа F тривиальна. Осталось найти только группу P . Применим метод вложения в меньшую подгруппу. Как и в предыдущем примере, дело сводится к ситуации $C^\circ = Z_G(D_5^1) \simeq T_1$: так можно сделать, потому что $\mathfrak{r} = A_3 + 2A_1 \subset D_5$. Аналогично получаем $P = Z(\text{Spin}_{10}) \cap \text{Spin}_4$ (подгруппа в Spin_{10} , соответствующая подалгеб-

ре $\mathfrak{sl}_2 + \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{so}_4$, односвязна). Если π — накрытие из предыдущего примера, то $\pi(R) \simeq \mathrm{SO}_6 \times \mathrm{SO}_4 = \pi(\mathrm{Spin}_6) \times \pi(\mathrm{Spin}_4)$. Отсюда легко следует, что $\mathrm{Spin}_6 \cap \mathrm{Spin}_4 = \mathrm{Ker} \pi \simeq \mathbb{Z}_2$. Более того, так как $Z(\mathrm{SO}_4) \neq Z(\mathrm{SO}_{10})$, получаем, что $\mathrm{Ker} \pi = P$. Итак, $Z = (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2) \cdot \mathrm{T}_1 \simeq (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{T}_1)/\mathbb{Z}_2$, где группа $\mathbb{Z}_2$ порождена элементом второго порядка с нетривиальными проекциями на сомножители.

Пример 9. Найдём централизатор в $G = E_7$ подалгебры $\mathfrak{h} = A_2^{3'} \subset \mathfrak{g}$. Имеем $D_1 \simeq \mathrm{T}_3$, $D_2 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathrm{T}_1$, $\mathfrak{z} \sim 3A_1^1$. Согласно предложениям 11, 13, $K_0 = 1$, $K \simeq \mathbb{Z}_3$. При этом ясно, что группа K действует на алгебре $\mathfrak{z}$ циклической перестановкой третьего порядка её простых идеалов. Найдём группу F . Она либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}_2$ (см. предложение 10). Но тривиальной она быть не может, потому что $Z_G(D_4 + 3A_1) \simeq \mathbb{V}_4$ [1]. Значит, $Z = \mathbb{Z}_3 \ltimes ((\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)/\mathbb{Z}_2)$, где $\mathbb{Z}_2$ — диагонально вложенная центральная подгруппа.

Пример 10. Рассмотрим случай $\mathfrak{g} = E_8$, $\mathfrak{h} = B_3^{2'}$, $D_1 \simeq \mathrm{T}_2$, $D_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{T}_1$, $D_3 \simeq \mathbb{V}_4$, $\mathfrak{z} \sim A_1^1 + \mathrm{T}_1$. По предложению 10, $F = 1$. По предложению 11, $K_0 = 1$. Кроме того, группа K содержит инволюцию. Тогда ясно, что $K \simeq \mathbb{Z}_2$ и группа K действует инволюцией на максимальном торе группы Z° (это следует из того, что других внешних автоморфизмов группа Z° не имеет). Чтобы найти группу P , заметим, что $\hat{E}_7 \cap Z_G(E_7) \simeq \mathbb{Z}_2$ ($Z_G(E_7) \simeq \mathrm{SL}_2$). Тор $C^\circ \simeq \mathrm{T}_1$ содержит центр группы E_7 , так как является централизатором в $\hat{E}_7$ полной регулярной подалгебры $A_6 \subset E_7$. Значит, $P \simeq \mathbb{Z}_2$ и $Z \simeq \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathrm{SL}_2 \cdot \mathrm{T}_1) \simeq \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{T}_1)/\mathbb{Z}_2$.

Пример 11. Разберём случай, когда условие C не выполнено, и пользоваться результатами предыдущих пунктов нельзя: $\mathfrak{g} = E_7$, $\mathfrak{h} = D_4^2$, $\mathfrak{r}_1 = A_7$, $D_1 \simeq \mathbb{Z}_2$, $\mathfrak{z} = 0$. В группе Z имеется не более трёх классов сопряжённости подгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}_2$ (потому что имеется ровно три неэквивалентных вложения $\mathfrak{so}_8 \hookrightarrow \mathfrak{sl}_8$). Ввиду того, что все неединичные элементы группы Z суть инволюции, заключаем, что $Z = \mathbb{Z}_2$ либо $Z = \mathbb{V}_4$. Но первый случай невозможен, так как в $\mathfrak{g}$ реализуется внешний автоморфизм подалгебры $\mathfrak{r}_1$, централизующий $\mathfrak{h}$, и $Z_G(\mathfrak{r}_1) \simeq \mathbb{Z}_2$. Значит, $Z = \mathbb{V}_4$.

Разберём второй случай, когда условие C не выполнено. Имеем $\mathfrak{g} = E_8$, $\mathfrak{h} = D_4^{2'}$, $\mathfrak{r}_1 = A_7$, $\mathfrak{r}_2 = 2D_4$, $D_1 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{T}_1$, $D_2 \simeq \mathbb{V}_4$, $\mathfrak{z} \sim A_1^1$. Ясно, что $Z \simeq K_0 \times \mathrm{SL}_2$. Из того, что $Z_G(E_7 + A_1) \simeq \mathbb{Z}_2$ и уже разобранным получаем, что $Z \simeq \mathbb{V}_4 \times \mathrm{SL}_2$.

1.5.5 Примеры нахождения группы $N = \Gamma \ltimes Z_G(\mathfrak{h})$

Пример 12. Докажем, что в случае примера 3 имеем $N \simeq \mathbb{S}_4$. Нетривиальный элемент группы Γ , очевидно, нормализует подгруппу $D_1 \simeq \mathbb{V}_4 \subset Z$, но

не централизует её, так как внешний автоморфизм подалгебры $\mathfrak{h}$ реализуется лишь при помощи внешнего автоморфизма подалгебры $D_4 \subset \mathfrak{g}$ (отметим, что $D_1 = Z(\mathrm{Spin}_8) \subset F_4$). Отсюда уже следует, что $N \simeq \mathbb{S}_4$: всякий элемент группы N , не лежащий в D_1 действует нетривиальной подстановкой на множестве из трёх элементов второго порядка группы D_1 .

Пример 13. Найдём группу N в случае примера 8. В данном случае имеем $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_2$, $Z \simeq (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2) \cdot T_1$. Очевидно, что $Z_G(C^\circ) \sim \mathrm{Spin}_{10} \supset H$. Внешний автоморфизм $\mathfrak{h}$ реализуется в D_5 и при этом переставляет идеалы $\mathfrak{sl}_2$ из $\mathfrak{z}_{D_5}(\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{sl}_2 + \mathfrak{sl}_2$. Итак, $N \simeq (\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)) \cdot T_1$.

Пример 14. Рассмотрим случай $\mathfrak{h} = D_4^2 \subset E_7 = \mathfrak{g}$. Имеем $Z \simeq \mathbb{V}_4$, $\Gamma \simeq \mathbb{S}_3$. Пусть группа Γ порождена автоморфизмами (алгебры $\mathfrak{h}$) третьего порядка τ и второго порядка σ . Можно считать $\mathfrak{h}^\tau = A_2^{3'}$, $\mathfrak{h}^\sigma = B_3^2$. Из таблицы 1.13 узнаём, что $Z_G(\mathfrak{h}^\tau) \simeq \mathbb{A}_4$, $Z_G(\mathfrak{h}^\sigma) \simeq \mathbb{Z}_2 \ltimes T_1 \not\supset \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{V}_4$. Следовательно, ни один элемент из Γ не централизует группу Z . Значит, $N \simeq \mathbb{S}_4$.

1.6 Таблицы

Таблица 1.5: Ограничения простейших представлений

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{r}$	$\pi_1 _{\mathfrak{r}}$
F_4	D_4	$R(\pi_1) + R(\pi_3) + R(\pi_4) + 2N$
E_6	$3A_2$	$R(\pi_1) \otimes R(\pi_1) \otimes N +$ $R(\pi_2) \otimes N \otimes R(\pi_1) + N \otimes R(\pi_2) \otimes R(\pi_2)$
E_6	A_5	$2R(\pi_1) + R(\pi_4)$
E_6	D_5	$R(\pi_1) + R(\pi_5) + N$
E_8	$2A_4$	$\mathrm{ad} + R(\pi_1) \otimes R(\pi_3) + R(\pi_2) \otimes R(\pi_1) +$ $R(\pi_3) \otimes R(\pi_4) + R(\pi_4) \otimes R(\pi_2)$
E_8	$2D_4$	$\mathrm{ad} + R(\pi_1) \otimes R(\pi_1) + R(\pi_3) \otimes R(\pi_3) + R(\pi_4) \otimes R(\pi_4)$

Нерегулярные простые подалгебры ранга более 1
особых алгебр Ли $\mathfrak{g} = E_6, E_7, E_8$.

Таблица 1.6: $\mathfrak{g} = E_6$

N	$\mathfrak{h}$	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^{LS}$	$\Gamma(\mathfrak{h})^L$	$n(\mathfrak{h})$	$\Gamma(\mathfrak{h})$
1	$\mathfrak{sl}_3$	E_6	$\mathbb{Z}_2$	2	$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2$
2	G_2	E_6		2	
3	$\mathfrak{sp}_8$	E_6		1	
4	F_4	E_6		1	
5	$\mathfrak{sl}_3$	$2A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
6	$\mathfrak{sl}_3$	$2A_2$	1	1	1
7	$\mathfrak{sl}_3$	A_5	1	1	1
8	$\mathfrak{so}_5$	A_3		1	
9	$\mathfrak{so}_5$	A_4		1	
10	G_2	D_4		1	
11	$\mathfrak{sl}_4$	A_5	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
12	$\mathfrak{sp}_6$	A_5		1	
13	$\mathfrak{so}_9$	D_5		1	
14	$\mathfrak{so}_7$	D_4		1	
15	$\mathfrak{so}_5$	D_5		2	
16	$\mathfrak{sl}_3$	$D_4, 3A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
17	$\mathfrak{sl}_3$	$3A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$

Таблица 1.7: $\mathfrak{g} = E_7$

N	$\mathfrak{h}$	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^{LS}$	$\Gamma(\mathfrak{h})^L$	$n(\mathfrak{h})$	$\Gamma(\mathfrak{h})$
1	$\mathfrak{sl}_3$	E_7	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
2	$\mathfrak{sl}_3$	$2A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathfrak{sl}_3$	$2A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
4	$\mathfrak{sl}_3$	$D_4, 3A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
5	$\mathfrak{sl}_3$	$3A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
6	$\mathfrak{sl}_3$	A'_5	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
7	$\mathfrak{so}_5$	A_3		1	
8	G_2	D_4		1	

9	$\mathfrak{so}_7$	D_4		1	
10	$\mathfrak{sp}_6$	A'_5		1	
11	$\mathfrak{so}_9$	D_5		1	
12	F_4	E_6		1	
13	$\mathfrak{sl}_3$	E_6	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
14	$\mathfrak{so}_5$	D_5		1	
15	G_2	E_6		1	
16	$\mathfrak{sl}_4$	$A'_5, 2A_3$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
17	$\mathfrak{sp}_8$	E_6, A_7		1	
18	$\mathfrak{so}_5$	$A_4, 2A_3$		1	
19	$\mathfrak{sl}_3$	A''_5	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
20	G_2	A_6		1	
21	$\mathfrak{sp}_6$	A''_5		1	
22	$\mathfrak{so}_8$	A_7	$\mathbb{S}_3$	1	$\mathbb{S}_3$
23	$\mathfrak{so}_{11}$	D_6		1	
24	$\mathfrak{sl}_4$	$A''_5, 2A_3$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
25	$\mathfrak{so}_7$	A_6, A_7		1	
26	$\mathfrak{sl}_3$	$A_7, A_5 + A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
27	$\mathfrak{sl}_3$	$A_5 + A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$

Таблица 1.8: $\mathfrak{g} = E_8$

N	$\mathfrak{h}$	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^{LS}$	$\Gamma(\mathfrak{h})^L$	$n(\mathfrak{h})$	$\Gamma(\mathfrak{h})$
1	$\mathfrak{so}_5$	E_8		1	
2	$\mathfrak{sl}_3$	$D_4, 3A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathfrak{sl}_3$	$3A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
4	$\mathfrak{sl}_3$	A_5	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
5	$\mathfrak{sl}_3$	E_6	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
6	$\mathfrak{so}_5$	A_3		1	
7	$\mathfrak{so}_5$	D_5		1	
8	G_2	D_4		1	
9	G_2	E_6		1	
10	$\mathfrak{so}_7$	D_4		1	
11	$\mathfrak{sp}_6$	A_5		1	
12	$\mathfrak{so}_9$	D_5		1	

13	F_4	E_6		1	
14	$\mathfrak{so}_5$	$A_4, (2A_3)''$		1	
15	$\mathfrak{sl}_4$	$A_5, (2A_3)''$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
16	$\mathfrak{sp}_8$	E_6, A_7''		1	
17	$\mathfrak{sl}_3$	$2A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
18	$\mathfrak{sl}_3$	$A_5 + A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
19	$\mathfrak{sl}_3$	E_7	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
20	$\mathfrak{so}_{11}$	D_6		1	
21	G_2	$A_6, 2D_4$		1	
22	$\mathfrak{so}_7$	$A_6, A_7'', 2D_4$		1	
23	$\mathfrak{sl}_3$	$A_5 + A_2, A_7', A_7'', 2D_4$	$\mathbb{Z}_2$	2	$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2$
24	$\mathfrak{so}_8$	$A_7'', 2D_4$	$\mathbb{S}_3$	1	$\mathbb{S}_3$
25	$\mathfrak{so}_8$	$2D_4$	$\mathbb{S}_3$	1	$\mathbb{S}_3$
26	$\mathfrak{so}_8$	$A_7', 2D_4$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
27	$\mathfrak{so}_5$	$(2A_3)'$		1	
28	$\mathfrak{so}_5$	$A_3 + A_4$		1	
29	$\mathfrak{so}_5$	D_7		1	
30	G_2	D_7		1	
31	$\mathfrak{sl}_4$	D_8	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
32	$\mathfrak{sp}_6$	D_7		1	
33	$\mathfrak{sp}_8$	A_7'		1	
34	$\mathfrak{so}_{13}$	D_7		1	
35	$\mathfrak{so}_{15}$	D_8		1	
36	$\mathfrak{so}_7$	$A_7', 2D_4$		1	
37	$\mathfrak{sl}_3$	$D_4 + A_2, 4A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
38	$\mathfrak{sl}_4$	$(2A_3)'$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
39	$\mathfrak{sl}_3$	$E_6 + A_2$	$\mathbb{Z}_2$	1	1
40	$\mathfrak{sl}_5$	$2A_4$	$\mathbb{Z}_2$	1	$\mathbb{Z}_2$
41	$\mathfrak{so}_5$	$2A_4, A_3 + D_5$		1	
42	$\mathfrak{so}_9$	A_8, D_8		1	
43	$\mathfrak{so}_9$	D_8		1	

Таблица 1.9: Случаи распадений классов эквивалентности вложений в особые алгебры Ли

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	φ^L
E_6	$\mathfrak{sl}_3$	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow E_6, \quad \varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
	G_2	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow E_6, \quad \varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
	$\mathfrak{so}_5$	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow D_5, \quad \varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
E_7	$\mathfrak{sl}_3 + \mathfrak{sl}_2 +$ $+\mathfrak{sl}_2(+\mathfrak{sl}_2)$	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow D_4 + A_1 + A_1(+A_1),$ $\varphi_2 = \sigma \circ \varphi_1$
E_8	$\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{sl}_3$	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow E_6 + A_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \circ (\text{Id} \times \tau),$ $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{so}_5, G_2$
	$\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{sl}_3$	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow D_4 + D_4, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \circ (\text{Id} \times \tau),$ $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{so}_8, \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sl}_2 + \mathfrak{sl}_2 + \mathfrak{sl}_2(+\mathfrak{sl}_2)$
	$\mathfrak{so}_5 + \mathfrak{sl}_4$	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow D_5 + A_3, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \circ (\text{Id} \times \tau)$
	$\mathfrak{sl}_3$	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow E_6 + A_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \circ \tau$
	$\mathfrak{sl}_3$	$\varphi_1: \mathfrak{h} \hookrightarrow D_4 + D_4, \quad \varphi_2 = (\sigma \times \text{Id}) \circ \varphi_1$

Централизаторы простых подалгебр ранга больше 1 в
особых группах Ли.

Таблица 1.10: $G = G_2$

$\mathfrak{h}$	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^S$	$\mathcal{D}(\mathfrak{h})$	$\mathfrak{z}$	Z	N
A_2^1	A_2	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{S}_3$

Таблица 1.11: $G = F_4$

$\mathfrak{h}$	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^S$	$\mathcal{D}(\mathfrak{h})$	$\mathfrak{z}$	Z	N
A_2^1	A_2	T_2	A_2^2	SL_3	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
A_2^2	$\tilde{A}_2$	T_2	A_2^1	SL_3	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{3'}$	$D_4; A_2 + \tilde{A}_2$	$\mathbb{V}_4; \mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{A}_4$	$\mathbb{S}_4$
$A_2^{3''}$	$A_2 + \tilde{A}_2$	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{S}_3$
B_2^1	$B_2; A_3$	$T_2; \mathbb{Z}_2 \times T_1$	$2A_1^1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes (SL_2^2)$	Z
G_2^1	$B_3; D_4$	$T_1; \mathbb{V}_4$	A_1^8	SO_3	Z
A_3^1	A_3	$\mathbb{Z}_2 \times T_1$	A_1^2	$\mathbb{Z}_4 \cdot SL_2$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
B_3^1	$B_3; D_4$	$T_1; \mathbb{V}_4$	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes T_1$	Z
C_3^1	C_3	T_1	A_1^1	SL_2	Z

B_4^1	B_4	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	Z
D_4^1	D_4	$\mathbb{V}_4$	0	$\mathbb{V}_4$	$\mathbb{S}_4$

Таблица 1.12: $G = E_6$

$\mathfrak{h}$	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^S$	$\mathcal{D}(\mathfrak{h})$	$\mathfrak{z}$	Z	N
A_2^1	A_2	T_4	$2A_2^1$	$(\mathrm{SL}_3^2)/\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{2'}$	$2A_2$	T_2	A_2^1	SL_3	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{2''}$	$2A_2$	T_2	G_2^1	G_2	Z
$A_2^{3'}$	$D_4; 3A_2$	$T_2; \mathbb{Z}_3$	T_2	$\mathbb{Z}_3 \ltimes T_2$	$\mathbb{S}_3 \ltimes Z^\circ$
$A_2^{3''}$	$3A_2$	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{S}_3$
A_2^5	A_5	T_1	A_1^1	SL_2	Z
$A_2^9(1)$	E_6	1	0	1	$\mathbb{Z}_2$
$A_2^9(2)$	E_6	1	0	1	$\mathbb{Z}_2$
B_2^1	A_3	T_3	$B_2^1 + T_1$	$\mathrm{Sp}_4 \cdot T_1$	Z
B_2^2	A_4	T_2	$A_1^1 + T_1$	$\mathrm{SL}_2 \cdot T_1$	Z
$B_2^3(1)$	D_5	T_1	T_1	T_1	Z
$B_2^3(2)$	D_5	T_1	T_1	T_1	Z
G_2^1	D_4	T_2	$A_2^{2''}$	PSL_3	Z
$G_2^3(1)$	E_6	1	0	1	Z
$G_2^3(2)$	E_6	1	0	1	Z
A_3^1	A_3	T_3	$2A_1^1 + T_1$	$(\mathrm{SL}_2^2) \cdot T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
A_3^2	A_5	T_1	A_1^1	SL_2	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
B_3^1	D_4	T_2	$A_1^2 + T_1$	$\mathrm{SL}_2 \cdot T_1$	Z
C_3^1	A_5	T_1	A_1^1	SL_2	Z
A_4^1	A_4	T_2	$A_1^1 + T_1$	$\mathrm{SL}_2 \cdot T_1$	Z
B_4^1	D_5	T_1	T_1	T_1	Z
C_4^1	E_6	1	0	1	Z
D_4^1	D_4	T_2	T_2	T_2	$\mathbb{S}_3 \ltimes Z$
F_4^1	E_6	1	0	1	Z
A_5^1	A_5	T_1	A_1^1	SL_2	Z
D_5^1	D_5	T_1	T_1	T_1	Z

Таблица 1.13: $G = E_7$

$\mathfrak{h}$	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^S$	$\mathcal{D}(\mathfrak{h})$	$\mathfrak{z}$	Z	N
A_2^1	A_2	T_5	A_5''	$SL_6/\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{2'}$	$2A_2$	T_3	$A_2^1 + A_1^{3''}$	$SL_3 \times SO_3$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{2''}$	$2A_2$	T_3	$G_2^1 + T_1$	$G_2 \times T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{3'}$	$D_4; 3A_2$	$T_3; \mathbb{Z}_3 \times T_1$	$3A_1^1$	$\mathbb{Z}_3 \ltimes ((SL_2^3)/\mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{S}_3 \ltimes Z^\circ$
$A_2^{3''}$	$3A_2$	$\mathbb{Z}_3 \times T_1$	$A_1^{3''}$	$\mathbb{Z}_3 \times SO_3$	$\mathbb{S}_3 \times Z^\circ$
$A_2^{5'}$	A_5'	T_2	$A_1^1 + T_1$	$SL_2 \times T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{5''}$	A_5''	T_2	A_2^1	SL_3	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{6'}$	$A_5 + A_2;$ A_7	$\mathbb{Z}_3;$ $\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{A}_4$	$\mathbb{S}_4$
$A_2^{6''}$	$A_5 + A_2$	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{S}_3$
A_2^9	E_6	T_1	T_1	T_1	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
A_2^{21}	E_7	1	0	1	$\mathbb{Z}_2$
B_2^1	A_3	T_4	$B_3^1 + A_1^1$	$(Spin_7 \times SL_2)/\mathbb{Z}_2$	Z
B_2^2	$A_4; 2A_3$	$T_3; \mathbb{Z}_2 \times T_1$	$A_2^1 + T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes (SL_3 \cdot T_1)$	Z
B_2^3	D_5	T_2	$A_1^1 + T_1$	$SL_2 \cdot T_1$	Z
G_2^1	D_4	T_3	$C_3^{1''}$	PSp_6	Z
G_2^2	A_6	T_1	A_1^7	SO_3	Z
G_2^3	E_6	T_1	T_1	T_1	Z
A_3^1	A_3	T_4	$A_3^1 + A_1^1$	$(SL_4 \times SL_2)/\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_3^{2'}$	$A_5'; 2A_3$	$T_2; \mathbb{Z}_2 \times T_1$	$A_1^1 + T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes (SL_2 \times T_1)$	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
$A_3^{2''}$	$A_5''; 2A_3$	$T_2; \mathbb{Z}_2 \times T_1$	A_2^1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes SL_3$	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
B_3^1	D_4	T_3	$B_2^1 + A_1^1$	$(Sp_4 \times SL_2)/\mathbb{Z}_2$	Z
B_3^2	$A_6; A_7$	$T_1; \mathbb{Z}_2$	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes T_1$	Z
$C_3^{1'}$	A_5'	T_2	$A_1^1 + A_1^{3''}$	$SL_2 \times SO_3$	Z
$C_3^{1''}$	A_5''	T_2	G_2^1	G_2	Z
A_4^1	A_4	T_3	$A_2^1 + T_1$	$SL_3 \cdot T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
B_4^1	D_5	T_2	$A_1^1 + A_1^2$	$(SL_2^2)/\mathbb{Z}_2$	Z
C_4^1	$E_6; A_7$	$T_1; \mathbb{Z}_2$	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes T_1$	Z
D_4^1	D_4	T_3	$3A_1^1$	$(SL_2^3)/\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{S}_3 \ltimes Z$
D_4^2	A_7	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{V}_4$	$\mathbb{S}_4$
F_4^1	E_6	T_1	$A_1^{3''}$	SO_3	Z
$A_5^{1'}$	A_5'	T_2	$A_1^1 + T_1$	$SL_2 \times T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_5^{1''}$	A_5''	T_2	A_2^1	SL_3	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
B_5^1	D_6	T_1	A_1^1	SL_2	Z

D_5^1	D_5	T_2	$A_1^1 + T_1$	$SL_2 \cdot T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
A_6^1	A_6	T_1	T_1	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
D_6^1	D_6	T_1	A_1^1	SL_2	Z
E_6^1	E_6	T_1	T_1	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
A_7^1	A_7	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{V}_4$

Таблица 1.14: $G = E_8$

$\mathfrak{h}$	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})^S$	$\mathcal{D}(\mathfrak{h})$	$\mathfrak{z}$	Z	N
A_2^1	A_2	T_6	E_6^1	$\hat{E}_6$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
A_2^2	$2A_2$	T_4	$G_2^1 + A_2^1$	$G_2 \times SL_3$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{3'}$	$D_4; 3A_2$	$T_4; \mathbb{Z}_3 \times T_2$	D_4^1	$\mathbb{Z}_3 \ltimes Spin_8$	$\mathbb{S}_3 \ltimes Z^\circ$
$A_2^{3''}$	$3A_2$	$\mathbb{Z}_3 \times T_2$	G_2^1	$\mathbb{Z}_3 \times G_2$	$\mathbb{S}_3 \times Z^\circ$
A_2^4	$D_4 + A_2;$ $4A_2$	$T_2;$ $\mathbb{Z}_3^3$	T_2	$\mathbb{Z}_3 \ltimes T_2$	$\mathbb{S}_3 \ltimes Z^\circ$
A_2^5	A_5	T_3	$A_2^1 + A_1^1$	$SL_3 \times SL_2$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{6'}(1)$	$A_5 + A_2;$ $A_7''; 2D_4$	$\mathbb{Z}_3 \times T_1;$ $\mathbb{Z}_2 \times T_1; \mathbb{V}_4$	A_1^1	$\tilde{A}_4 \cdot SL_2$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_2^{6'}(2)$	$A_7'; 2D_4$	$T_1; \mathbb{V}_4$	A_1^{16}	SO_3	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
$A_2^{6''}$	$A_5 + A_2$	$\mathbb{Z}_3 \times T_1$	A_1^1	$\mathbb{Z}_3 \times SL_2$	$\mathbb{S}_3 \times Z^\circ$
A_2^9	E_6	T_2	A_2^1	SL_3	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
A_2^{10}	$E_6 + A_2$	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_3$	Z
A_2^{21}	E_7	T_1	A_1^1	SL_2	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
B_2^1	A_3	T_5	B_5^1	$Spin_{11}$	Z
$B_2^{2'}$	$A_4; (2A_3)''$	$T_4; \mathbb{Z}_2 \times T_2$	A_4	$\mathbb{Z}_2 \ltimes SL_5$	Z
$B_2^{2''}$	$(2A_3)'$	T_2	$B_2^{2''}$	Sp_4	Z
$B_2^{3'}$	D_5	T_3	A_3	SL_4	Z
$B_2^{3''}$	$A_4 + A_3$	T_1	$A_1^{10''}$	SL_2	Z
B_2^4	$2A_4;$ $D_5 + A_3$	$\mathbb{Z}_5;$ $\mathbb{Z}_4$	0	$\mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_5$	Z
B_2^7	D_7	T_1	T_1	T_1	Z
B_2^{12}	E_8	1	0	1	Z
G_2^1	D_4	T_4	F_4^1	F_4	Z
G_2^2	$A_6; 2D_4$	$T_2; \mathbb{V}_4$	$A_1^1 + A_1^7$	$SL_2 \times SO_3$	Z
G_2^3	E_6	T_2	A_2^1	SL_3	Z

G_2^4	D_7	T_1	T_1	T_1	Z
A_3^1	A_3	T_5	D_5^1	Spin_{10}	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_3^{2'}$	$A_5; (2A_3)''$	$T_3; \mathbb{Z}_2 \times T_2$	$A_2^1 + A_1^1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes (\text{SL}_3 \times \text{SL}_2)$	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
$A_3^{2''}$	$(2A_3)'$	T_2	$A_1^{4''} + T_1$	$\text{SL}_2 \cdot T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
A_3^4	D_8	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{V}_4$
B_3^1	D_4	T_4	B_4^1	Spin_9	Z
$B_3^{2'}$	$A_6; A_7'';$ $2D_4$	$T_2; \mathbb{Z}_2 \times T_1;$ $\mathbb{V}_4$	$A_1^1 + T_1$	$N(T_1) \cdot \text{SL}_2$ $\times \text{SL}_2$	Z
$B_3^{2''}$	$A_7'; 2D_4$	$T_1; \mathbb{V}_4$	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes T_1$	Z
C_3^1	A_5	T_3	$G_2^1 + A_1^1$	$G_2 \times \text{SL}_2$	Z
C_3^2	D_7	T_1	T_1	T_1	Z
A_4^1	A_4	T_4	A_4^1	SL_5	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
A_4^2	$2A_4$	$\mathbb{Z}_5$	0	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
B_4^1	D_5	T_3	B_3^1	Spin_7	Z
$B_4^{2'}$	$A_8; D_8$	$\mathbb{Z}_3; \mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{S}_3$	Z
$B_4^{2''}$	D_8	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	Z
$C_4^{1'}$	$E_6; A_7''$	$T_2; \mathbb{Z}_2 \times T_1$	A_2^1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes \text{SL}_3$	Z
$C_4^{1''}$	A_7'	T_1	$A_1^{4'}$	SL_2	Z
D_4^1	D_4	T_4	D_4^1	Spin_8	$\mathbb{S}_3 \ltimes Z$
$D_4^{2'}$	$A_7''; 2D_4$	$\mathbb{Z}_2 \times T_1; \mathbb{V}_4$	A_1^1	$\tilde{\mathbb{V}}_4 \cdot \text{SL}_2$	$\mathbb{S}_3 \ltimes Z$
$D_4^{2''}$	$2D_4$	$\mathbb{V}_4$	0	$\mathbb{V}_4$	$\mathbb{S}_4$
$D_4^{2'''}$	$A_7'; 2D_4$	$T_1; \mathbb{V}_4$	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes T_1$	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
F_4^1	E_6	T_2	G_2^1	G_2	Z
A_5^1	A_5	T_3	$A_2^1 + A_1^1$	$\text{SL}_3 \times \text{SL}_2$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
B_5^1	D_6	T_2	B_2^1	Sp_4	Z
D_5^1	D_5	T_3	A_3^1	SL_4	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
A_6^1	A_6	T_2	$A_1^1 + T_1$	$\text{SL}_2 \cdot T_1$	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
B_6^1	D_7	T_1	A_1^2	SL_2	Z
D_6^1	D_6	T_2	$2A_1^1$	SL_2^2	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
E_6^1	E_6	T_2	A_2^1	SL_3	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
$A_7^{1'}$	A_7''	$\mathbb{Z}_4 \cdot T_1$	A_1^1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes \text{SL}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times Z$
$A_7^{1''}$	A_7'	T_1	T_1	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
B_7^1	D_8	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	Z
D_7^1	D_7	T_1	T_1	T_1	$\mathbb{Z}_2 \ltimes Z$
E_7^1	E_7	T_1	A_1^1	SL_2	Z

A_8^1	A_8	$\mathbb{Z}_3$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{S}_3$
D_8^1	D_8	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	Z

Глава 2

Классификация в вещественном случае

2.1 Предварительные замечания

В этом пункте мы изложим некоторые факты теории вещественных полупростых групп и алгебр Ли (см. [6]). Пусть $\mathfrak{r}$ – полупростая вещественная алгебра Ли с инвариантным невырожденным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $\mathfrak{k}$ – некоторая ее максимальная компактная подалгебра.

Теорема 18. Пусть $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}$ – произвольная максимальная компактная подалгебра, $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$. Тогда $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.

Теорема 18 означает, что линейное преобразование θ , $\theta|_{\mathfrak{k}} = \text{Id}$, $\theta|_{\mathfrak{p}} = -\text{Id}$, вещественного пространства $\mathfrak{r}$ является (инволютивным) автоморфизмом. Он называется *инволюцией Картана*, а разложение $\mathfrak{r} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ – *разложением Картана* алгебры $\mathfrak{r}$. Независимость такого определения от $\mathfrak{k}$ объясняется следующим фактом.

Теорема 19. Пусть $\mathfrak{r} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{p}_2$ – два разложения Картана. Тогда существует внутренний автоморфизм $\alpha \in \text{Int } \mathfrak{r}$ со свойствами:

- (1) $\alpha(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2$;
- (2) $\alpha(\xi) = \xi$, если $\xi \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \cup \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$.

В частности, все максимальные компактные подалгебры (значит, и разложения Картана) алгебры $\mathfrak{r}$ сопряжены.

Всякая простая вещественная алгебра Ли является либо вещественной формой простой комплексной алгебры Ли, либо сама обладает комплексной структурой. Классификация вещественных форм полупростых комплексных алгебр Ли может быть получена при помощи следующей теоремы. Два элемента группы Ли G назовем *внутренне сопряженными*, если они сопряжены элементом из связной компоненты G° .

Теорема 20. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая комплексная алгебра Ли. Ее вещественные формы, с точностью до изоморфизма, находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности инволюций (включая тривиальную) в группе $\text{Aut } \mathfrak{g}$, а классы сопряженности вещественных форм – с классами внутренней сопряженности инволюций.

Поясним, как именно устанавливаются соответствия из теоремы 20. Всякой вещественной форме $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ ставится в соответствие ее инволюция Картана, которая естественным образом продолжается до инволюции алгебры $\mathfrak{g}$. Обратно, для всякой инволюции $\theta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ существует инвариантная компактная форма $\mathfrak{u}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{r} = \mathfrak{u}^+ + i\mathfrak{u}^-$, где $\mathfrak{u}^\pm$ – собственное подпространство, отвечающее собственному значению ± 1 оператора $\theta|_{\mathfrak{u}}$. Тогда $\mathfrak{r}$ – вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ с инволюцией Картана θ .

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то она обладает изоморфными несопряженными вещественными формами только в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{4n}$, $n \geq 2$. При $n > 2$ имеются две, с точностью до сопряженности, формы, изоморфные $\mathfrak{u}_{2n}^*(\mathbb{H})$; при $n = 2$ их три, как и форм, изоморфных $\mathfrak{so}_{1,7}$, $\mathfrak{so}_{3,5}$.

Пусть теперь $\mathfrak{h}$ – полупростая подалгебра полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$ – некоторая ее вещественная форма с инволюцией Картана τ , $\mathfrak{r}$ – вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ с инволюцией Картана θ . Если пара $(\mathfrak{r}, \mathfrak{s})$ является вещественной формой пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, то инволюция τ продолжается до некоторой инволюции Картана алгебры $\mathfrak{r}$, сопряженной θ . В некотором смысле верно и обратное. А именно, положим $G = \text{Int } \mathfrak{g}$,

$$\mathcal{E}(\tau, \theta) = \{\omega \in \text{Aut } \mathfrak{g}: \omega \underset{G}{\sim} \theta, \omega(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \omega|_{\mathfrak{h}} \underset{N_G(\mathfrak{h})}{\sim} \tau\}^1.$$

Тогда

Теорема 21. Подалгебра $\mathfrak{s}$ содержится в вещественной форме алгебры $\mathfrak{g}$, сопряженной $\mathfrak{r}$, тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ не пусто.

Приведем некоторые примеры, исключаяющие возможные закономерности в устройстве подалгебр вещественных алгебр Ли. Точнее будет назвать их

¹Если $a, b \in G \supset H$, то запись $a \underset{H}{\sim} b$ означает, что $\exists h \in H: hah^{-1} = b$.

Контрпримеры.

1. Неверно, что если $\mathfrak{h}$ – полупростая подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то какая-то вещественная форма подалгебры $\mathfrak{h}$ лежит в форме, изоморфной некоторой фиксированной вещественной форме $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ (подалгебра $\mathfrak{h}$ "невидима" в $\mathfrak{r}$). Например, никакая вещественная форма неприводимой подалгебры типа A_1 в $\mathfrak{sl}_4$ не лежит в $\mathfrak{su}_{1,3}$.

2. Неверно, что данная вещественная форма $\mathfrak{s}$ подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ лежит в некоторой вещественной форме алгебры $\mathfrak{g}$ (подалгебра $\mathfrak{s}$ "невидима" в $\mathfrak{g}$). Например, вещественная алгебра Ли, изоморфная $\mathfrak{so}_{1,15}$, не содержится ни в одной вещественной форме алгебры E_8 (внешний автоморфизм подалгебры $D_8 \subset E_8$ не реализуется).

3. Пусть $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ – полупростые подалгебры вещественной полупростой алгебры $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathbb{C})$. Тогда из сопряженности подалгебр $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}_2$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ не следует их квазисопряженности в $\mathfrak{r}$. Например, пусть $\mathfrak{r}$ – касательная алгебра группы автоморфизмов эрмитовой формы $-|z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_3|^2 + \dots + |z_n|^2$ на пространстве $\mathbb{C}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, $n \geq 5$, $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{su}(\langle e_1, e_2 \rangle)$, $\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{su}(\langle e_3, e_4 \rangle)$. Подалгебры $\mathfrak{s}_1$ $\mathfrak{s}_2$ сопряжены в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ как компактные формы сопряженных подалгебр типа A_1 , но не квазисопряжены, потому что их централизаторы в $\mathfrak{r}$ не изоморфны.

4. Из квазисопряженности не следует сопряженность. Для неприводимой подалгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R})$ имеется квазисопряженная несопряженная подалгебра.

Тем не менее, верно, что для всякой полупростой подалгебры $\mathfrak{h}$ полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ некоторая ее некомпактная вещественная форма содержится в некоторой вещественной форме $\mathfrak{g}$.

2.2 Классификация инволюций

В данном разделе будут классифицированы с точностью до внутренней сопряженности инволюции в группе $\text{Aut } \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ – полупростая комплексная алгебра Ли. Эта классификация известна, но нам она потребуется в специальном виде.

2.2.1 Редукция к классификации внутренних инволюций

Положим $G = \text{Int } \mathfrak{g}$. Отметим, что всякий автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ однозначно определяет автоморфизм группы G (группа $\text{Aut } \mathfrak{g}$ действует сопряжениями на своей нормальной подгруппе $\text{Int } \mathfrak{g}$).

Фиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$. Пусть Δ – система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{t}$, $\Pi = \{\alpha^i\}_{i=1}^n \subset \Delta$ – система простых корней², $Q = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{Z}}$ – решетка корней. Введем отображение $\varepsilon: \mathfrak{g} \rightarrow G$, $\xi \mapsto \exp \text{ad } 2\pi i \xi$. Положим $T = \varepsilon(\mathfrak{t})$ – максимальный тор в G . Поскольку $\text{Ker } \varepsilon|_{\mathfrak{t}} = Q^*$, имеем $T \simeq \mathfrak{t}/Q^*$. Таким образом, существует изоморфизм между подгруппой элементов второго порядка в T и факторгруппой $\frac{1}{2}Q^*/Q^* \simeq Q/2Q$, имеющей естественную структуру $\mathbb{Z}_2$ -модуля.

Для всякого автоморфизма системы простых корней Π каноническим образом строится автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ (см., напр., [3]). Такие автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g}$ мы будем называть *диаграммными*. Справедливо следующее утверждение [3]:³

Теорема 22. *Всякий полупростой автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ внутренне сопряжен автоморфизму вида ωh , где ω – диаграммный автоморфизм относительно системы Π , $h \in T^\omega$. Если автоморфизмы $\omega_1 h_1$ и $\omega_2 h_2$ сопряжены в $\text{Aut } \mathfrak{g}$, то $\omega_1 = \omega_2$ (ω_i – диаграммные автоморфизмы, $h_i \in T_i^\omega$, $i = 1, 2$). В этом случае, если положить $\omega = \omega_1$, указанные автоморфизмы сопряжены элементом $g \in G$ таким, что $g\omega g^{-1} = \omega h$, $\text{Ad } g(\mathfrak{t}^\omega) = \mathfrak{t}^\omega$, где $h \in T^\omega$.*

Пусть ω – диаграммный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ относительно системы Π . Подалгебра $\mathfrak{t}^\omega$ является картановской подалгеброй в $\mathfrak{g}^\omega$ и содержит регулярный в $\mathfrak{g}$ элемент [3]. В частности, $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}^\omega) = \mathfrak{t}$. Положим $N = N(T^\omega)$. Тогда группа N нормализуется элементом ω .

Лемма 4. $N = TN^\omega$.

Доказательство. Пусть W и $W(\omega)$ – группы Вейля алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^\omega$ соответственно. Тогда $W(\omega) \subset W$ в силу $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}^\omega) = \mathfrak{t}$. Нужно доказать $W(\omega) = N_W(\mathfrak{t}^\omega)$. Пусть k – порядок автоморфизма ω . В силу диаграммности ω , элементы вида $\gamma_\alpha = \frac{1}{k}(\alpha + \omega\alpha + \dots + \omega^{k-1}\alpha) \in (\mathfrak{t}^*)^\omega \simeq (\mathfrak{t}^\omega)^*$, $\alpha \in \Pi$, образуют систему $\Pi(\omega)$ простых корней алгебры $\mathfrak{g}^\omega$ относительно тора $\mathfrak{t}^\omega$.

²Нумерация простых корней простых алгебр Ли такая же, как в [3], т.е. первый фундаментальный вес соответствует представлению минимальной размерности.

³Для корректности ссылки нужно добавить, что $T^\omega = \exp \text{ad } \mathfrak{t}^\omega$ для любого диаграммного автоморфизма $\omega \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ относительно Π . Это нетрудно вывести из определения эпиморфизма ε .

Значит, положительная камера Вейля $C(\omega)$ подалгебры $\mathfrak{g}^\omega$ лежит в положительной камере Вейля C алгебры $\mathfrak{g}$: $\forall x \in \mathfrak{t}^\omega \gamma_\alpha(x) > 0 \Rightarrow \alpha(x) > 0$. Если $W(\omega) \subsetneq N_W(\mathfrak{t}^\omega)$, то из транзитивности действия $W(\omega)$ на камерах Вейля получаем, что в камере $C(\omega)$ существуют два W -эквивалентных вектора, один из которых (значит, и оба) можно считать регулярным, т.е. лежащим в открытой части $C(\omega)^\circ$. Это противоречит W -фундаментальности камеры C . Значит, $W(\omega) = N_W(\mathfrak{t}^\omega)$. $\square$

Обозначения, введенные в лемме, мы будем использовать и впредь. Далее считаем $\omega^2 = 1$. Пусть $V = V(\Pi, \omega)$ – группа элементов второго порядка тора T^ω , $U = U(\Pi, \omega) = \{v \in V : \omega \underset{G}{\sim} \omega v\}$.

Лемма 5. *Множество U является подгруппой в V .*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in U$, т.е. $\omega \underset{G}{\sim} \omega u_1 \underset{G}{\sim} \omega u_2$. В силу теоремы 22 и леммы 4 имеем: $\exists h_1, h_2 \in T : h_k \omega h_k^{-1} = \omega u_k$, $k = 1, 2$. Тогда $h_1 h_2 \omega (h_1 h_2)^{-1} = \omega u_1 u_2$, значит, $u_1 u_2 \in U$. $\square$

В дальнейшем операцию на V будем записывать аддитивно, имея ввиду упомянутую выше структуру $\mathbb{Z}_2$ -модуля. Лемма 5 означает, что U – подмодуль в V . Ясно, что пространства U и V инвариантны относительно группы $W(\omega)$. Для элемента $v \in V$ обозначим через $\bar{v}$ его образ в группе $\bar{V} = V/U$. Группа $W(\omega)$ очевидным образом действует на пространстве $\bar{V}$, соответствующую линейную группу обозначим через $\bar{W}$.

Лемма 6. $\omega v_1 \underset{W}{\sim} \omega v_2 \iff \bar{v}_1 \underset{\bar{W}}{\sim} \bar{v}_2$, $v_1, v_2 \in V$.

Доказательство. Предположим, существует элемент $g \in N$ такой, что $g \omega v_1 g^{-1} = \omega v_2$. По лемме 4 можно считать, что $g = hw$, $h \in T$, $w \in N^\omega$. Тогда имеем $v_2 = (w v_1 w^{-1}) + u$, где вектор $u \in V$ таков, что $\omega u = h \omega h^{-1}$, следовательно, $u \in U$. Импликация слева направо доказана. Обратная импликация доказывается обращением рассуждений. $\square$

Пусть $\mathfrak{g}_0$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$, построенная по системе простых корней $\Pi^\omega \subset \Pi$, W_0 – ее группа Вейля, $V_0 = V(\Pi^\omega, 1)$ – группа инволютивных элементов максимального тора в $\text{Int } \mathfrak{g}_0$. Отметим, что подалгебра $\mathfrak{g}_0$ является регулярной.

Лемма 7. *Существует изоморфизм $V_0 \simeq \bar{V}$, переводящий каждую W_0 -орбиту на $\bar{W}$ -орбиту (т.е. продолжающийся до изоморфизма $V_0/W_0 \simeq \bar{V}/\bar{W}$).*

Доказательство. Пусть $Q_0 \subset Q$ – решетка корней подалгебры $\mathfrak{g}_0$. Согласно сказанному выше, имеются изоморфизмы $\iota_0: V_0 \simeq Q_0/2Q_0$ и $\iota: V \simeq (Q/2Q)^\omega = Q^\omega/2Q^\omega$, Q^ω естественным образом отождествляется с решеткой корней алгебры $\mathfrak{g}^\omega$. Вложение $Q_0 \subset Q^\omega$ индуцирует вложение $V_0 \subset V$. Докажем, что $V_0 \cap U = \{0\}$, тем самым будет установлен изоморфизм из утверждения леммы. Выберем произвольный элемент $u \in U$. Из леммы 4 следует, что $u = \exp 2x$, где $x \in \mathfrak{t}^- = (\mathfrak{t}^\omega)^\perp$. Значит, при изоморфизме ι элементу $u \in V$ отвечает целочисленная линейная комбинация элементов вида $(\alpha - \omega\alpha) \bmod 2Q = (\alpha + \omega\alpha) \bmod 2Q$, $\alpha \in \Pi - \Pi^\omega$ (и каждой такой комбинации соответствует некоторый элемент в U). Отсюда непосредственно вытекает, что $V_0 \cap U = \{0\}$. Пусть $\pi: V \rightarrow V_0$ – проекция вдоль подпространства U . Для доказательства второй части леммы нужно показать, что если элементы v_1 и $v_2 \in W$ W -эквивалентны, то их проекции $\pi(v_1)$ и $\pi(v_2)$ W_0 -эквивалентны. Для этого достаточно показать, что отражение в V относительно корня $\alpha + \omega\alpha \bmod 2Q$, $\alpha \in \Pi - \Pi^\omega$, перестановочно с проекцией π . Но это очевидно в силу данного выше описания подпространства U . $\square$

Из лемм 6 и 7 вытекает

Теорема 23. *Две инволюции из ωT^ω внутренне сопряжены тогда и только тогда, когда их ограничения на подалгебру $\mathfrak{g}_0$ внутренне сопряжены.*

Теорема 23 сводит классификацию инволюций к классификации внутренних инволюций.

2.2.2 Классификация внутренних инволюций

Имеем $\omega = \text{Id}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$. Для классификации, очевидно, можно считать алгебру $\mathfrak{g}$ простой. Обозначим через α_0 младший корень относительно Π . Положим $\bar{\alpha}^i = \alpha_i \bmod 2Q \in V$, $i = 1, \dots, n$, – базис модуля V . Линейная группа $W: V$ порождена отражениями r_i , $r_i(v) = v + \langle \tilde{v} | \alpha_i \rangle_2 \bar{\alpha}_i$, где $\tilde{v} \in Q$ – произвольный прообраз, $\langle \gamma | \alpha \rangle = \frac{2(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$, $\gamma \in Q$, $\alpha \in \Delta$, $a_2 = a \bmod 2$ – приведение по модулю 2 целого числа a . Очевидно, последняя формула не зависит от выбора прообраза $\tilde{v}$.

Положим $r_{i,j} = r_j \dots r_i$ ($0 \leq i, j \leq n$) – произведение отражений с возрастающими номерами, если $i > j$, и убывающими – иначе. Изучим орбиты действия $W: V$ для каждого типа системы Π . Обозначим через $v^i \in \mathbb{Z}_2$, $i = 1, \dots, n$, коэффициент при $\bar{\alpha}^i$ в разложении вектора $v \in V$ по базису. (Расширенной) схемой элемента $v \in V$ назовем (расширенную) схему Дынкина системы Π с отметками 1 напротив корней α_i , $i = (0,)1, \dots, n$, таких,

что $\bar{\alpha}^i$. Введем функции $\iota: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ – изоморфизм на $(Z)^*$, $\iota_k: V \rightarrow \mathbb{Z}$, $\iota_k = \iota \alpha_k$.

Тип A_n . Пусть $v \in V$, $v \neq 0$. Докажем, что в орбите Wv существует элемент с единственной ненулевой координатой. Выберем $u \in Wv$ с наименьшим возможным числом ненулевых координат. Предположим, что $1 \leq i < j \leq n$ – первые два такие номера, что $u^i = u^j = 1$, и придем к противоречию. Положим $u_0 = u$, $u_{m+1} = r_{i-m, j-m} u_m$, $m = 0, \dots, i-1$. Вектор u_i имеет больше нулевых координат, чем вектор u , что противоречит выбору u . Отметим, что $e_i \sim e_{n+1-i} = r_{n+2-i, 1} \dots r_{n, i-1} r_{0, i}$ (считаем $r_{n+1} = r_0$).

Определим функцию $a_n: V \rightarrow \mathbb{Z}$ следующим образом. Пусть $v \in V$, $v \neq 0$. Рассмотрим расширенную схему элемента v . Пусть $0 \leq i_0, \dots, i_k \leq n$ – номера простых корней с отметками. Положим $I_n(0) = n+1$, $I_n(v) = (-1)^k(n+1+i_0-i_k) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j(i_{j+1}-i_j)$ – альтернированная сумма длин промежутков между 1 (или след некоторой целочисленной матрицы из GL_{n+1} , соответствующей v), $a_n = |I_n|$.

Докажем, что функция a_n является инвариантом, разделяющим орбиты. Инвариантность относительно простых отражений очевидна (при этом $I_n(r_i v) = -I_n(r_i v)$, $1 \leq i \leq n \iff i = n, v^n = 1$). Значит, функция a_n W -инвариантна. Заметим, что $a_n(e_i) = |n+1-2i|$. Ввиду вышесказанного, получаем, что элементы e_i , $i = 1, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ представляют различные орбиты, и всякий элемент $v \in V$, $v \neq 0$, лежит в одной из них. Орбита элемента e_i соответствует вещественной форме $\mathfrak{su}_{i+1, n-i}$ алгебры $\mathfrak{sl}_{n+1}$.

Тип B_n . Принимая во внимание, что $A_{n-1} \subset B_n$, получаем, что каждый элемент пространства V сопряжен элементу с не более чем одной ненулевой координатой среди первых $n-1$ координат. Докажем, что $e_{n-i} \sim u_0 = e_i + e_n$, $i = 1, \dots, n-1$. Положим $u_{m+1} = r_{i-m, n-m} u_m$, $m = 0, \dots, i-1$. Тогда $u_i = e_{n-i}$. Таким образом, всякий элемент пространства V сопряжен некоторому базисному элементу.

Рассмотрим функцию $b_n = \iota_n I_{n-1}$, где I_{n-1} – функция на $A_{n-1} \subset B_n$, определенная выше. Докажем инвариантность b_n . Действительно, $r_i I_{n-1} = I_{n-1}$, $\iota_n = r_i \iota_n$ для всех $i = 1, \dots, n$, кроме $i = n-1$. Если $v^{n-1} = 1$, то $I_{n-1}(r_{n-1}(v)) = -I_{n-1}(v)$ и $\iota_n(r_{n-1}v) = -\iota_n(v)$. Кроме того, $b_n(e_i) = 2i - n$. Значит, b_n – инвариант, разделяющий орбиты. Всего имеется n орбит ненулевых элементов, в каждой из которых ровно по одному базисному вектору. Орбита We_i соответствует вещественной форме $\mathfrak{so}_{2i, 2n+1-2i}$ алгебры $\mathfrak{so}_{2n+1}$.

Тип C_n . Как и в случае B_n , всякий элемент пространства V сопряжен элементу вида $xe_i + ye_n$, $x, y \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq i \leq n$. Докажем, что $e_n \sim u_0 = e_i + e_n$. Положим $u_{m+1} = r_{i-m, n} u_m$, $m = 0, \dots, i-1$. Тогда $u_i = e_n$, что и требовалось.

Значит, в каждой орбите присутствует элемент базиса. Кроме того, $e_i \sim e_{n-i}$, поскольку $(r_{n-1}v)^n = v^n$.

Функция $c_n = \iota_n a_{n-1} + \iota_n + a_{n-1}$ (функция a_{n-1} определена на подсистеме $A_{n-1} \subset C_n$) инвариантна и разделяет орбиты: инвариантность относительно простых отражений очевидна, $c_n(e_i) = 2|n-2i| + 1$, $i < n$, и $c_n(e_n) = -1$. Итак, имеется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ орбит ненулевых элементов, в каждой из которых присутствует базисный вектор. Орбита We_i , $i < n$, соответствует вещественной форме $\mathfrak{sp}_{i,n-i}$ алгебры $\mathfrak{sp}_{2n}$, а We_n – форме $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Тип D_n . Для определенности, будем считать, что $A_{n-1} \subset D_n$ состоит из всех простых корней, кроме α_n . Как и выше, получаем, что всякий элемент пространства V сопряжен элементу вида $xe_i + ye_n$, $x, y \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq i \leq n$. Докажем, что $e_1 \sim e_{n-1} + e_n$, $e_n \sim e_i + e_n$, если i четно, и $e_{n-1} \sim e_i + e_n$, если i нечетно, $i \leq n-2$. Действительно, $e_1 = r_{n-1,1}(e_{n-1} + e_n)$. Положим $u_0 = e_i + e_n$, $u_{m+1} = r_{i-m,n}$, $m = 0, \dots, i-1$. Тогда получим $u_i = e_n$, если i четно и $u_i = e_{n-1}$ иначе. В частности, $e_{n-1} \sim e_n$, если n нечетно: $e_n \sim e_{n-2} + e_n = r_n e_n \sim e_{n-1}$. Очевидно, что функция $\delta = \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{\alpha}_n: v \rightarrow \mathbb{Z}_2$ инвариантна. Отсюда следует, что $e_i \sim e_{n-i}$, $2 \leq i \leq n-2$.

Подытожим сказанное. На множестве $D = \{v \in V: \delta(v) = 0\}$ функция a_{n-1} является инвариантом, разделяющим орбиты. На множестве $V - D$ имеется единственная орбита, если n нечетно. Если n четно, то функция $\gamma = (\frac{a_{n-1}}{2})_2$ является инвариантом, что нетрудно проверить. При этом $\gamma(e_{n-1}) = (\frac{n}{2} + 1)_2$, $\gamma(e_n) = (\frac{n}{2})_2$, значит, в этом случае имеются ровно две орбиты на $V - D$. Ввиду всего вышесказанного, в качестве инварианта, разделяющего орбиты, можно взять $d_n = (\iota(\delta) + 1)a_{n-1} + (\iota(\delta) - 1)\iota((n+1)_2)\iota(\gamma)$. Получаем $d_n(e_i) = 2|n-2i|$, $i = 1, \dots, n-2$. Если n нечетно, то $d_n(e_{n-1}) = d_n(e_n) = 0$. Если n четно, то $d_n(e_{n-1}) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot 2$, $d_n(e_n) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot 2$. Таким образом, действие $W: V$ имеет $\frac{n+1}{2}$ (соотв. $\frac{n}{2} + 2$) орбит, не содержащих 0, если n нечетно (соотв. четно). Вещественная форма, отвечающая орбите элемента e_i , $1 \leq i \leq n-2$, обозначается $\mathfrak{so}_{2i,2n-2i}$, а орбите элемента e_i , $i = n-1, n$, – $\mathfrak{u}_n^*(\mathbb{H})$ (одно обозначение). Последние две формы изоморфны, но в случае четного n не сопряжены. Если понадобится различать эти формы, будем снабжать их обозначения знаками ', ''.

В случае особых алгебр Ли нам будет удобно классифицировать орбиты с помощью $\mathbb{Z}_2$ -значных инвариантов.

Тип G_2 . В этом случае, очевидно, все ненулевые элементы сопряжены. Некомпактная вещественная форма алгебры G_2 обозначается GI .

Тип F_4 . Поскольку $A_2 = \{\alpha_3, \alpha_4\}$, $\tilde{A}_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\} \subset F_4$, всякий вектор пространства V содержит в орбите вектор вида $xe_2 + ye_3$. Множество таких ненулевых векторов содержится ровно в двух орбитах. Значит, всего име-

ем две орбиты ненулевых элементов. Рассмотрим функцию $f: V \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $f(v) = v^3 \vee v^4 = v^3 v^4 + v^3 + v^4$. Она, очевидно, инвариантна и $f(e_1) \neq f(e_4)$, значит, разделяет нетривиальные орбиты. Орбиты элементов e_1 и e_4 отвечают соответственно вещественным формам $F\Pi$ и FI алгебры F_4 .

Тип E_6 . Ввиду того, что $A_5 \subset E_6$, получаем, что всякий элемент пространства V сопряжен элементу вида $xe_i + ye_6$, $1 \leq i \leq 5$. Композиция диаграммного автоморфизма относительно Π и инволюции Вейля (действующей инверсией на $\mathfrak{t}$) есть внутренний автоморфизм w , $wT \in W$, переводящий схему произвольного элемента из V в симметричную. Поэтому можно считать $i \leq 3$. Докажем, что множество $V - 0$ состоит из орбит элементов e_1 и e_2 . Действительно, $e_3 + e_6 \sim e_3 = r_0(e_3 + e_6) \sim e_6 = r_6 r_0 e_3 \sim e_2$ (из соображений симметрии для системы $\Pi' = (\Pi \cup \alpha_0) - \alpha_5$), $e_1 \sim e_1 + e_6 = r_0 e_1 \sim e_2 + e_6 = w r_1 r_2 r_3 r_6$.

Непосредственно устанавливается, что функция $q_6: V \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $v \mapsto v^1 \vee v^2 + v^5 \vee v^4 + v^0 \vee v^6$ (четность числа ненулевых усиков на расширенной схеме элемента v) инвариантна, $q_6(e_1) = 0$, $q_6(e_2) = 1$. Таким образом, в пространстве V имеются ровно две нетривиальные орбиты, разделяющиеся инвариантом q_6 . Орбита элемента e_1 (соотв. e_2) отвечает вещественной форме $E\Pi$ (соотв. $E\Pi$) алгебры E_6 .

Тип E_7 . Используем вложение $E_6 \subset E_7$. Орбита каждого элемента пространства V содержит элемент вида $xe_1 + ye_i$, где $i = 2$ или 3 . Из соотношений $e_1 \sim e_1 + e_2 = r_1 e_1$, $e_2 \sim e_1 + e_3 = r_1 r_2 e_2$ получаем, что множество $V - 0$ состоит из орбит векторов e_1, e_2, e_3 .

В качестве инвариантов, разделяющих нетривиальные орбиты, возьмем $q_7 = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_7$ и $q_7 q_6$ (инвариантность устанавливается непосредственной проверкой для простых отражений; инвариантность q_7 следует еще из того, что элементы тора T , на которых q обращается в 0, – это в точности те инволюции, которые поднимаются до инволюций при односвязном накрытии $\tilde{E}_7 \rightarrow E_7$), $q_7(e_1) = 1$, $q_7 q_6(e_1) = 0$, $q_7(e_2) = q_7 q_6(e_2) = 0$, $q_7(e_3) = q_7 q_6(e_3) = 1$. Следовательно, на пространстве V имеется три орбиты ненулевых элементов. Орбиты We_1 , We_2 , We_3 отвечают соответственно вещественным формам $EV\Pi$, EVI , EV алгебры E_7 .

Тип E_8 . Воспользуемся вложением $E_7 \subset E_8$, из которого следует, что всякая орбита содержит элемент вида $xe_1 + ye_i$, $i = 2, 3$ или 4 . Следующие соотношения показывают, что можно ограничиться элементами e_1 и e_3 : $e_1 \sim e_2 = r_0 r_1 e_1 \sim e_1 + e_2 = r_1 e_1 \sim e_1 + e_3 = r_1 r_2 e_2$, $e_3 \sim e_4 = r_{3,0} e_3 \sim e_1 + e_4 = r_0 e_4$.

Докажем, что функция $q_8 = \bar{\alpha}_1 q_7 + \bar{\alpha}_1 + q_7 + q_6$ инвариантна. Ясно, что она инвариантна относительно простых отражений в E_6 . Пусть $v \in V$. Если $v^1 = 1$, то $q_7(r_1 v) = q_7(v) + 1$, $r_1 q_6 = q_6$, значит, $r_1 q_8 = q_8$. Докажем, что

$r_2q_8 = q_8$. Предположим, $v^2 = 1$. Тогда $\bar{\alpha}_1(r_2v) = \bar{\alpha}_1(v) + 1$, $r_2q_7 = q_7$. Если $q_7(v) = 1$, то $v^4 = v^8$, значит, $q_6(r_2v) = q_6(v)$ (четность „суммы усиков“ не меняется). Если $q_7(v) = 1$, то $v^4 = v^8 + 1$ и $q_6(r_2v) = q_6(v) + 1$ (четность „суммы усиков“ меняется). Итак, инвариантность q_8 доказана. Поскольку $q_8(e_1) = 1$, $q_8(e_3) = 0$, инвариант q_8 разделяет нетривиальные орбиты. Значит, их всего две. Орбиты элементов e_1 и e_3 отвечают соответственно вещественным формам EIX и $EVIII$ алгебры E_8 .

2.2.3 Случай $\omega \neq \text{Id}$

Нетривиальные диаграммные инволюции имеют только системы $\Pi = A_n$, D_n , E_6 , и во всех случаях, за исключением D_4 , такие инволюции единственны.

Тип A_n . По теореме о редукции, внешние вещественные формы алгебры A_n сопряжены, если n четно и находятся во взаимно однозначном соответствии с формами алгебры $A_1 = \mathfrak{g}(\Pi^\omega)$, если n нечетно. Компактной форме последней отвечает $\mathfrak{sl}_{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{H})$, а некомпактной — $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Тип D_n . Имеется взаимно однозначное соответствие между классами сопряженности внутренних вещественных форм алгебры $\mathfrak{sl}_{n-1}$ и внешних форм алгебры $\mathfrak{so}_{2n}$, форме $\mathfrak{su}_{i, n-1-i}$ соответствует форма $\mathfrak{so}_{2i+1, 2n-2i-1}$, $i = 0, \dots, n-2$ (всего $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, с точностью до сопряженности).

В случае $n = 4$ есть еще две диаграммных инволюции (сопряженные в $\text{Aut } \Pi$). Таким образом в алгебре $\mathfrak{so}_8$ имеется по три класса сопряженности внешних форм, изоморфных $\mathfrak{so}_{1,7}$, $\mathfrak{so}_{3,5}$.

Тип E_6 . Классы сопряженности внешних форм E_6 взаимно однозначно соответствуют классам сопряженности внутренних форм алгебры $A_2 = \{\alpha_3, \alpha_6\}$, которых два. Тривиальный класс отвечает форме EIV , нетривиальный — форме EI .

2.3 Частичный порядок на множестве подалгебр

2.3.1 Задание частичного порядка

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ — множество ее полупростых подалгебр и $\mathfrak{h}, \mathfrak{p} \in \mathcal{S}$. Мы говорим, что подалгебра $\mathfrak{p}$ *мажорирует* $\mathfrak{h}$ и

пишем $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$, если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ и $N_{\text{Aut } \mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset N_{\text{Aut } \mathfrak{g}}(\mathfrak{p})$. Легко убедиться, что таким образом на $\mathcal{S}$ возникает структура частично упорядоченного множества с наибольшим элементом $\mathfrak{g}$.⁴

Отметим некоторые свойства введенного упорядочения:

- (1) если $\sigma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$, то $\sigma(\mathfrak{h}) \prec \sigma(\mathfrak{p})$;
- (2) $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{n}(\mathfrak{h})'$, где $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ — нормализатор $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$;
- (3) если $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{g}$ — $\mathcal{S}$ -подалгебра, $\text{Aut } \mathfrak{g} = \text{Int } \mathfrak{g}$, $\text{Aut } \mathfrak{h} = \text{Int } \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p} \in \mathcal{S}$, то $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$.

$\text{Aut } \mathfrak{g}$ -эквивариантное отображение $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ назовем *мажорантой* на алгебре $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{h} \prec \mu(\mathfrak{h})$ для любой $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}$. В частности, если $\mu(\mathfrak{h}_1) = \mu(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ сопряжены автоморфизмом $\mathfrak{g}$, то существует элемент $\sigma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ такой, что $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ и $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Отметим, что мажоранты образуют моноид относительно композиции. Мы увидим, что мажоранты представляют удобный инструмент для изучения подалгебр комплексных и вещественных алгебр Ли. Более точно, нас будут интересовать подалгебры $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}$, для которых $\mu(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ или $\mathfrak{g}$. Такие подалгебры, за исключением тривиальных 0 и $\mathfrak{g}$, мы будем называть *μ -примитивными*. Они окажутся "кирпичиками" в нашей последующей классификации. Мы построим мажоранту $\mu[\mathfrak{g}]$ для любой полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которую будем в дальнейшем использовать. Это достаточно сделать для простых алгебр $\mathfrak{g}$ и положить $\mu[\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2] = \mu[\mathfrak{g}_1] \oplus \mu[\mathfrak{g}_2]$.

2.3.2 Определение μ для классических алгебр Ли

Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$. Пусть подалгебра $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}$ такова, что $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})' = \mathfrak{h}$, т. е. $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ не содержит нильпотентных элементов. Тогда имеется однозначное разложение $V = \bigoplus_i V_i$ $\mathfrak{h}$ -модуля V на неприводимые компоненты. Если таких компонент больше одной, то положим

$$\mu(\mathfrak{h}) = \bigoplus_i \mathfrak{sl}(V_i) = \mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{h}))'.$$

Предположим теперь, что модуль V неприводим. Модуль V изоморфен тензорному произведению неприводимых $\mathfrak{h}_k$ -модулей U_k для всех простых идеалов $\mathfrak{h}_k \subset \mathfrak{h}$. В смысле этого изоморфизма, положим

$$\mu(\mathfrak{h}) = \bigoplus_k \mathfrak{sl}(U_k).$$

⁴Максимальные элементы относительно этого порядка называются *почти-примитивными подалгебрами*. Для простых комплексных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ они были перечислены (но не все) в работе [8]. В подавляющем большинстве это максимальные полупростые подалгебры.

Иными словами, матричная алгебра $\mu(\mathfrak{h})$ есть тензорное произведение алгебр $\mathfrak{sl}(U_k)$. Это определение не зависит от выбора изоморфизма, поскольку, как нетрудно убедиться,

$$\mu(\mathfrak{h}) = \oplus_k \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_k).$$

Доопределим μ на $\mathcal{S}$ по правилу $\mu(\mathfrak{h}) = \mu(\mathfrak{n}(\mathfrak{h})')$ и обозначим полученное отображение через $\mu[\mathfrak{sl}(V)]$.

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ или $\mathfrak{sp}(V)$ положим

$$\mu[\mathfrak{g}](\mathfrak{h}) = (\mu[\mathfrak{sl}(V)](\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g})' \cup \mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{h}))'.$$

Мы не включаем случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_8$ — он будет рассмотрен ниже.

Предложение 14. Построенное выше отображение $\mu = \mu[\mathfrak{g}]: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ является мажорантой на классической алгебре Ли $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{so}_8$. Список μ -примитивных подалгебр представлен в таблице 2.1.⁵

Доказательство легко получается из тех соображений, что автоморфизм, нормализующий подалгебру, нормализует ее централизатор и коммутант, а также всякий автоморфизм $\mathfrak{so}(V)$ и $\mathfrak{sp}(V)$ однозначно продолжается до внутреннего автоморфизма $\mathfrak{sl}(V)$.

Таблица 2.1: μ -примитивные подалгебры классических комплексных алгебр Ли

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
$\forall$	$\forall$ простая неприводимая подалгебра $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$
$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$	$\oplus_k \mathfrak{sl}_{n_k}(\mathbb{C}),$ $n_k \geq 2, \quad \sum_k n_k = n$ или $n - 1$
	$\oplus_k \mathfrak{sl}_{n_k}(\mathbb{C}),$ $\prod_k n_k = n$
$\mathfrak{so}_n,$	$\oplus_k \mathfrak{so}_{n_k}(\mathbb{C}) + \oplus_l \mathfrak{sl}_{m_l}(\mathbb{C}),$ $n_k \geq 3, m_l \geq 2, \quad \sum_k n_k + 2 \sum_l m_l = n, n - 1$ или $n - 2$
	$\oplus_k \mathfrak{so}_{n_k}(\mathbb{C}) + \oplus_{l=1}^{2p} \mathfrak{sp}_{m_l}(\mathbb{C}),$ $n_k \geq 3, \quad \prod_k n_k \prod_l m_l = n$
$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$	$\oplus_k \mathfrak{sp}_{n_k} + \oplus_l \mathfrak{sl}_{m_l},$ $m_l \geq 2, \quad \sum_k n_k + 2 \sum_l m_l = n$ или $n - 1$
	$\oplus_k \mathfrak{so}_{n_k} + \oplus_{l=1}^{2p+1} \mathfrak{sp}_{m_l},$ $n_k \geq 3, \quad \prod_k n_k \prod_l m_l = n$

⁵Мы не конкретизируем вложения $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ во избежание громоздкости, надеясь, что они ясны

Определим $\mu = \mu[\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})]$. Пусть $\mu': \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ — отображение $\mu[\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})]$ в смысле предыдущего определения (оно не является мажорантой). Внешний автоморфизм $\sigma \in \text{Aut } \mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ назовем *особым*, если $\sigma^3 \in \text{Int } \mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$. Если подалгебра $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}$ не инвариантна относительно особого автоморфизма, то определим $\mu(\mathfrak{h}) = \mu'(\mathfrak{h})$. Ясно, что в этом случае $\mathfrak{h} \prec \mu(\mathfrak{h})$.

Найдем все подалгебры $\mathfrak{h}$, инвариантные относительно некоторого особого автоморфизма σ . Будем называть их *особыми* в $\mathfrak{so}_8$. Для таких подалгебр выполнено одно из условий: $\mathfrak{h}$ имеет внешний автоморфизм третьего порядка либо централизуется особым автоморфизмом $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$. В первом случае возможности только такие: $\mathfrak{h} = 4A_1$ и $3A_1$. Легко убедиться, что эти подалгебры особые. Во втором случае, пользуясь результатами работы [7], получаем следующий список особых подалгебр: G_2 , A_2^3 , а также все их полупростые подалгебры: A_2 , $A_1 + A_1^3$, A_1 , A_1^3 , A_1^4 , A_1^{12} и A_1^{28} . Все особые подалгебры определены однозначно, с точностью до сопряженности, своим типом с указанием индексов. Определим $\mu(\mathfrak{h})$, как указано в таблице 2.2.

Таблица 2.2: Отображения μ и μ' на особых подалгебрах в $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$

$\mathfrak{h}$	$4A_1$	$3A_1$	G_2	A_2^3	A_2	$A_1 + A_1^3$	A_1	A_1^3	A_1^4	A_1^{12}	A_1^{28}
μ	$4A_1$	$4A_1$	G_2	D_4	A_2	$4A_1$	$4A_1$	$4A_1$	A_2	A_2^3	G_2
μ'	$4A_1$	$4A_1$	B_3	D_4	A_2	$2A_1 + A_1^2$	$4A_1$	$2A_1 + A_1^2$	A_2	$B_2 + A_1^2$	B_3

Таким образом, получаем

Предложение 15. *Отображение $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, определенное выше, является мажорантой на $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$. Оно отличается от μ' на подалгебрах G_2 , $A_1 + A_1^3$, A_1^3 , A_1^{12} и A_1^{28} , на которых оно равно соответственно G_2 , $4A_1$, $4A_1$, A_2^3 и G_2 . Множество μ' -примитивных подалгебр состоит из множества μ -примитивных подалгебр, а также G_2 . Среди них особыми подалгебрами являются G_2 , A_2^3 , $4A_1$ и A_2 .*

2.3.3 Определение μ для особых алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — особая комплексная алгебра Ли, т. е. G_2 , F_4 , E_6 , E_7 или E_8 .

Теорема 24. *Существует мажоранта $\mu = \mu[\mathfrak{g}]$ на $\mathfrak{g}$ с μ -примитивными подалгебрами (с точностью до $\text{Aut } \mathfrak{g}$ -сопряженности), представленными в таблице 2.4.⁶*

⁶В первых трех строках выписаны регулярные μ -примитивные подалгебры, соответствующие связ-

В таблице 2.4 на самом деле представлены мажоранты на всевозможных изотипных подалгебрах. Этого, очевидно, достаточно для того, чтобы построить мажоранту на всех подалгебрах из $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$: всякий автоморфизм $\mathfrak{g}$, нормализующий $\mathfrak{h}$, нормализует и каждую ее изотипную компоненту. Около каждого значения $\mu(\mathfrak{h})$ указано вложение $\mathfrak{h} \subset \mu(\mathfrak{h})$. А именно, через запятую перечислены суммы размерностей представления $\mathfrak{h}$ в $\mu(\mathfrak{h})$, если последняя алгебра — классическая, либо G_2 . В противном случае, указан класс сопряженности $\mathfrak{h}$ в $\mu(\mathfrak{h})$. При составлении таблицы мы пользовались результатами таблиц 1.10–1.14, а также дополнительными соображениями, которые здесь не приводим.

2.4 Отображение ν и его слои

2.4.1 Теорема о редукции

Сформулируем задачу классификации подалгебр в более общем виде. Для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обозначим через $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ множество всех ее полупростых подалгебр. Если G — группа Ли с касательной алгеброй $\mathfrak{g}$, то ее присоединенное представление индуцирует действие $G: \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$. Обозначим через π_G естественную проекцию $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ на множество орбит $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G = \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/\text{Ad } G$, где $\text{Ad } G \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$ — присоединенная группа.

Пусть $\mathfrak{r}$ — полупростая вещественная алгебра Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathbb{C})$. Функтор комплексификации индуцирует отображение

$$c: \mathcal{S}[\mathfrak{r}] \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}].$$

Пусть R — замкнутая подгруппа комплексной группы Ли G , $\text{Lie } R = \mathfrak{r}$, $\text{Lie } G = \mathfrak{g}$. Следовательно, отображение c спускается до отображения (конечных) множеств орбит

$$\nu: \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/R \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G,$$

причем $\nu\pi_R = \pi_G c$.

Нашей задачей является описание слоев $\mathcal{F}(u)$, $u \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G$, отображения ν . В частности, в случае $R = \text{Int } \mathfrak{r}$, $G = \text{Int } \mathfrak{g}$ имеем задачу классификации с точностью до сопряженности полупростых подалгебр в $\mathfrak{r}$ на основе аналогичной классификации для $\mathfrak{g}$.

ным подгруппам в $\text{Int } \mathfrak{g}$ с центрами порядков 2, 3, 5 соответственно. В следующих двух строках указаны касательные алгебры подгрупп с нециклическим центром. Далее представлены S-подалгебры. Как обычно, верхние индексы указаны для нерегулярных подалгебр. За описанием их вложений в $\mathfrak{g}$ отсылаем читателя к работе [4].

Пусть $\mathfrak{h}, \mathfrak{p} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ и $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$. Положим $h = \pi_G(\mathfrak{h})$, $p = \pi_G(\mathfrak{p})$. Фиксируем произвольных представителей $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ R -орбит из $\pi_R^{-1}(F(p))$. Положим $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i(\mathbb{C})$, $P_i = N_G(\mathfrak{p}_i)$, $Q_i = N_R(\mathfrak{q}_i)$, $1 \leq i \leq s$. Отметим, что, по определению, $\mathfrak{p}_i = \text{Ad } g_i(\mathfrak{p})$ для некоторого $g_i \in G$, $1 \leq i \leq s$. Положим $\mathfrak{h}_i = \text{Ad } g_i(\mathfrak{h})$, $h_i = \pi_{P_i}(\mathfrak{h}_i)$. Имеем естественные отображения

$$c_i: \mathcal{S}[\mathfrak{q}_i] \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{p}_i], \quad \nu_i: \mathcal{S}[\mathfrak{q}_i]/Q_i \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{p}_i]/P_i.$$

Для произвольной точки $u \in \mathcal{S}[\mathfrak{p}_i]/P_i$ положим $\mathcal{F}_i(u) = \nu_i^{-1}(u)$.

Теорема 25. В обозначениях выше, имеет место изоморфизм

$$\gamma: \sqcup_{i=1}^s \mathcal{F}_i(h_i) \rightarrow \mathcal{F}(h),$$

определяемый естественными отображениями

$$\gamma_i: \mathcal{S}[\mathfrak{q}_i]/Q_i \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/R, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Доказательство. Докажем сюръективность γ . Пусть $s \in \mathcal{F}(h)$ и $\mathfrak{s} \in \pi_R^{-1}(s)$. Таким образом, $\tilde{\mathfrak{h}} \doteq \mathfrak{s}(\mathbb{C}) = \text{Ad } g(\mathfrak{h})$ для некоторого $g \in G$. Подалгебра $\tilde{\mathfrak{p}} = \text{Ad } g(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{g}$ пересекается с $\mathfrak{r}$ по некоторой своей вещественной форме $\tilde{\mathfrak{q}} \supset \tilde{\mathfrak{h}}$. [Отметим, что $\tilde{\mathfrak{q}}$ не зависит от g в силу $\mathfrak{h} \prec \mathfrak{p}$.] Следовательно, существуют $i \in \{1, \dots, s\}$ и $r \in R$ такие, что $\mathfrak{q}_i = \text{Ad } r(\tilde{\mathfrak{q}})$, при этом индекс i единствен. Таким образом, точка $\pi_{Q_i}(\text{Ad } r(\mathfrak{h}))$ лежит в прообразе s отображения γ_i . Инъективность γ доказывается обратным ходом рассуждений. $\square$

2.4.2 Сведение к случаю: $\mathfrak{r}$ — простая алгебра Ли, $R = \text{Aut } \mathfrak{r}$, $G = R(\mathbb{C})$

Пусть, как и выше, $\mathfrak{r}$ — вещественная форма комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, R, G — группы Ли с касательными алгебрами $\mathfrak{r}, \mathfrak{g}$ соответственно, причем $R \subset G$ — замкнутая подгруппа. Поскольку нас интересуют группы $\text{Ad } R$ и $\text{Ad } G$, можно считать, что $R \subset \text{Aut } \mathfrak{r}$, $G \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$. Положим $R(\mathbb{C})$ — алгебраическое замыкание R в G (это полупростая комплексная алгебраическая группа, содержащая $\text{Int } \mathfrak{g}$).

Задачу описания слоев отображения ν легко свести к случаю, когда $G = R(\mathbb{C})$. Действительно, ν представляется в виде композиции естественных отображений $\mathcal{S}[\mathfrak{r}]/R \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/R(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G$. Таким образом, для искомого сведения достаточно описать слои последнего отображения. Но они очевидным образом параметризуются смежными классами $G/R(\mathbb{C})$.

Пусть теперь $G = R(\mathbb{C})$. Сведем дело к случаю, когда алгебра $\mathfrak{r}$ проста. Пусть $\mathfrak{r} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{r}_i$ — разложение на простые идеалы, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{r}_i(\mathbb{C})$. Отметим, что группы перестановок $\{\mathfrak{r}_i, i \in I\}$ и $\{\mathfrak{g}_i, i \in I\}$ совпадают (в силу $G = R(\mathbb{C})$). Положим $R_i = N_R(\mathfrak{r}_i)$, $G_i = N_G(\mathfrak{g}_i)$, $i \in I$. Обозначим отображение $\mathcal{S}[\mathfrak{r}_i]/R_i \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}_i]/G_i$ через ν_i . Тогда слои отображения ν очевидным образом описываются в терминах слоев ν_i , $i \in I$.

Итак, можно считать, что алгебра $\mathfrak{r}$ проста. Предположим, нам известны слои отображения $\tilde{\nu}: \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/\tilde{R} \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/\tilde{G}$, где $\tilde{R} = \text{Aut } \mathfrak{r}$, $\tilde{G} = \tilde{R}(\mathbb{C})$.⁷ Для того, чтобы свести задачу к отображению $\tilde{\nu}$, достаточно знать (ввиду наличия классификации подалгебр в комплексном случае), как распадается $\tilde{R}$ -орбита произвольной подалгебры $\mathfrak{s}$ на R -орбиты. Имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между последними и классами смежности $\tilde{R}/R_N$, где $R_N \subset \tilde{R}$ — подгруппа, порожденная R и $N = N_{\tilde{R}}(\mathfrak{s})$. Поскольку $R \cap N \supset \text{Int } \mathfrak{r}$, для определения N достаточно знать, до каких внешних автоморфизмов $\mathfrak{r}$ могут продолжаться автоморфизмы $\mathfrak{s}$. Напомним, что в силу теоремы 25, достаточно считать подалгебру $\mathfrak{s}(\mathbb{C})$ $\mu[\mathfrak{g}]$ -примитивной. В каждом таком случае мы непосредственно вычисляем группу N .

2.4.3 Классификация вещественных форм $\mu[\mathfrak{g}]$ -примитивных подалгебр

В этом разделе мы опишем слои отображения ν в случае простой алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mu[\mathfrak{g}]$ -примитивной подалгебры $\mathfrak{p}$. Заметим, что $\nu = \nu' \circ \nu''$, где

$$\nu'': \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/R \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/G, \quad \nu': \mathcal{S}[\mathfrak{r}]/G \rightarrow \mathcal{S}[\mathfrak{g}]/G \text{ ---}$$

естественные отображения. Следовательно, $F(p) = F''(F'(p))$, $p = \pi_G(\mathfrak{p})$, $F'(\cdot), F''(\cdot)$ — обозначения для слоев отображений ν', ν'' соответственно. Далее считаем $R = \text{Aut } \mathfrak{r}$, $G = R(\mathbb{C}) \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$.

Слои отображения ν'

Пусть $\mathfrak{h} \in \mathcal{S}[\mathfrak{g}]$, $\theta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ — некоторая инволюция Картана алгебры $\mathfrak{r}$. Пусть τ_i , $i \in I$, — представители всех $N_G(\mathfrak{h})$ -орбит инволюций τ алгебры $\mathfrak{h}$, для которых множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ не пусто. Соответствующие вещественные формы $\mathfrak{h}$ обозначим через $\mathfrak{s}_i$, $i \in I$.

Предложение 16. *Подалгебры $\mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{h}$, $i \in I$, образуют множество представителей в $\mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ точек слоя $F'(G\mathfrak{h})$.*

⁷Можно показать (например, с помощью схем Сатаке), что $\tilde{G} = \text{Aut } \mathfrak{r}$, за исключением случая $\mathfrak{r} \simeq \mathfrak{u}_{2n}^*(\mathbb{H})$, когда $|\text{Aut } \mathfrak{r}/\tilde{G}| = 2$ ($n \neq 2$) или 3 ($n = 2$).

Доказательство. Подалгебры $\mathfrak{s}_i$ и $\mathfrak{s}_j$, $i \neq j$, не являются G -сопряженными, потому что их инволюции Картана не являются $N_G(\mathfrak{h})$ -сопряженными. С другой стороны, пусть $\mathfrak{s} \in \mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ и $\mathfrak{s}(\mathbb{C}) \stackrel{\sim}{G} \mathfrak{h}$. Докажем, что тогда $\mathfrak{s} \stackrel{\sim}{G} \mathfrak{s}_i$ для некоторого $i \in I$. Инволюция Картана τ алгебры $\mathfrak{s}$ продолжается до инволюции $\theta' \stackrel{\sim}{G} \theta$ алгебры $\mathfrak{g}$. Но при наших допущениях о том, что $\mathfrak{r}$ проста и $G = R(\mathbb{C})$, G -сопряженность инволюций равносильна их $\text{Int } \mathfrak{g}$ -сопряженности. Поэтому $\theta' \sim \theta$ и, следовательно, существует индекс $i \in I$ такой, что $\mathfrak{s} \sim \mathfrak{s}_i$. $\square$

Итак, для описания слоев отображения ν' нужно научиться определять непустоту множеств $\mathcal{E}(\tau, \theta)$, а также знать группы $N_G(\mathfrak{h})$. Напомним, что нас прежде всего интересуют $\mu[\mathfrak{g}]$ -примитивные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. В случае наличия на $\mathfrak{r}$ комплексной структуры ясно, что для определения слоев отображения ν' (и ν) достаточно знать группы $N_G(\mathfrak{h})$ (множество $\mathcal{E}(\tau, tt)$ всегда непусто). Поэтому вопрос о непустоте множеств $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ интересен только в случае простой алгебры $\mathfrak{g}$.

Случай классической алгебры $\mathfrak{g}$ Тогда группа $N_G(\mathfrak{h})$ легко вычисляется в терминах линейных представлений. Множества $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ были определены Карпелевичем [6], за исключением пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, в которых $\mathfrak{h}$ — полупростая непростая неприводимая (в смысле тавтологического представления $\mathfrak{g}$) подалгебра. Мы сформулируем результаты Карпелевича (см. [6], теоремы V–XIII), а также сформулируем и докажем теорему относительно указанного случая. Непустоту множества $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ удобно обозначать в виде включения $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$ соответствующих вещественных форм алгебр $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$.

Имеется тавтологическое вложение $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — неприводимая подалгебра.

Теорема 26. 1. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$. Тогда $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{so}_n^s$, если и только если $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{su}_n^s$ и $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$. В случае $n = 2m$ для вложения $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{u}_m^*(\mathbb{H})$ необходимо и достаточно выполнение условия $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_m(\mathbb{H})$.

2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$, $n = 2m$. Тогда $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sp}_n^s$, если и только если $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n^s$ и $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_m(\mathbb{H})$. Для того чтобы $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$ необходимо и достаточно выполнение условия $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Теорема 26 сводит задачу о вложениях вещественных форм $\mathfrak{h}$ к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Пусть $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$ — вещественная форма с инволюцией Картана $\tau \in \text{Int } \mathfrak{h}$. Обозначим через φ линейное представление $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Теорема 27. Для того, чтобы подалгебра $\mathfrak{s}$ содержалась в $\mathfrak{su}_n^s$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi\tau \sim \varphi$ и $s = |\text{tr } \hat{\tau}|$, где $\hat{\tau} \in SL_n(\mathbb{C})$ — произвольный элемент, индуцирующий τ на $\mathfrak{h}$.

В работе [6] указана еще одна формула для вычисления s при помощи интегрирования, однако мы ее здесь не приводим. В таблицах 1 и 4 указанной работы вычислены индексы s в некоторых случаях.

Пусть Λ — старший вес φ относительно некоторой картановской подалгебры $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ с выбранной системой простых корней. Положим $\varepsilon = 0$, если φ ортогонально и $\varepsilon = 1$, если φ симплектично.

Теорема 28. Пусть $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$ — внутренняя вещественная форма с инволюцией Картана $\tau = \exp t$, $t = \frac{\pi i}{2}h \in \mathfrak{t}$. Для того, чтобы подалгебра $\mathfrak{s}$ вкладывалась в $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ или $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{H})$ ($n = 2m$), необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \sim \varphi^*$. При этом $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, если $\Lambda(h) + \varepsilon$ четно, и $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_m(\mathbb{H})$, иначе.

Обозначим через $\hat{\varphi}$ гомоморфизм односвязных групп, накрывающий φ .

Теорема 29. Пусть алгебра $\mathfrak{h}$ проста и $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}$ — внешняя вещественная форма.

1. $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_k(\mathbb{C}) : \mathfrak{sl}_k(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) ; \mathfrak{sl}_l(\mathbb{H}) \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ ($k = 2l$), если и только если $\hat{\varphi}(-E) = E ; \mathfrak{sl}_l(\mathbb{H}) \subset \mathfrak{sl}_m(\mathbb{H})$ ($n = 2m$), если и только если $\hat{\varphi}(-E) = -E ;$
2. $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{4k}(\mathbb{C}) : \mathfrak{s}$ принадлежит внешней форме алгебры $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\varphi\tau \sim \varphi ;$ при этом $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) ;$
3. $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{4k+2}(\mathbb{C})$ или $E_6 : \mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) ;$

Теорема 30. Пусть $\mathfrak{s}$ имеет комплексную структуру, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}^1$, φ_1 и φ^1 — представления $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}^1$ соответственно, индуцируемые φ . Для включения $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{su}_n^s$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_1 \sim \varphi^1$. При этом $s = \sqrt{n}$. Для того чтобы $\mathfrak{s}$ содержалась во внешней форме алгебры $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_1^* \sim \varphi^1$. При этом $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Пусть теперь $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^p \mathfrak{h}_i$ — $\mu[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]$ -примитивная подалгебра, где $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C})$, $\prod_i n_i = n$ и $p > 1$. Для нахождения включений $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$ достаточно ограничиться случаем $p = 2$. Действительно, простые идеалы $\mathfrak{h}$ суть объединение наборов из одного или двух таких идеалов, причем каждый набор τ -инвариантен. Можно считать, что $\tau(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$. Но тогда, если есть включение $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$, то оно пропускается через включение $\tilde{\mathfrak{s}} \subset \mathfrak{r}$ вещественной формы подалгебры $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$, где $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)) = \mathfrak{sl}_{n_1+n_2}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) = \mathfrak{sl}_{\frac{n}{n_1 n_2}}(\mathbb{C})$.

Теорема 31. В обозначениях выше, пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_i \in \mathfrak{h}_i$ — вещественная форма. Тогда $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{su}_n^s$, если и только если $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{su}_{n_i}^{s_i}$, $i = 1, 2$, и $s = s_1 s_2$; $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ (соотв. $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_m(\mathbb{H})$, $n = 2m$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, либо $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{sl}_{m_i}(\mathbb{H})$, $n_i = 2m_i$, $i = 1, 2$ (соотв. $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{sl}_{n_1}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{sl}_{m_2}(\mathbb{H})$).

Доказательство. Если $\mathfrak{s}_1$ — внутренняя форма, а $\mathfrak{s}_2$ — внешняя, то $\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$ не лежит ни в какой форме $\mathfrak{h}$, потому что $\varphi \not\sim \varphi\tau \not\sim \varphi^*$. Остальные утверждения проверяются без труда. $\square$

Пусть теперь $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — регулярная подалгебра. Тогда имеем разложение

$$\varphi = k\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_p$$

в сумму k копий тривиального представления φ_0 и попарно неэквивалентных представлений размерностей $n_1, n_2, \dots, n_p$ соответственно.

Теорема 32. 1. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ таковы, что $\varphi_i\tau \sim \varphi_i$, $i \leq k$, и $\varphi_i\tau \not\sim \varphi_i$ для $i > k$. Тогда $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{su}_n^s$, если и только если $\varphi\tau \sim \varphi$ и

$$s = |q_0 + \sum_{i=1}^k q_i s_i|,$$

где s_i — индексы внутренних форм $\mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C})$, охватывающих $\varphi_i(\mathfrak{h})$, $q_i \in \{\pm 1\}$, $i \geq 1$, $|q_0| \leq k$, $q_0 + k$ чётно.

2. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ таковы, что $\varphi_i\tau \sim \varphi_i^*$, $i \leq k$, и $\varphi_i\tau \not\sim \varphi_i$ для $i > k$. Тогда $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ (соотв. $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{H})$, $n = 2m$), если и только если $\varphi\tau \sim \varphi^*$ и $\varphi_i(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{R})$ (соотв. $\varphi_i(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{sl}_{m_i}(\mathbb{H})$, $n_i = 2m_i$, k чётно).

Теорема 32 позволяет решить проблему включений вещественных форм регулярных подалгебр в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Имеется аналог теоремы 26, сводящий случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ к $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Теорема 33. Если подалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ лежит в некоторой вещественной форме $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$, то $q_i = q_j$ для $\varphi_i = \varphi_j^*$ в обозначениях теоремы 32. При выполнении последнего условия имеют место критерии теоремы 26.

Теорема 33 выводится непосредственно из теоремы XIII работы [6].

Случай особой алгебры $\mathfrak{g}$

Предложение 17. *Вещественная форма полупростой R - подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, лежащая в вещественной форме алгебры $\mathfrak{g}$, лежит и в вещественной форме некоторой максимальной регулярной подалгебры $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Всякая инволюция $\theta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$, нормализующая $\mathfrak{h}$, нормализует подгруппу $Z = Z_G(\mathfrak{h})$, следовательно, некоторый максимальный тор в Z , а значит, и подгруппу I его инволютивных элементов. Если группа I не тривиальна, то ее порядок четен, значит, найдется θ – неподвижный элемент $z \in I$, $\omega \neq e$. Тогда полагаем $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^z$. Рассмотрим случай, когда $I = \{e\}$, т.е. группа Z конечна. В этом случае для любого элемента $z \in Z$ простого порядка подалгебра $\mathfrak{g}^z \subset \mathfrak{g}$ является максимальной среди регулярных. Докажем, что автоморфизм θ нормализует некоторую циклическую подгруппу $A \subset Z$ (отсюда уже все будет следовать). Выберем произвольный элемент $z \in Z$. Если $\theta(z) = z$, то полагаем $A = \langle z \rangle$, иначе $A = \langle \theta(z)z^{-1} \rangle$. $\square$

Далее будет предложен способ находить вещественные формы комплексной пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{g}$ – особая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – ее регулярная полупростая подалгебра. А именно, будет приведен критерий непустоты множества $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ в случае $\theta \in G$ ($\tau \in \text{Aut } \mathfrak{h}$). С помощью него классификация вещественных форм (уже для $\theta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$) будет сведена к классификации в $\mathfrak{g} = E_8$. Мы этим воспользуемся для разбора случая $\mathfrak{g} = E_6$, $\theta \notin G$ (в остальных случаях использование вышеупомянутого сведения к E_8 бессмысленно, поскольку вызывает дополнительные вычисления).

Положим $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$, Δ' – система корней алгебры $\mathfrak{h}$ относительно $\mathfrak{t}'$, $\Pi' = \{\beta_i\}_{i=1}^k \subset \Delta'$ – система простых корней. В силу регулярности имеется включение $\Delta' \subset \Delta$. Будем считать, что $\tau = \omega h$, где ω – диаграммная инволюция относительно системы Π' , $h \in \exp(\mathfrak{t}'^\omega)$. Это предположение не ограничивает общности при нахождении вещественных форм. Положим $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}(\Pi^\omega)$. Подалгебра $\mathfrak{h}_0$ регулярна в $\mathfrak{h}$, а значит и в $\mathfrak{g}$. Отметим, что автоморфизм τ индуцирует на алгебре $\mathfrak{h}_0$ внутренний автоморфизм. Обозначим через $\mathfrak{c}$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{t}'^\omega$ в $\mathfrak{t}'$. Имеет смысл выделить случай внутренних вещественных форм.

Предложение 18. *Предположим, что $\tau \in \text{Int } \mathfrak{h}$, $\theta \in \text{Int } \mathfrak{g}$. Тогда*

$$\mathcal{E}(\tau, \theta) = \emptyset \iff T \cap \mathcal{E}(\tau, \theta) = \emptyset$$

Доказательство. В одну сторону импликация очевидна. Докажем другую. Пусть множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ не пусто. Тогда $\theta = hz$, где $z \in Z(\mathfrak{h})$. Остается заметить, что элемент z сопряжен элементу тора T некоторым элементом (связной) группы $Z(\mathfrak{t}')$, содержащей $Z(\mathfrak{h})$. $\square$

Теперь поясним, как пользоваться предложением 18. Пусть инволюция τ имеет схему $y = (y^1, \dots, y^k) \in V(\mathfrak{h})$. Она может продолжаться в точности до тех инволюций $x \in V$, для которых разрешима (относительно x) система Γ линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_2$: $\beta_i(x) = y_i$, $i = 1, \dots, k$. Очевидно, совместность Γ не зависит от выбора схемы для τ . В частности, искать неоднородное решение системы Γ можно только для суммы $y \in V(\mathfrak{h})$ базисных элементов f_i , $i = 1, \dots, k$ (или 0) простых идеалов подалгебры $\mathfrak{h}$. Если система Γ невырождена, то всякая внутренняя вещественная форма подалгебры $\mathfrak{h}$ лежит в единственной (с точностью до сопряженности) внутренней вещественной форме алгебры $\mathfrak{g}$. Пространство однородных решений обозначим через $V(\Gamma)$.

Приведем теперь общий критерий, которым удобно пользоваться в случае $\theta \in G$, $Z(\mathfrak{h}) = Z(\mathfrak{h}^\circ)$.

Предложение 19. *Множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ непусто тогда и только тогда, когда существует элемент $\theta' \in \mathcal{E}(\tau|_{\mathfrak{h}_0}, \theta)$, нормализующий T , такой, что $\theta'|_{\mathfrak{c}} = \tau|_{\mathfrak{c}}$.*

Доказательство. Необходимость существования θ' очевидна. Докажем достаточность. Для этого заметим, что автоморфизм, нормализующий систему Δ и подсистему Δ' в ней, нормализует и подалгебру $\mathfrak{h}$. Дальнейшее следует из теоремы 23. $\square$

Ясно, что вместо $\mathfrak{h}_0$ можно использовать любую содержащую ее (полупростую) подалгебру в $\mathfrak{h}^\omega$, регулярную в $\mathfrak{g}$.

Если множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ непусто и группа $Z(\mathfrak{h}_0)$ связна, то автоморфизм θ' из условия предложения 19 действует внутренним автоморфизмом на регулярной подалгебре $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_0)$. Для того чтобы пользоваться предложением 18, осталось научиться находить все элементы модуля $V(\mathfrak{z}_0)$, которым может быть сопряжена инволюция $\theta'|_{\mathfrak{z}_0}$. На этот вопрос отвечает

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^+ \oplus \mathfrak{t}^-$ – ортогональное прямое разложение. Тогда существование такой инволюции $g \in N(T)$, для которой $\mathfrak{t}^\pm$ – собственное подпространство с собственным значением ± 1 , равносильно тому, что $(\mathfrak{t}^-)^* = \langle \Delta^- \rangle$, где $\Delta^- \subset \Delta$ – система корней полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}^-$, для которой инволюция Вейля w является внутренним автоморфизмом. При этом схема v элемента g может быть любой удовлетворяющей условию: автоморфизм $v|_{\mathfrak{t}^-}$ алгебры $\mathfrak{g}^-$ сопряжен w .*

Доказательство. Если такой элемент g существует, то $g \in Z(\mathfrak{t}^+)$. $\square$

Группа $Z(\mathfrak{h})$ как правило связна. Например, верно следующее утверждение.

Предложение 20. Если все корни алгебры $\mathfrak{g}$ имеют одинаковую длину или $\mathfrak{g} = G_2$, то группа $Z(\mathfrak{h})$ связна.

Доказательство. Пусть корни алгебры $\mathfrak{g}$ одной длины либо $\mathfrak{g} = G_2$. Покажем, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{t}')$. Тогда лемма будет следовать из связности группы $Z(\mathfrak{t}')$. Легко видеть, что последнее равенство выполнено, если $\forall \alpha, \beta \in \Delta \alpha \perp \beta \Rightarrow \alpha + \beta \notin \Delta$, что верно в предположениях относительно $\mathfrak{g}$. $\square$

В качестве иллюстрации к сказанному, приведем несколько примеров.

$\mathfrak{g} = G_2$, $\mathfrak{h} = A_2$. Фиксируем систему Π' : $\beta_1 = \alpha_0$, $\beta_2 = \alpha_2$. Вначале рассмотрим случай $\tau \in \text{Int } \mathfrak{h}$. Поскольку, $\alpha_0 = -3\alpha_1 - 2\alpha_2$, имеем $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_1$. Система Γ имеет вид: $x^i = y^i$, $i = 1, 2$. Внутренние вещественные формы алгебры A_2 соответствуют случаям $y = (0, 0)$ и $y = (1, 0)$. Получаем соответственно $x = (0, 0)$ и $x = (1, 0)$. Или, на языке вещественных форм, $\mathfrak{su}_3 \subset G_2^c$, $\mathfrak{su}_{1,2} \subset GI$.

Пусть теперь автоморфизм τ внешний. Тогда $\mathfrak{h}_0 = 0$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{t}$, $(\mathfrak{t}^-)^* = \langle \beta_1 - \beta_2 \rangle$. Поскольку $\frac{1}{3}(\beta_1 - \beta_2) \in \Delta$ и инволюция Вейля алгебры типа A_1 — внутренняя, получаем, что автоморфизм τ реализуется в $\mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \subset GI$. Это можно было установить проще, воспользовавшись очевидной леммой:

Лемма 9. Инволюция Вейля алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{t}$ нормализует подалгебру $\mathfrak{h}$ (и действует на ней инволюцией Вейля).

$\mathfrak{g} = F_4$, $\mathfrak{h} = B_4$. В данном случае все вещественные формы внутренние. Корни $\beta_1 = \alpha_0$, $\beta_2 = \alpha_4$, $\beta_3 = \alpha_3$, $\beta_4 = \alpha_2$ образуют систему Π' . Система Γ : $(x^3, x^4, x^3, x^2) = y$. Как видно, система Γ вырождена, что накладывает некоторые ограничения на вектор $y \in V(\mathfrak{h})$, а именно $y^1 = y^3$. Вещественные формы алгебры B_4 с таким ограничением отвечают элементам 0 , f_2 и f_4 . Соответствующие неоднородные решения: 0 , e_4 и e_2 . Пространство $V(\Gamma)$ одномерно и порождено вектором e_1 . Прибавление этого вектора не меняет значения инварианта f . Это означает, что вещественная форма алгебры B_4 не может лежать одновременно в формах, изоморфных FI и FII . Приведем окончательный список вещественных форм пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$: $(F_4^c, \mathfrak{so}_9)$, $(FII, \mathfrak{so}_9)$, $(FI, \mathfrak{so}_{4,5})$ и $(FII, \mathfrak{so}_{1,8})$.

$\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{h} = 3A_2$. Имеем $\beta_1 = \alpha_0$, $\beta_2 = \alpha_6$, $\beta_3 = \alpha_1$, $\beta_4 = \alpha_2$, $\beta_5 = \alpha_5$, $\beta_6 = \alpha_6$. Найдём внутренние вещественные формы пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Систему Γ удобно записать в виде $(x^0, x^6, x^1, x^2, x^5, x^4) = y$, $x^0 + x^1 + x^3 + x^5 = 0$. Значит, она невырождена. Её решения для векторов $y = f_1, f_1 + f_3, f_1 + f_3 + f_5$

суть $x = e_3, e_1, e_1 + e_3 + e_5$ соответственно. Им отвечают вещественные формы $(EII, \mathfrak{su}_{1,2} + 2\mathfrak{su}_3)$, $(EIII, 2\mathfrak{su}_{1,2} + \mathfrak{su}_3)$, $(EII, 3\mathfrak{su}_{1,2})$ пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Последними исчерпываются все внутренние вещественные формы, потому что перестановка двух простых идеалов подалгебры $\mathfrak{h}$ реализуется в $\mathfrak{g}$. Более точно, всякий реализуемый внешний автоморфизм действует перестановкой двух идеалов и инволюцией Вейля на третьем.

Рассмотрим случай, когда автоморфизм τ внешний, а θ внутренний. Как отмечено выше, достаточно разобрать случай, когда τ переставляет два идеала и действует инволюцией Вейля на третьем. Имеем $\mathfrak{h}_0 = 0$, $\dim \mathfrak{t}^- = 3$, следовательно, подалгебра $\mathfrak{g}^-$ имеет тип $3A_1$. Все регулярные подалгебры такого типа сопряжены в $\mathfrak{g}$. Положим $\Pi^- = \{\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6\}$. Тогда схема автоморфизма θ может быть любой вида $(a, 1, b, 1, c, 1)$. Все такие элементы соответствуют форме EII . Значит, $\mathfrak{sl}_3^{\mathbb{R}} + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \subset EII$.

Случай $\theta \notin G$ будет рассмотрен ниже.

$\mathfrak{g} = E_7$, $\mathfrak{h} = E_6$. Система простых корней $\Pi': \beta_i = \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, 6$. Система $\Gamma: x^{i+1} = y^i$, пространство $V(\Gamma)$ одномерно и порождено вектором e_1 . Неоднородные решения для базисных элементов f_1 и $f_2: x(f_1) = e_2$, $x(f_2) = e_3$. Прибавление к ним вектора e_1 меняет инвариант q_7 . Получаем $E_6^c \subset EVII$, $EIII \subset EVI, EVII$, $EII \subset EV, EVI$ – все внутренние вещественные формы пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Пусть теперь $\tau \notin \text{Int } \mathfrak{h}$. Отметим, что θ действует инверсией на $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = T_1$. Имеем $\mathfrak{h}_0 = A_2$, $\mathfrak{z}_0 = A_5$, $\dim \mathfrak{t}^- = 3$, значит (по лемме 9, автоморфизм τ реализуется в $\mathfrak{g}$), $\mathfrak{g}^- = 3A_1 \subset \mathfrak{z}_0$. Все регулярные подалгебры типа $3A_1$ в A_5 сопряжены. Таким образом автоморфизм θ определяет на $\mathfrak{z}_0$ инволюцию со схемой $(1, 0, 1, 0, 1)$, т.е. определяет форму $\mathfrak{su}_{3,3}$. Осталось классифицировать внутренние вещественные формы пары $(E_7, A_2 + A_5)$ с условием, что форма идеала A_5 изоморфна $\mathfrak{su}_{3,3}$. После рутинной проверки с применением предложения 18 получаем пары $(EVII, \mathfrak{su}_3 + \mathfrak{su}_{3,3})$ и $(EV, \mathfrak{su}_{1,2} + \mathfrak{su}_{3,3})$. Значит, все внешние вещественные формы пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ суть $(EVII, EIV)$ и (EV, EI) .

Докажем обещанную теорему о сведении к случаю $\mathfrak{g} = E_8$. Имеются вложения $E_6 + A_2 \subset E_8$ и $E_7 + A_1 \subset E_8$. Регулярные подалгебры каждого из типов A_1 и A_2 сопряжены в E_8 . Их вещественные формы будем обозначать обычным образом, например, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ или $\mathfrak{su}_2$.

Теорема 34. Пусть $\mathfrak{s}$ – вещественная полупростая алгебра Ли, лежащая

в E_8 . Имеют место следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s} \subset EI &\iff \mathfrak{s} + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \subset EVIII \\
\mathfrak{s} \subset EII &\iff \mathfrak{s} + \mathfrak{su}_3 \subset EIX \\
\mathfrak{s} \subset EIII &\iff \mathfrak{s} + \mathfrak{su}_3 \subset EVIII \\
\mathfrak{s} \subset EIV &\iff \mathfrak{s} + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \subset EIX \\
\mathfrak{s} \subset EV &\iff \mathfrak{s} + \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \subset EVIII \\
\mathfrak{s} \subset EVI &\iff \mathfrak{s} + \mathfrak{su}_2 \subset EVIII, EIX \\
\mathfrak{s} \subset EVII &\iff \mathfrak{s} + \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \subset EVIX.
\end{aligned}$$

Доказательство. Все импликации легко устанавливаются в духе разобранных примеров. Приведем, например, доказательства импликаций, в которых фигурируют внешние вещественные формы, т.е. в первой и четвертой строчках. Имеем $\mathfrak{g} = E_8$, $\mathfrak{h} = E_6 + A_2$. Всякий реализуемый внешний автоморфизм подалгебры $\mathfrak{h}$ действует внешним автоморфизмом на каждом ее простом идеале. Следовательно, $\mathfrak{h}_0 = A_2$, $\mathfrak{z}_0 = E_6$, $\dim \mathfrak{t}^- = 3$. Значит, $\mathfrak{g}^- = 3A_1$, и автоморфизм $\theta|_{\mathfrak{z}_0}$ определяет вещественную форму EII . Стало быть, все сводится к нахождению внутренних вещественных форм пары $(E_8, A_2 + E_6)$ с условием, что вещественная форма подалгебры E_6 изоморфна EII . Дальнейшее очевидно. $\square$

Применим теорему 34 к случаю $\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{h} = 3A_2$, $\theta \notin G$. Для этого найдем все внешние вещественные формы пары $(\mathfrak{g} = E_8, 4A_2 = \mathfrak{h})$. По предложению 17, всякая реализуемая инволюция подалгебры $\mathfrak{h}$ нормализует некоторую максимальную регулярную подалгебру $\mathfrak{m}$, содержащую $\mathfrak{h}$. Значит, алгебра $\mathfrak{m}$ имеет тип $E_6 + A_2$, поэтому всякая реализуемая внешняя инволюция подалгебры $\mathfrak{h}$ действует либо инволюцией Вейля, либо перестановкой двух простых идеалов, внешним автоморфизмом на третьем и внутренним — на четвертом. В первом случае $\mathfrak{h}_0 = 0$, $\dim \mathfrak{t}^- = 4$. Следовательно, $\mathfrak{g}^- = 4A_1$ ($[4A_1]'$ в обозначениях [4]). Значит, всякий автоморфизм из G , действующий внешним автоморфизмом на каждом простом идеале подалгебры $\mathfrak{h}$, определяет на алгебре $\mathfrak{g}$ вещественную форму $EVIII$. По теореме 34 получаем вещественную форму $(EI, 3\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}))$. Во втором случае $\mathfrak{h}_0 = A_2$, $\mathfrak{z}_0 = E_6$, $\dim \mathfrak{t}^- = 3$. Эта ситуация нам уже встречалась в доказательстве теоремы 34. В итоге получаем список вещественных форм пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$: $(EIX, \mathfrak{su}_3 + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) + \mathfrak{sl}_3^{\mathbb{R}})$, $(EVIII, \mathfrak{su}_{1,2} + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) + \mathfrak{sl}_3^{\mathbb{R}})$. Применим теорему 34 и получим все формы исходной пары с $\theta \notin G$: $(EIV, \mathfrak{su}_3 + \mathfrak{sl}_3^{\mathbb{R}})$ и $(EI, \mathfrak{su}_{1,2} + \mathfrak{sl}_3^{\mathbb{R}})$.

Все вещественные формы пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где подалгебра $\mathfrak{h}$ максимальна среди регулярных полупростых подалгебр, указаны в таблицах 2.5–2.9.

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – S -подалгебра.

Предложение 21. Множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ либо пусто, либо состоит из единственной орбиты группы $H = N_G(\mathfrak{h})$.

Доказательство. Необходимым условием для существования двух орбит $H: \mathcal{E}(\tau, \theta)$ является существование двух элементов $\theta_1, \theta_2 \in \text{Aut } \mathfrak{g}$, $\theta_1 \underset{G}{\sim} \theta_2$ таких, что $\theta_1|_{\mathfrak{h}} = \theta_2|_{\mathfrak{h}} = \tau$. В таком случае $G \ni \theta_1\theta_2 = \text{Id}|_{\mathfrak{h}}$. Значит, $\theta_1\theta_2 \in Z_G(\mathfrak{h}) = \{e\}$. Таким образом, $\theta_1 = \theta_2$, и двух орбит для действия $H: \mathcal{E}(\tau, \theta)$ быть не может. $\square$

Решим вопрос об оветствлении S -подалгебр. Всякий внутренний автоморфизм $\mathfrak{h}$ однозначно продолжается до внутреннего автоморфизма $\mathfrak{g}$. Пусть $\varphi: \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ – S -вложение. Выберем картановские подалгебры $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{h}$, $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ так, что $\varphi(\mathfrak{t}_0) \subset \mathfrak{t}$. В работе [4] для каждой S -подалгебры особой алгебры Ли указаны значения $\alpha(\varphi(h_\beta))$ (при некотором выборе систем простых корней $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$ в алгебрах $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$). По этим числам можно без труда находить внутренние оветствления. Например, в случае $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2$ получаем, что инволюция $\mathfrak{h}$ продолжается до инволюции со схемой равной характеристике подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, где вместо 2 стоят 1. В частности вещественная форма главной 3-мерной подалгебры лежит в вещественной форме алгебры $\mathfrak{g}$ со схемой $e_1 + \dots + e_n$. Разберем теперь внешние оветствления для каждой особой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Перечислим основные случаи (остальные с помощью них тривиально разбираются).

Случай $\mathfrak{g} = E_6, \mathfrak{h} = A_2^9$. В первой части нами установлено, что внешний автоморфизм τ подалгебры $\mathfrak{h}$ реализуется в $\mathfrak{g}$. Заметим, что подалгебра $\mathfrak{h}^\tau$ имеет тип A_1 и индекс 36. Минимальная регулярная подалгебра, содержащая A_1^{36} , единственна и сопряжена $A_5 + A_1$. Значит, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \subset E_{III}$. Поскольку подалгебра $\mathfrak{h}$ не содержится в централизаторе внешней инволюции алгебры $\mathfrak{g}$ и внешний автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ переводит $\mathfrak{h}$ в несопряженную подалгебру [4], получаем, что продолжающий автоморфизм θ (для любого τ) может быть только внутренним.

Случай $\mathfrak{g} = E_6, \mathfrak{h} = F_4$. Нужно разобраться только со случаем, когда автоморфизм θ внешний. Пусть $\mathfrak{s}$ обозначает вещественную форму подалгебры $\mathfrak{h}$. По предложению 34, $\mathfrak{s} \subset EI \Leftrightarrow \mathfrak{s} + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \subset EV_{VIII}$ (аналогично для E_{IV} и E_{IX}). Но всякая вещественная форма подалгебры $F_4 + A_2 \subset E_8$ пропускается через вещественную форму S -подалгебры $F_4 + G_2 \subset E_8$ (так как $\mathfrak{z}(F_4) = G_2$). Имея в наличии классификацию оветствлений $F_4 + G_2 \subset E_8$ (они все внутренние) и $A_2 \subset G_2$, получим классификацию для $F_4 + A_2 \subset E_8$. Таким образом получим результат, представленный в таблице 2.7.

Случай $\mathfrak{g} = E_6, \mathfrak{h} = C_4$. Здесь не получится напрямую воспользоваться идеей из предыдущего случая, потому что $\mathfrak{z}_{E_8}(C_4) = A_2$, и как относить оветствования подалгебры $C_4 + A_2 \subset E_8$ к уже разобранным, неясно. Рассмотрим по отдельности каждую вещественную форму подалгебры $\mathfrak{h}$ и выясним, в какой внешней форме алгебры $\mathfrak{g}$ она может содержаться. Ясно, что $\mathfrak{sp}_4 \subset EI$. Пусть $\mathfrak{s} = \mathfrak{sp}_{1,3}$. Заметим, что $\mathfrak{sp}_{1,3} \subset \mathfrak{su}_{2,6} \subset EVII$. Поскольку каждая внешняя форма алгебры E_6 лежит либо в EV либо в $EVII$, получаем, что $\mathfrak{s} \subset EIV$. Аналогично находятся другие оветствования.

Случай $\mathfrak{g} = E_7, \mathfrak{h} = A_2^{21}$. Инволюция Вейля реализует внешний автоморфизм $\mathfrak{h}$, значит, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) \subset EV$.

Случай $\mathfrak{g} = E_8, \mathfrak{h} = A_2^{6'} + A_1^{16}$. Согласно [1], $Z_G(A_1^{16}) \simeq \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathrm{PSL}_3$, значит, внешний автоморфизм подалгебры $\mathfrak{h}$ реализуется элементом порядка 2. Имеем $\theta \in Z_G(A_1^{24}) \simeq \mathrm{SO}_4$, $\mathfrak{z}(A_1^{24}) = A_1^{15} + A_1$. Значит, $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) + \mathfrak{so}_3 \subset EIX$. Поскольку $A_1^{24} + A_1^{15} \subset E_7$ — S-подалгебра, выводим $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) + \mathfrak{so}_3 \subset EVIII$.

Случай $\mathfrak{g} = E_8, \mathfrak{h} = 2G_2 + A_1^8$. Из того, что $Z_G(A_1^8) = \mathbb{Z}_2 \ltimes (G_2 \times G_2)$, получаем, что внешняя форма подалгебры $\mathfrak{h}$ лежит в некоторой форме алгебры $\mathfrak{g}$. Имеем $Z_G(G_2^2) = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SO}_3$, $\mathfrak{z}(G_2^2) = A_1 + A_1^7$. Осталось, как и в предыдущем случае, воспользоваться тем, что $G_2^2 + A_1^7 \subset E_7$ — S-подалгебра. Все вещественные формы пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где подалгебра $\mathfrak{h}$ — максимальная S-подалгебра или $2G_2^1 + A_1^8 \subset E_8$, указаны в таблицах 2.5–2.9.

Слои отображения ν''

Описание слоев отображения ν'' сводится к вопросу о R -сопряженности G -сопряженных подалгебр из $\mathcal{S}[\mathfrak{r}]$.

Пусть $(\mathfrak{r}, \mathfrak{s})$ — вещественная форма пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\theta \in \mathrm{Aut} \mathfrak{r}$, $\tau \in \mathrm{Aut} \mathfrak{s}$ — инволюции Картана.

Теорема 35. *Точки слоя $F''(G\mathfrak{s})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с орбитами действия $N: \mathcal{E}(\tau, \theta)$, $N = N_G(\mathfrak{h})$.*

Теорема 35 является видоизменением результата, сформулированного в §1 главы 4 работы [6]. Мы приведем собственное доказательство этого факта. Классу R -сопряженности C сопоставим орбиту O_C указанного в теореме действия следующим образом. Выберем произвольную θ -инвариантную подалгебру $\mathfrak{s}_1 \in C$. Найдется автоморфизм $\varphi \in G$ такой, что $\varphi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}$. Положим $\theta_1 = \varphi\theta\varphi^{-1}$ и $O_C = N_G(\mathfrak{h})\theta_1$. Проверим корректность сопоставления $C \mapsto O_C$. Пусть $\mathfrak{s}_2 \in C$ — другая θ -инвариантная подалгебра и $\psi\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}$, $\psi \in G$. Поскольку подалгебры $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ R -сопряжены в $\mathfrak{r}$, найдется автоморфизм $\alpha \in G^\theta$ такой, что $\alpha\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2$. Имеем $\theta_2 = \psi\theta\psi^{-1} =$

$\psi\alpha\theta\alpha^{-1}\psi^{-1} = \psi\alpha\varphi^{-1}\theta_1\varphi\alpha^{-1}\psi^{-1} \in N_G(\mathfrak{h})\theta_1$, поскольку $\psi\alpha\varphi^{-1}\mathfrak{s} = \psi\alpha\mathfrak{s}_1 = \psi\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{s}$. Корректность установлена. Сопоставим теперь каждой орбите O действия $N_G(\mathfrak{h}): \mathcal{E}(\tau, \theta)$ класс R -сопряженности C_O подалгебры $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$. Пусть $\theta_1 \in O$ — автоморфизм, нормализующий максимальную компактную подалгебру $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$. По определению множества $\mathcal{E}(\tau, \theta)$, существует автоморфизм $\varphi \in G$ со свойством $\varphi\theta\varphi^{-1} = \theta_1$. Можно считать, что $\varphi\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$, следовательно, можно считать, что $\mathfrak{s}_1 = \varphi^{-1}\mathfrak{s} \in \mathfrak{r}$. Полагаем C_O — класс R -сопряженности подалгебры $\mathfrak{s}_1 \subset \mathfrak{r}$.

В частности, если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — S -подалгебра, то, ввиду того, что множество $\mathcal{E}(\tau, \theta)$ состоит не более, чем из одного элемента, получаем:

Теорема 36. *Если $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$ — вещественная форма S -подалгебры в $\mathfrak{g}$, то слой $F''(G\mathfrak{s})$ одноэлементен.*

Очевидно, группу N в формулировке теоремы 35 можно заменить на ее подгруппу элементов, коммутирующих с τ .

Теорема 37. *Пусть $\mathfrak{h} = (\mathfrak{g}^\sigma)'$, где σ — инволютивный автоморфизм. Тогда слои отображения ν'' одноэлементны.*

Утверждение равносильно тому, что если две инволюции σ_1 и $\sigma_2 = \sigma_1\sigma = \sigma\sigma_1$ алгебры $\mathfrak{g}$ внутренне сопряжены, то они сопряжены элементом, нормализующим $\mathfrak{h}$. Докажем последнее утверждение.

Пусть X — симметрическое пространство группы $G = \text{Int } \mathfrak{g}$.⁸ В силу тривиальности нормальных подгрупп в G , действие $G: X$ эффективно. Через $\sigma_x \in \text{Isom } X$ обозначим симметрию относительно точки $x \in X$.

Лемма 10. *Пусть $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$ — геодезическая, $P: \mathbb{R} \rightarrow G^\circ$ — однопараметрическая группа (параллельных) сдвигов вдоль γ , $P(t)\gamma(0) = \gamma(t)$. Предположим, что точки $x, y \in \text{Im } \gamma$ таковы, что $\sigma_x\sigma_y = \sigma_y\sigma_x$. Положим $\sigma = \sigma_x\sigma_y$, $p \in \text{Im } P$ — сдвиг из точки x в точку y . Тогда*

$$(1) \quad P(t) = \exp t\xi, \text{ где } \xi \in \mathfrak{g}, \sigma_x\xi = \sigma_y\xi = -\xi, \sigma\xi = \xi;$$

$$(2) \quad p^2 = \sigma \text{ (в частности, } py = x, \text{ значит, кривая } \gamma \text{ замкнута)}.$$

Доказательство. Свойство (1) следует из описания сдвигов вдоль геодезических симметрического пространства. Далее, $p^2 = p(\sigma_x p^{-1} \sigma_x) = (p\sigma_x p^{-1})\sigma_x = \sigma_y\sigma_x = \sigma$, что доказывает (2). $\square$

⁸Основные понятия теории симметрических пространств см. в []

Следствие. Если два коммутирующих инволютивных автоморфизма σ_1, σ_2 группы G сопряжены элементом из G° , то они сопряжены и элементом из G^σ .

Теорема 37 доказана. Отсюда легко получить следующий интересный результат.

Теорема 38. Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}(\mathbb{C})$ — максимальная полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$ (максимальная среди полупростых), то слой $\mathcal{F}''(G\mathfrak{s})$ одноэлементен.

Доказательство. Всякая максимальная подалгебра является либо S-подалгеброй, либо регулярной вида $(\mathfrak{g}^\sigma)'$, σ — автоморфизм простого порядка p . Ввиду доказанных выше теорем, остается рассмотреть случай $\mathfrak{h} = (\mathfrak{g}^\sigma)'$, $p \neq 2$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{E}(\tau, \theta)$. Тогда $\sigma_2 = \sigma_1 \sigma = \sigma^{-1} \sigma_1$. Поскольку p нечетно, существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $\sigma^{2n} = \sigma^{-1}$. Следовательно, $\sigma^n \sigma_1 \sigma^{-n} = \sigma^{2n} \sigma_1 = \sigma_2$, т. е. σ_1 и σ_2 сопряжены элементом, централизующим (в частности, нормализующим) $\mathfrak{h}$. $\square$

Ввиду теорем 38 и 35, остается рассмотреть только пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 1-го и 6-го типов.

Пусть $\mathfrak{g}$ — классическая алгебра Ли. Опять же, все сводится к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Действительно, всякая вещественная форма $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ содержится во внутренней вещественной форме $\tilde{\mathfrak{r}}$ алгебры $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$: $\mathfrak{so}_n^s \subset \mathfrak{su}_n^s$, $\mathfrak{u}_m^*(\mathbb{H}) \subset \mathfrak{su}_n^0$, $\mathfrak{sp}_m^s \subset \mathfrak{su}_n^{2s}$, $n = 2m$, $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{su}_n^0$. Следующая теорема есть следствие теоремы XII работы [6]. Положим $\tilde{R} = \text{Aut } \tilde{\mathfrak{r}}$.

Теорема 39. Две подалгебры из $\mathcal{S}[\mathfrak{r}]$ R -сопряжены тогда и только тогда, когда они $\tilde{R}$ -сопряжены.

Иными словами, существует естественная биекция между слоями ν'' и $\tilde{\nu}'': \mathcal{S}[\tilde{\mathfrak{r}}]/\tilde{R} \rightarrow \mathcal{S}[\tilde{\mathfrak{r}}]/\tilde{G}$, $G = \tilde{R}(\mathbb{C})$.

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ — регулярная подалгебра. Из теоремы XI (и ее доказательства) работы [6] выводится

Теорема 40. Если $\mathfrak{r}$ — внешняя форма $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, то слои ν'' одноэлементны. Пусть $\mathfrak{r} = \mathfrak{su}_n^s$ и $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{r}$ задана набором $q_1, \dots, q_k \in \{\pm 1\}$ ⁹. Пусть $\tilde{\mathfrak{s}} \subset \mathfrak{r}$ — подалгебра, заданная набором $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_k$. Имеем $\mathfrak{s} \tilde{R} \tilde{\mathfrak{s}}$ тогда и только тогда, когда существует перестановка идеалов $\mathfrak{sl}_{n_i}(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{h}$, $1 \leq i \leq k$, индуцирующая перестановку проективных точек $(q_1 : \dots : q_k)$ и $(\tilde{q}_1 : \dots : \tilde{q}_k)$.

⁹См. обозначения в теореме 32.

2.5 Группа автоморфизмов полупростой вещественной алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{r}$ — полупростая вещественная алгебра Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathbb{C})$. Тогда имеется естественное вложение $\text{Aut } \mathfrak{r} \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$.¹⁰ В частности, размерность алгебры Ли $\text{Der } \mathfrak{r} = \text{Lie}(\text{Aut } \mathfrak{r})$ равна (комплексной) размерности алгебры Ли $\text{Der } \mathfrak{g} = \text{Lie}(\text{Aut } \mathfrak{g})$. Из $\text{ad } \mathfrak{r} \subset \text{Der } \mathfrak{r}$ и $\text{ad } \mathfrak{g} = \text{Der } \mathfrak{g}$ следует, что $\text{ad } \mathfrak{r} = \text{Der } \mathfrak{r}$. Иначе говоря, верно

Предложение 22. $\text{Int } \mathfrak{r} = (\text{Aut } \mathfrak{r})^\circ$.

Обозначим через $\text{QAut } \mathfrak{r}$ и $\text{Int } \mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$ алгебраические замыкания $\text{Int } \mathfrak{r}$ в $\text{Aut } \mathfrak{r}$ и $\text{Aut } \mathfrak{g}$ соответственно. Тогда $\text{QAut } \mathfrak{r} = \text{Int } \mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \cap \text{Aut } \mathfrak{r}$.

Предложение 23. $\text{Int } \mathfrak{r}_{\mathbb{C}} = \text{Int } \mathfrak{g}$.

Доказательство. Действительно, включение $\text{Int } \mathfrak{r}_{\mathbb{C}} \subset \text{Int } \mathfrak{g}$ следует из включения $\text{Int } \mathfrak{r} \subset \text{Int } \mathfrak{g}$ и алгебраичности $\text{Int } \mathfrak{g}$. Обратное включение вытекает из неприводимости $\text{Int } \mathfrak{g}$ и равенства размерностей обеих частей. $\square$

Итак, группа $\text{QAut } \mathfrak{r} = \text{Int } \mathfrak{g} \cap \text{Aut } \mathfrak{r} = N_{\text{Int } \mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ является группой квазинутренних (в смысле работы [6]) автоморфизмов $\mathfrak{r}$. Как мы увидим, она не всегда совпадает с $\text{Int } \mathfrak{r}$; иными словами, подгруппа Ли $\text{Int } \mathfrak{r} \subset \text{Aut } \mathfrak{r}$ может не являться алгебраической.

Подгруппа $\text{QAut } \mathfrak{r} \subset \text{Aut } \mathfrak{r}$ нормальна (поскольку подгруппа $\text{Int } \mathfrak{g} \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$ нормальна). Вложение $\text{Aut } \mathfrak{r} \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$ продолжается до вложения факторгрупп $\varphi: \text{Aut } \mathfrak{r} / \text{QAut } \mathfrak{r} \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g} / \text{Int } \mathfrak{g}$. Фиксируем инволюцию Картана θ алгебры $\mathfrak{r}$ и найдем образ φ в терминах $\mathfrak{g}$ и θ .

Предложение 24. $\sigma \text{Int } \mathfrak{g} \in \text{Im } \varphi$ тогда и только тогда, когда $\sigma \theta \sigma^{-1} \sim \theta$.

Доказательство. Если автоморфизм $t\sigma$, $t \in \text{Int } \mathfrak{g}$, нормализует $\mathfrak{r}$, то он коммутирует с некоторой ее инволюцией Картана θ' . Тогда $\sigma \theta' \sigma^{-1} \sim \theta'$ и, в силу $\theta' \sim \theta$ получаем $\sigma \theta \sigma^{-1} \sim \theta$. $\square$

Иначе говоря, $\sigma \text{Int } \mathfrak{g} \in \text{Im } \varphi$ тогда и только тогда, когда подалгебры $\mathfrak{r}, \sigma(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{g}$ сопряжены. Из результатов раздела 2.2 и предложения 24 получаем

¹⁰Вообще говоря, комплексное алгебраическое замыкание подгруппы $\text{Aut } \mathfrak{r} \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$ не совпадает с $\text{Aut } \mathfrak{g}$, т. е. $(\text{Aut } \mathfrak{r})(\mathbb{C}) \neq \text{Aut}(\mathfrak{r}(\mathbb{C}))$, в отличие от $(\text{Int } \mathfrak{r})(\mathbb{C}) = \text{Int}(\mathfrak{r}(\mathbb{C}))$ (см. далее). Это уже видно в случае наличия на $\mathfrak{r}$ комплексной структуры: тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_1 \oplus \mathfrak{r}^1$, $\mathfrak{r}_1 \simeq \mathfrak{r}^1 \simeq \mathfrak{r}$, и перестановка идеалов $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}^1$ не индуцируется никаким элементом из $\text{Aut } \mathfrak{r}$.

Следствие 4. Если алгебра $\mathfrak{g}$ проста, то φ — изоморфизм, за исключением случая $\mathfrak{r} \simeq \mathfrak{u}_{2n}^*(\mathbb{H})$, $n \geq 2$. При этом $|\mathrm{Im} \varphi| = 2$, если $n = 2$, и $|\mathrm{Im} \varphi| = 1$, если $n \geq 3$.

Группа $\mathrm{Out} \mathfrak{g} = \mathrm{Aut} \mathfrak{g} / \mathrm{Int} \mathfrak{g}$ изоморфна группе изометрий диаграммы Дынкина алгебры $\mathfrak{g}$ и вкладывается в $\mathrm{Aut} \mathfrak{g}$ (см. [3], глава 4, § 4). Таким образом, $G = \mathrm{Aut} \mathfrak{g} = \mathrm{Out} \mathfrak{g} \ltimes \mathrm{Int} \mathfrak{g}$. Рассмотрим группу $\hat{G} = \mathrm{Out} \mathfrak{g} \ltimes \hat{\mathrm{Int}} \mathfrak{g}$ (полупрямое произведение определяется естественным образом: всякий автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ однозначно поднимается до автоморфизма соответствующей односвязной группы) с проекцией $\pi: \hat{G} \rightarrow G$. Положим $Z = \mathrm{Ker} \pi = Z(\hat{G}^\circ)$ и $F_\theta = \pi^{-1}(\theta)$, $\theta \in G$.

Фиксируем инволюцию Картана θ алгебры $\mathfrak{r}$. Опишем группу $\mathrm{Out} \mathfrak{r}$ в терминах F_θ .

Предложение 25. Существует эффективное действие $\mathrm{Out} \mathfrak{r}: F_\theta$.

В каждом классе $\sigma \mathrm{Int} \mathfrak{r} \in \mathrm{Out} \mathfrak{g}$ есть представитель σ' , коммутирующий с θ . Пусть $\hat{\sigma} \in \pi^{-1}(\sigma')$ — некоторый прообраз. Тогда положим

$$(\sigma \mathrm{Int} \mathfrak{r})f = \hat{\sigma} f \hat{\sigma}^{-1}, \quad f \in F_\theta.$$

Очевидно, что $(\sigma \mathrm{Int} \mathfrak{r})F_\theta = F_\theta$ и определение не зависит от выбора прообраза σ' . Докажем, что оно не зависит и от выбора σ' . Это равносильно тому, что $\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}^{-1} = \hat{\theta}$, где $t \in \mathrm{Int} \mathfrak{r}$, $t\theta = \theta t$, $\hat{t}, \hat{\theta}$ — некоторые прообразы в $\hat{G}$. Группа $Z_{\mathrm{Int} \mathfrak{r}}(\theta)$ компактна и связна. Следовательно, можно считать $\hat{t} = \exp h$, $h \in \mathfrak{r}^\theta$. Тогда $\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}^{-1} = \hat{\theta}(\exp \theta(h))\hat{\theta}^{-1} = \hat{\theta}$, что и требовалось. Докажем эффективность. Пусть $\hat{\sigma} f \hat{\sigma}^{-1} = f$ для всех $f \in F_\theta$. В частности, $\hat{\sigma}$ тривиально действует на Z , откуда следует, что $\hat{\sigma}$ принадлежит связной группе $(\hat{G}^\circ)^\theta$. Значит, $\sigma \in \mathrm{Int} \mathfrak{r}$. Предложение 25 доказано.

Таким образом, группу $\mathrm{Out} \mathfrak{r}$ можно отождествить с подгруппой $S(F_\theta)$ перестановок точек слоя отображения π . Отметим еще одно полезное утверждение. Поскольку в каждом классе факторгруппы $\mathrm{Out} \mathfrak{r}$ существует элемент, коммутирующий с θ , естественно возникает гомоморфизм

$$\psi: \mathrm{Out} \mathfrak{r} \rightarrow \mathrm{Out} \mathfrak{k} = \mathrm{Out} \mathfrak{h},$$

где $\mathfrak{k} = \mathfrak{r}^\theta$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\theta = \mathfrak{k}(\mathbb{C})$.

Предложение 26. Ядро гомоморфизма ψ порождено классами инволюций Картана простых идеалов $\mathfrak{r}$. В частности, ограничение ψ на $\mathrm{QOut} \mathfrak{r}$ является вложением.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение в случае простой алгебры $\mathfrak{r}$. Ясно, что $\theta \in \text{Ker } \psi$. Обратно, пусть $\sigma \in \text{Aut } \mathfrak{r}$ и $\sigma|_{\mathfrak{k}} \in \text{Int } \mathfrak{k}$. Докажем, что $\sigma \in \theta \text{Int } \mathfrak{r}$. Домножив σ на элемент из $\text{Int } \mathfrak{k}$, можно считать, что $\mathfrak{k} \in \mathfrak{r}^\sigma$, или $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\theta \in \mathfrak{g}^\sigma$. Но $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — максимальная редуктивная подалгебра (тут важна простота $\mathfrak{r}$), следовательно $\sigma = \theta h$, $h \in Z(\text{Int } \mathfrak{k})$. $\square$

В случаях $\mathfrak{r} = \mathfrak{su}_{n,n}, \mathfrak{sp}_{2n,2n}, \mathfrak{so}_{n,n}, \mathfrak{so}_{2n,m}, \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), \mathfrak{u}_{2n}^*(\mathbb{H}), EV$ и $EVII$ имеем соответственно $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) + \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) + \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) + \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) + \mathfrak{so}_m(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}), \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), A_7$ и $E_6 + T_1$. Группа $\mathfrak{S}\psi|_{\text{QOut } \mathfrak{r}}$ в этих случаях нетривиальна: внешние автоморфизмы $\mathfrak{h}$ реализуются в $\mathfrak{g}$. Например, внешним квазивнутренним автоморфизмом $\mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R})$ является сопряжение матрицей $\text{diag}\{-1, 1, \dots, 1\}$. Знание групп $N_{\text{Int } \mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ позволяет вывести

Следствие 5. *Группа внешних квазивнутренних автоморфизмов простой алгебры Ли $\mathfrak{r}$ нетривиальна только в следующих случаях: $\mathfrak{r} = \mathfrak{su}_{n,n}, \mathfrak{sp}_{2n,2n}, \mathfrak{so}_{n,n}, \mathfrak{so}_{2n,m}$ ($m \geq 1$), $\mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{R}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}), \mathfrak{u}_{2n}^*(\mathbb{H}), EV$ и $EVII$. При этом $\text{QOut } \mathfrak{r} \simeq \mathbb{Z}_2$ за исключением случая $\mathfrak{r} = \mathfrak{so}_{2n,2n}$: $\text{QOut } \mathfrak{r} \simeq \mathbb{V}_4$.*

Перебором простых алгебр $\mathfrak{r}$ с использованием предложения 26 устанавливается

Следствие 6. $\text{Out } \mathfrak{r} \simeq J \ltimes \text{QOut } \mathfrak{r}$, где J — подгруппа в $\text{Out } \mathfrak{g}$.

Отметим еще одну интерпретацию группы $\text{QOut } \mathfrak{r}$. Пусть $\pi: G \rightarrow \text{Int } \mathfrak{g}$ — односвязное накрытие, $Z = Z(G) (= \text{Ker } \pi)$. Пусть θ — инволюция Картана алгебры $\mathfrak{r}$ с множеством неподвижных точек $\mathfrak{k}$. Она однозначно продолжается до автоморфизма группы G , который мы также обозначим θ . Положим $Z(\mathfrak{r}) = \{\theta(z)z^{-1}, z \in Z\}$ — подгруппа в Z (не зависит от выбора θ).

Предложение 27. *Существует мономорфизм $\zeta: \text{QOut } \mathfrak{r} \hookrightarrow Z/Z(\mathfrak{r})$.*

Пусть $s \in \text{QOut } \mathfrak{r}$ и $\sigma \in \text{QAut } \mathfrak{r}$ — представитель s , нормализующий $\mathfrak{k}$. Положим $\zeta(s) = \theta(\hat{\sigma})\hat{\sigma}^{-1}Z(\mathfrak{r})$, где $\hat{\sigma} \in \pi^{-1}(\sigma)$ — некоторый прообраз. Из соотношения $\sigma\theta = \theta\sigma$ выводим $\theta(\hat{\sigma}) \in \hat{\sigma}Z$, следовательно, $\theta(\hat{\sigma})\hat{\sigma}^{-1} \in Z$. Корректность определения ζ , а также то, что ζ — гомоморфизм, проверяется без труда. Докажем мономорфность. Пусть $\zeta(s) = 1$, т. е. $\theta(\hat{\sigma})\hat{\sigma}^{-1} = \theta(z)z^{-1}$ для некоторого $z \in Z$. Тогда $z^{-1}\hat{\sigma} \in G^\theta$. В силу связности G^θ элемент $z^{-1}\hat{\sigma}$, а следовательно, и σ действует на $\mathfrak{h}$ внутренним автоморфизмом. Как было показано выше, отсюда вытекает $s = 1$. Предложение 27 доказано.

В частности, если $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ — внутренняя форма, то $Z(\mathfrak{r}) = \{1\}$ и $\text{QOut } \mathfrak{r}$ отождествляется с подгруппой Z . Для подгруппы $G_2 \subset \text{QOut } \mathfrak{r}$ обозначим через Z_{G_2} прообраз $\zeta(G_2)$ в Z .

Пусть теперь $\mathfrak{s} \in \mathfrak{r}$ — полупростая подалгебра, $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}(\mathbb{C})$, H — односвязная группа с касательной алгеброй $\mathfrak{h}$, $\varphi: H \rightarrow G$ — гомоморфизм, накрывающий вложение $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $Y = Z(H)$. Пусть $G_2 \subset \text{QOut } \mathfrak{r}$ — подгруппа и $\tilde{G}_2$ — ее прообраз в $\text{Aut } \mathfrak{r}$. Положим $\tilde{\Delta} \subset \text{Aut } \mathfrak{s}$ — подгруппа автоморфизмов, индуцированных элементами $N_{\tilde{G}_2}(\mathfrak{s})$, Δ — образ $\tilde{\Delta}$ в $\text{QOut } \mathfrak{s}$.

Предложение 28. $Y_\Delta = \varphi^{-1}(Z_{G_2})$.

Таким образом, задача нахождения Δ сводится к описанию подгруппы $\varphi^{-1}(Z) \subset Y$.

2.6 Вложения между особыми вещественными алгебрами Ли

Докажем (частично) теорему 10. Существование овеществлений, соединенных ребрами, в некоторых случаях установлено в предыдущем разделе. Разберем оставшиеся случаи: $G_2 \subset D_4, D_4 \subset F_4, E_4$. Для первого случая нужно заметить, что $GI \subset \mathfrak{so}_{3,4} \subset DI, DII$, для второго — $DI, DII \subset \mathfrak{so}_{4,5} \subset FI, DIV, D^c \subset \mathfrak{so}_{1,8} \subset FII$. Наконец, $DIII \subset \mathfrak{so}_{4,6} \subset EII, DIII \subset \mathfrak{so}_{2,8} \subset EIII$.

Рассмотрим теперь цепочку $C' = C - F_4$. Докажем, что всякое овеществления включения $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ подалгебр из C' пропускается через овеществление связной подцепочки из C' с концами $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{h} = G_2$. Докажем, что всякая инволюция θ алгебры $\mathfrak{g}$ нормализует подалгебру типа D_4 . Автоморфизм θ нормализует некоторую картановскую подалгебру $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, а значит, и регулярную подалгебру $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{h}$. Очевидно, что последняя имеет тип D_4 .

Пусть $\mathfrak{h} = D_4$. Докажем, что всякая инволюция θ алгебры $\mathfrak{g}$ нормализует подалгебру типа E_6 . Если $\mathfrak{g} = E_8$, то это следует из того, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = D_4$ и всякая инволюция D_4 нормализует некоторую регулярную подалгебру типа A_2 (всякая форма алгебры D_4 содержит некоторую форму A_2). Для $\mathfrak{g} = E_7$ немного хитрее: автоморфизм θ нормализует подалгебру $\mathfrak{z}(D_4) = 3A_1$, а значит, диагонально вложенную в нее типа подалгебру A_1 . В обозначениях Дынкина, это $A_1^{3''}$ с нормализатором $\text{SO}_3 \times F_4$. Остается заметить, что централизатор элемента второго порядка подгруппы SO_3 может иметь только тип $E_6 + T_1$.

Всякое овеществление вложения $E_6 \subset E_8$ пропускается через овеществление $E_7 \subset E_8$. Это следует предложения 17. Таким образом, для доказа-

тельства первой части теоремы, осталось разобраться со случаями $\mathfrak{g} = F_4$ и $\mathfrak{h} = F_4$ (возвращаемся к цепочке C).

Если $\mathfrak{g} = F_4$, то, принимая во внимание, что $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \simeq \mathrm{SO}_3$, получаем, что автоморфизм θ нормализует некоторую подгруппу $\mathbb{V}_4 \subset \mathrm{SO}_3$. Ясно, что $\mathfrak{g}_4^{\mathbb{V}} = D_4$. Значит, автоморфизм θ нормализует подалгебру $D_4 \supset \mathfrak{h}$, что и требовалось.

Наконец, пусть $\mathfrak{h} = F_4$. Докажем, что всякая инволюция θ алгебры $\mathfrak{g}$ нормализует подалгебру типа E_6 . В случае $\mathfrak{g} = E_7$ мы это уже видели выше. Пусть $\mathfrak{g} = E_8$. Тогда автоморфизм θ нормализует $G_2 = \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Поскольку во всякой форме алгебры G_2 содержится некоторая форма подалгебры A_2 , получаем, что θ нормализует некоторую подалгебру $A_2 \subset G_2$, а значит, и $E_6 = \mathfrak{z}(A_2)$.

2.7 Таблицы

Таблица 2.3: μ -примитивные подалгебры особых комплексных алгебр Ли

G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$A_1 + \tilde{A}_1,$ $A_2,$	$A_1 + C_3, B_4,$ $A_2 + \tilde{A}_2,$	$A_1 + A_5, D_5,$ $3A_2$	$A_7, A_1 + D_6, E_6,$ $A_2 + A_5,$	$D_8, A_1 + E_7,$ $A_8, A_2 + E_6,$ $2A_4,$
	$D_4,$	$D_4,$	$D_4 + 3A_1, 7A_1,$ $D_4^2,$	$2D_4, 8A_1,$ $4A_2, A_1^{40},$
A_1^{28}	$G_2^1 + A_1^8,$ A_1^{156}	$C_4^1, F_4^1,$ $A_2^9, G_2^3,$ $G_2^1 + A_2^{2''}$	$G_2^1 + C_3^{1''}, A_1^{399},$ $F_4^1 + A_1^{3''}, A_1^{231},$ $G_2^2 + A_1^7, A_2^{21},$ $A_1^{24} + A_1^{15}$	$A_1^{1240}, A_1^{760}, A_1^{520},$ $G_2 + F_4, B_2^{12},$ $2G_2^1 + A_1^8,$ $A_2^{6'}(2) + A_1^{16}$

Таблица 2.4: $\mu(\mathfrak{h})$ для изотипных подалгебр $\mathfrak{h}$ алгебр Ли F_4, E_6, E_7 и E_8

$\mathfrak{h}$	F_4	E_6	E_7	E_8
A_1^1	$A_1 + C_3$ 2, 1	$A_1 + A_5$ 2, 1	$A_1 + D_6$ 2, 1	$A_1 + E_7$ 2, 1
$2A_1^1$	B_4	D_5	$A_1 + D_6$	D_8

	4	4	1, 4	4
$[3A_1^1]'$	$A_1 + C_3$ 1, 2 ₃	$A_1 + A_5$ 1, 2 ₃	$A_1 + D_6$ 1, 2 ₆	$A_1 + E_7$ 1, $[3A_1^1]''$
$[3A_1^1]''$			$3A_1 + D_4$ 2, 2, 2, 1	
$[4A_1^1]'$	D_4 4 ₂	D_4 4 ₂	$D_4 + 3A_1$ 4 ₂ , 1, 1, 1	D_8 2 ₈
$[4A_1^1]''$			$A_1 + D_6$ 2, 2 ₆	
$5A_1^1$			$A_1 + D_6$ 2, 4 ₂	$A_1 + E_7$ 2, $[4A_1^1]'$
$6A_1^1$			$A_1 + D_6$ 1, 4 ₃	D_8 4 ₃
$7A_1^1$			$7A_1$	$A_1 + E_7$ 1, $7A_1^1$
$8A_1^1$				$8A_1$
A_1^2	B_4 3	D_5 3	$A_1 + D_6$ 1, 3	D_8 3
$[2A_1^2]'$	B_4 3 ₂	D_5 3 ₂	$A_1 + D_6$ 1, 3 ₂	D_8 3 ₂
$[2A_1^2]''$			$A_1 + D_6$ 2, 2 ₂ + 2 ₄	D_8 2 ₈
$3A_1^2$	B_4 3 ₃	D_5 3 ₃	$A_1 + D_6$ 1, 3 ₃	D_8 3 ₃
$4A_1^2$			$A_1 + D_6$ 1, 3 ₄	D_8 3 ₄
$5A_1^2$				D_8 3 ₅
$A_1^{3'}$	$A_1 + C_3$	$A_1 + A_5$ 1, 2 ₃	$A_1 + D_6$ 1, 2 ₆	$A_1 + E_7$ 1, $A_1^{3''}$
$[2A_1^{3'}]'$		D_5 4 + 3 ₂	$A_1 + D_6$ 1, 4 + 3 ₂	D_8 4 + 3 ₂
$[2A_1^{3'}]''$			$A_1 + D_6$ 1, 4 ₃	D_8 4 ₃
$A_1^{3''}$			$A_1^{3''} + F_4$ 2, 1	

$A_1^{4'}$	$A_2 + \tilde{A}_2$ 3, 1	$3A_2$ 3, 1, 1	$A_2 + A_5$ 3, 1	D_8 1, 2 ₈
$2A_1^{4'}$		$3A_2$ 3, 3, 1	$A_2 + A_5$ 1, 3 ₂	D_8 4 ₄
$3A_1^{4'}$		$3A_2$ 3, 3, 3	$A_2 + A_5$ 3, 3 ₂	D_8 8 ₂
$4A_1^{4'}$				D_8 16
$A_1^{4''}$			$A_1 + D_6$ 2, 2 ₆	$A_2 + E_6$ 3, 1
$2A_1^{4''}$				$4A_2$ 3, 3, 1, 1
$3A_1^{4''}$				$A_2 + E_6$ 1, 3 $A_1^{4''}$
$4A_1^{4''}$				$4A_2$ 3, 3, 3, 3
A_1^5		$A_1 + A_5$ 2, 3	$A_1 + D_6$ 2, 3 ₂	$A_1 + E_7$ 2, $A_1^{4'}$
$2A_1^5$				D_8 4 + 3 ₄
A_1^6	B_4 3 ₃	D_5 3 ₃	$A_1 + D_6$ 1, 3 ₃	D_8 3 ₃
$2A_1^6$	B_4 9	D_5 9	$A_1 + D_6$ 1, 9	D_8 9
A_1^7			$A_1^7 + G_2^2$ 2, 1	$A_1 + E_7$ 1, A_1^7
$2A_1^7$				D_8 9 + 4
A_1^8	$A_1^8 + G_2^1$ 2, 1	F_4 A_1^8	$F_4 + A_1^{3''}$ $A_1^8, 1$	$A_1^8 + 2G_2$ 2, 1, 1
$2A_1^8$				$4A_2$ 3, 3, 3, 3
A_1^9	$A_1 + C_3$ 2, 3 ₂	$A_1 + A_5$ 2, 3 ₂	$A_1 + D_6$ 2, 3 ₄	$A_1 + E_7$ 2, A_1^8
$A_1^{10'}$	B_4	D_5	$A_1 + D_6$	D_8

	5	5	1, 5	5
$A_1^{10''}$				D_8 3_5
$A_1^{11'}$	$A_1 + C_3$ $1, 4 + 2$	$A_1 + A_5$ $1, 4 + 2$	$A_1 + D_6$ $1, 4_2 + 2_2$	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{11''}$
$2A_1^{11}$				D_8 $5_2 + 4$
$A_1^{11''}$			$A_1 + D_6$ $2, 5$	
$A_1^{12'}$	D_4 $5 + 3$	D_4 $5 + 3$	$D_4 + 3A_1$ $5 + 3, 1, 1, 1$	$2D_4$ $5 + 3, 1$
$2A_1^{12'}$				$2D_4$ $5 + 3, 5 + 3$
$A_1^{12''}$			$A_1 + D_6$ $2, 4_2 + 2_2$	D_8 $4_2 + 2_4$
$2A_1^{12''}$				D_8 8_2
A_1^{13}			$A_1 + D_6$ $2, 5 + 3$	$A_1 + E_7$ $2, A_1^{12'}$
A_1^{14}			$A_1 + D_6$ $1, 5 + 3_2$	D_8 $5 + 3_2$
A_1^{15}			$A_1^{15} + A_1^{24}$ $2, 1$	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{15}$
A_1^{16}				$A_1^{16} + A_2^{6'}(2)$ $2, 1$
$A_1^{20'}$		$A_1 + A_5$ $1, 5$	$A_2 + A_5$ $1, 5$	D_8 4_4
$2A_1^{20'}$				D_8 16
$A_1^{20''}$				$2A_4$ $1, 5$
$2A_1^{20''}$				$2A_4$ $5, 5$
A_1^{21}		$A_1 + A_5$ $2, 5$	$A_1 + D_6$ $2, 5_2$	$A_1 + E_7$ $2, A_1^{20}$
A_1^{22}				D_8

				$5_2 + 3$
A_1^{24}			$A_1^{24} + A_1^{15}$ $2, 1$	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{24}$
A_1^{25}				$A_1 + E_7$ $2, A_1^{24}$
A_1^{28}	$G_2 + A_1^8$ $7, 1$	F_4 A_1^{28}	$F_4 + A_1^{3''}$ $A_1^{28}, 1$	$F_4 + G_2$ $A_1^{28}, 1$
$2A_1^{28}$				$2G_2^1 + A_1^8$ $7, 7, 1$
A_1^{29}			$A_1 + D_6$ $2, 7$	$A_1 + E_7$ $2, A_1^{28}$
$A_1^{30'}$		D_5 $7 + 3$	$A_1 + D_6$ $1, 7 + 3$	D_8 $1, 7 + 3$
$A_1^{30''}$				D_8 5_3
A_1^{31}			$F_4 + A_1^{3''}$ $A_{28}, 2$	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{31}$
A_1^{32}				$A_2 + E_6$ $3, A_1^{28}$
A_1^{34}				D_8 $7 + 3_3$
$A_1^{35'}$	$A_1 + C_3$ $1, 6$	$A_1 + A_5$ $1, 6$	$A_1 + D_6$ $1, 6_2$	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{35''}$
$A_1^{35''}$			$G_2 + C_3^{1''}$ $1, 6$	
$A_1^{36'}$	$A_1 + C_3$ $2, 6$	$A_1 + A_5$ $2, 6$	$F_4 + A_1^{3''}$ $A_1^{36}, 1$	D_8 $6_2 + 2_2$
$A_1^{36''}$			$A_1 + D_6$ $2, 6_2$	$F_4 + G_2$ $A_1^{36}, 1$
A_1^{37}				$A_1 + E_7$ $2, A_1^{36'}$
A_1^{38}			$A_1 + D_6$ $1, 7 + 5$	D_8 $7 + 5$
A_1^{39}			$A_2 + A_5$ $3, 6$	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{39}$
A_1^{40}				A_1^{40}

				2
A_1^{56}			$G_2^2 + A_1^7$ 7, 1	$A_1 + E_7$ 1, A_1^{56}
A_1^{57}				$A_1 + E_7$ 2, A_1^{56}
A_1^{60}	B_4 9	D_5 9	$A_1 + D_6$ 1, 9	D_8 9
A_1^{61}			$A_1 + D_6$ 2, 9	$A_1 + E_7$ 2, A_1^{60}
A_1^{62}			$A_1 + D_6$ 1, 9 + 3	D_8 1, 9 + 3
A_1^{63}			$A_1 + D_6$ 2, 9 + 3	$A_1 + E_7$ 1, A_1^{63}
A_1^{64}				D_8 9 + 3 ₂
A_1^{70}				D_8 9 + 5
$A_1^{84'}$		C_4 8	E_6 A_1^{84}	D_8 8 ₂
$A_1^{84''}$				$A_2 + E_6$ 1, A_1^{84}
A_1^{85}				$A_1 + E_7$ 2, A_1^{84}
A_1^{88}				$A_2 + E_6$ 3, A_1^{84}
A_1^{110}			$A_1 + D_6$ 1, 11	D_8 11
A_1^{111}			$A_1 + D_6$ 2, 11	$A_1 + E_7$ 1, A_1^{111}
A_1^{112}				D_8 11 + 3
A_1^{120}				A_8 9
A_1^{156}	A_1^{156} 2	F_4 A_1^{156}	$F_4 + A_1^{3''}$ $A_1^{156}, 1$	$F_4 + G_2$ $A_1^{156}, 1$
A_1^{157}				$A_1 + E_7$

				$2, A_1^{156}$
A_1^{159}			$F_4 + A_1^{3''}$ $A_1^{156}, 2$	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{159}$
A_1^{160}				$A_1 + E_7$ $2, A_1^{159}$
A_1^{182}				D_8 13
A_1^{184}				D_8 $13 + 3$
A_1^{231}			A_1^{231}	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{231}$
A_1^{232}				$A_1 + E_7$ $2, A_1^{231}$
A_1^{280}				D_8 15
A_1^{399}			A_1^{399}	$A_1 + E_7$ $1, A_1^{399}$
A_1^{400}				$A_1 + E_7$ $2, A_1^{399}$
A_1^{520}				A_1^{520}
A_1^{760}				A_1^{760}
A_1^{1240}				A_1^{1240}
A_2^1	$A_2 + \tilde{A}_2$ $3, 1$	$3A_2$ $3, 1, 1$	$A_2 + A_5$ $3, 1$	$A_2 + E_6$ $3, 1$
$2A_2^1$		$3A_2$ $3, 3, 1$	$A_2 + A_5$ $1, 3, 3$	$4A_2$ $3, 3, 1, 1$
$3A_2^1$		$3A_2$ $3, 3, 3$	$A_2 + A_5$ $3, 3, 3$	$A_2 + E_6$ $1, 3A_2^1$
$4A_2^1$				$4A_2$
$A_2^{2'}$	$A_2 + \tilde{A}_2$ $1, 3$	$3A_2$ $3, 3, 1$	$A_2 + A_5$ $1, 3_2$	$A_2 + E_6$ $3, A_2^{2''}$
$2A_2^2$				$A_2 + E_6$ $3, A_2 + A_2^2$
$A_2^{2''}$		$A_2^{2''} + G_2^1$ $3, 1$	$G_2^1 + C_3^{1''}$ $1, 3_2$	
$A_2^{3'}$	D_4	D_4	$D_4 + 3A_1$	$2D_4$

	8	8	8, 1, 1, 1	8, 1
$2A_2^{3'}$				$2D_4$ 8, 8
$A_2^{3''}$	$A_2 + \tilde{A}_2$ 3, 3	$3A_2$ 3, 3, 3	$F_4 + A_1^{3''}$ $A_2^{3''}, 1$	$F_4 + G_2$ $A_2^{3''}, 1$
A_2^4				$A_2 + E_6$ $3, A_2^{3'}$
$A_2^{5'}$		$A_1 + A_5$ 1, 6	$A_1 + D_6$ 1, 6 ₂	$A_2 + E_6$ 1, A_2^4
$A_2^{5''}$			$A_2 + A_5$ 1, 6	
$A_2^{6'}(1)$			D_4^2 8	$A_1 + E_7$ 1, $A_2^{6'}$
$A_2^{6'}(2)$				$A_2^{6'}(2) + A_1^{16}$ 2, 1
$A_2^{6''}$			$A_2 + A_5$ 3, 6	$A_1 + E_7$ 1, $A_2^{6''}$
A_2^9		A_2^9	E_6 A_2^9	$A_2 + E_6$ 1, A_2^9
A_2^{10}				$A_2 + E_6$ 3, A_2^9
A_2^{21}			A_2^{21}	$A_1 + E_7$ 1, A_2^{21}
B_2^1	B_4 5	D_5 5	$A_1 + D_6$ 1, 5	D_8 5
$[2B_2^1]'$		D_5 5 + 5	$A_1 + D_6$ 1, 5 + 5	D_8 5 + 5
$[2B_2^1]''$				D_8 16
$3B_2^1$				D_8 5 ₃
$B_2^{2'}$			$A_2 + A_5$ 1, 5	$2A_4$ 1, 5
$2B_2^{2'}$				$2A_4$ 5, 5
$B_2^{2''}$				D_8

				4_4
$2B_2^{2''}$				D_8 16
$B_2^{3'}$		D_5 10	$A_1 + D_6$ 1, 10	D_8 10
$B_2^{3''}$				D_8 5_3
B_2^4				$2A_4$ 5, 5
B_2^7				D_8 15
B_2^{12}				B_2^{12}
G_2^1	$G_2^1 + A_1^8$ 7, 1	$G_2^1 + A_2^{2''}$ 7, 1	$G_2^1 + C_3^{1''}$ 7, 1	$G_2 + F_4$ 7, 1
$2G_2^1$				$2G_2 + A_1^7$ 7, 7, 1
G_2^2			$G_2^2 + A_1^7$ 7, 1	$A_1 + E_7$ 1, G_2^2
G_2^3		G_2^3	E_6 G_2^3	$A_2 + E_6$ 1, G_2^3
G_2^4				D_8 14
A_3^1	B_4 6	D_5 6	$A_1 + D_6$ 1, 6	D_8 6
$[2A_3^1]'$			$A_1 + D_6$ 1, 6 + 6	D_8 6 + 6
$[2A_3^1]''$				D_8 4_4
$A_3^{2'}$		$A_1 + A_5$ 1, 6	$A_1 + D_6$ 1, 6_2	$A_2 + E_6$ 1, A_3^2
$A_3^{2''}$			$A_2 + A_5$ 1, 6	D_8 4_4
A_3^4				D_8 15
B_3^1	B_4 7	D_5 7	$A_1 + D_6$ 1, 7	D_8 7

$2B_3^1$				D_8 $7+7$
$B_3^{2'}$			A_7 7	$A_1 + E_7$ $1, B_3^{2'}$
$B_3^{2''}$				D_8 $1, 7_2$
$C_3^{1'}$	$A_1 + C_3$ $1, 6$	$A_1 + A_5$ $1, 6$	$A_1 + D_6$ $1, 6_2$	$F_4 + G_2$ $C_3^1, 0$
$C_3^{1''}$			$C_3^{1''} + G_2^1$ $7, 1$	
C_3^2				D_8 14
A_4^1		$A_1 + A_5$ $1, 5$	$A_2 + A_5$ $1, 5$	$2A_4$ $1, 5$
$2A_4^1$				$2A_4$
A_4^2				$2A_4$ $5, 5$
B_4^1	B_4 9	D_5 9	$A_1 + D_6$ $1, 9$	D_8 9
$B_4^{2'}$				A_8 9
$B_4^{2''}$				D_8 16
$C_4^{1'}$		C_4 8	E_6 C_4^1	$E_6 + A_2$ $C_4^1, 0$
$C_4^{1''}$				D_8 8_2
D_4^1	D_4 8	D_4 8	$D_4 + 3A_1$ $8, 1, 1, 1$	$2D_4$ $8, 1$
$D_4^{2'}$			D_4^2 8	$A_1 + E_7$ $1, D_4^2$
$D_4^{2''}$				$2D_4$ $8, 8$
$D_4^{2''}$				D_8 8_2

F_4	F_4	F_4	$F_4 + A_1^{3''}$ $F_4, 1$	$F_4 + G_2$ $F_4, 1$
$A_5^{1'}$		$A_1 + A_5$ $1, 6$	$A_1 + D_6$ $1, 6_2$	$A_2 + E_6$ $1, A_5$
$A_5^{1''}$			$A_2 + A_5$ $1, 6$	
B_5			$A_1 + D_6$ $1, 11$	D_8 11
D_5		D_5 10	$A_1 + D_6$ $1, 10$	D_8 10
A_6			A_7 7	$A_1 + E_7$ $1, A_6$
B_6				D_8 13
D_6			$A_1 + D_6$ $1, 12$	D_8 12
E_6		E_6	E_6	$A_2 + E_6$ $1, E_6$
$A_7^{1'}$			A_7	$A_1 + E_7$ $1, A_7$
$A_7^{1''}$				D_8 8_2
B_7				D_8 15
D_7				D_8 14
E_7			E_7	$A_1 + E_7$ $1, E_7$
A_8				A_8
D_8				D_8
E_8				E_8

Таблица 2.5: $\mathfrak{g} = G_2$

$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{s}$
----------------	----------------	----------------

GI	$A_1 + \tilde{A}_1$	$\mathfrak{su}_2 + \mathfrak{su}_2, \mathfrak{su}_2^0 + \mathfrak{su}_2^0$
	A_2	$\mathfrak{su}_3^1, \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$
	A_1^{28}	$\mathfrak{su}_2^0$

Таблица 2.6: $\mathfrak{g} = F_4$

$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{s}$
FI	$C_3 + A_1$	$\mathfrak{sp}_3 + \mathfrak{su}_2, \mathfrak{sp}_3^1 + \mathfrak{su}_2, \mathfrak{sp}_6(\mathbb{R}) + \mathfrak{su}_2^0$
	B_4	$\mathfrak{so}_9^1$
	$A_2 + \tilde{A}_2$	$\mathfrak{su}_3^1 + \mathfrak{su}_3, \mathfrak{su}_3^1 + \mathfrak{su}_3^1, \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$
	$G_2 + A_1^8$	$GI + \mathfrak{su}_2, GI + \mathfrak{su}_2^0$
	A_1^{156}	$\mathfrak{su}_2^0$
FII	$C_3 + A_1$	$\mathfrak{sp}_3^1 + \mathfrak{su}_2$
	B_4	$\mathfrak{so}_9, \mathfrak{so}_9^7$
	$A_2 + \tilde{A}_2$	$\mathfrak{su}_3 + \mathfrak{su}_3^1$
	$G_2 + A_1^8$	$G_2^c + \mathfrak{su}_2^0$

Таблица 2.7: $\mathfrak{g} = E_6$

$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{s}$
EI	$A_5 + A_1$	$\mathfrak{sl}_6(\mathbb{R}) + \mathfrak{su}_2^0$
	D_5	$\mathfrak{so}_{10}^0$
	$3A_2$	$3\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) + \mathfrak{su}_3^1$
	C_4	$\mathfrak{sp}_4, \mathfrak{sp}_4^0, \mathfrak{sp}_8(\mathbb{R})$
	F_4	FI
	$G_2 + A_2^{2''}$	$GI + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$
EII	$A_5 + A_1$	$\mathfrak{su}_6 + \mathfrak{su}_2, \mathfrak{su}_6^2 + \mathfrak{su}_2, \mathfrak{su}_6^0 + \mathfrak{su}_2^0$
	D_5	$\mathfrak{so}_{10}^2, \mathfrak{u}_5^*(\mathbb{H})$
	$3A_2$	$2\mathfrak{su}_3 + \mathfrak{su}_3^1, 3\mathfrak{su}_3^1, \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$
	C_4	$\mathfrak{sp}_4^2, \mathfrak{sp}_8(\mathbb{R})$
	F_4	FI
	$G_2 + A_2^{2''}$	$GI + \mathfrak{su}_3, GI + \mathfrak{su}_3^1$
	G_2^3	GI
	A_2^9	$\mathfrak{su}_3^1, \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$
$EIII$	$A_5 + A_1$	$\mathfrak{su}_6^2 + \mathfrak{su}_2, \mathfrak{su}_6^4 + \mathfrak{su}_2^0$
	D_5	$\mathfrak{so}_{10}, \mathfrak{so}_{10}^6, \mathfrak{u}_5^*(\mathbb{H})$

<i>EIV</i>	$3A_2$	$\mathfrak{su}_3 + 2\mathfrak{su}_3^1$
	C_4	$\mathfrak{sp}_4^0$
	F_4	FII
	$G_2 + A_2^{2''}$	$G_2^c + \mathfrak{su}_3^1$
	$A_5 + A_1$	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{H}) + \mathfrak{su}_2^0$
	D_5	$\mathfrak{so}_{10}^8$
	$3A_2$	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) + \mathfrak{su}_3$
	C_4	$\mathfrak{sp}_4^2$
	F_4	FII, F_4^c
	$G_2 + A_2^{2''}$	$G_2^c + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$

Таблица 2.8: $\mathfrak{g} = E_7$

$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{s}$
EV	A_7	$\mathfrak{su}_8, \mathfrak{su}_8^0$
		$\mathfrak{sl}_8(\mathbb{R})$
	$D_6 + A_1$	$\mathfrak{u}_6^*(\mathbb{H})' + \mathfrak{su}_2$
		$\mathfrak{so}_{12}^0 + \mathfrak{su}_2^0$
	E_6	EI
		EII
	$A_5 + A_2$	$\mathfrak{sl}_6(\mathbb{R}) + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$
		$\mathfrak{su}_6^4 + \mathfrak{su}_3, \mathfrak{su}_6^0 + \mathfrak{su}_3^1$
	$F_4 + A_1^{3''}$	$FI + \mathfrak{su}_2^0$
	$G_2 + C_3^{1''}$	$GI + \mathfrak{sp}_6(\mathbb{R})$
	$G_2^2 + A_1^7$	$G_2^c + \mathfrak{su}_2^0, GI + \mathfrak{su}_2^0$
	A_2^{21}	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$
	$A_1^{24} + A_1^{15}$	$\mathfrak{su}_2 + \mathfrak{su}_2^0, \mathfrak{su}_2^0 + \mathfrak{su}_2^0$
$A_1^{159}, A_1^{231}, A_1^{399}$	$\mathfrak{su}_2^0$	
EVI	A_7	$\mathfrak{su}_8^0, \mathfrak{su}_8^4$
	$D_6 + A_1$	$\mathfrak{so}_{12} + \mathfrak{su}_2$
		$\mathfrak{so}_{12}^4 + \mathfrak{su}_2, \mathfrak{u}_6^*(\mathbb{H})'' + \mathfrak{su}_2$
	E_6	$EII, EIII$
	$A_5 + A_2$	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{H}) + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}),$
		$\mathfrak{su}_6 + \mathfrak{su}_3^1, \mathfrak{su}_6^2 + \mathfrak{su}_3, \mathfrak{su}_6^2 + \mathfrak{su}_3^1$
$F_4 + A_1^{3''}$	$FI + \mathfrak{su}_2, FII + \mathfrak{su}_2$	

<i>EVII</i>	$G_2 + C_3^{1''}$	$G_2^c + \mathfrak{sp}_3^1, GI + \mathfrak{sp}_3, GI + \mathfrak{sp}_3^1$
	$G_2^2 + A_1^7$	$GI + \mathfrak{su}_2$
	A_2^{21}	$\mathfrak{su}_3^1$
	$A_1^{24} + A_1^{15}$	$\mathfrak{su}_2^0 + \mathfrak{su}_2$
	A_7	$\mathfrak{su}_8^4$
		$\mathfrak{sl}_4(\mathbb{H})$
	$D_6 + A_1$	$\mathfrak{u}_6^*(\mathbb{H})' + \mathfrak{su}_2$
		$\mathfrak{so}_{12}^8 + \mathfrak{su}_2^0$
	E_6	EI
		EII, E_6^c
		$\mathfrak{su}_6^4 + \mathfrak{su}_3^1, \mathfrak{su}_6^0 + \mathfrak{su}_3$
	$F_4 + A_1^{3''}$	$F_4^c + \mathfrak{su}_2^0, FII + \mathfrak{su}_2^0$
	$G_2 + C_3^{1''}$	$G_2^c + \mathfrak{sp}_6(\mathbb{R})$

Таблица 2.9: $\mathfrak{g} = E_8$

$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{s}$
<i>EVIII</i>	D_8	$\mathfrak{so}_{16}, \mathfrak{u}_8^*(\mathbb{H})'', \mathfrak{so}_{16}^0$
	$E_7 + A_1$	$EVI + \mathfrak{su}_2, EV + \mathfrak{su}_2^0$
	$E_6 + A_2$	$EI + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}), EII + \mathfrak{su}_3^1, EIII + \mathfrak{su}_3$
	A_8	$\mathfrak{su}_9^7, \mathfrak{su}_9^1, \mathfrak{sl}_9(\mathbb{R})$
	$2A_4$	$\mathfrak{su}_5 + \mathfrak{su}_5^3, 2\mathfrak{su}_5^3, 2\mathfrak{su}_5^1, 2\mathfrak{sl}_5(\mathbb{R})$
	$F_4 + G_2$	$FI + GI, FII + G_2^c$
	$2G_2 + A_1^8$	$G_2(\mathbb{C}) + \mathfrak{su}_2^0, 2GI + \mathfrak{su}_2,$ $2GI + \mathfrak{su}_2^0, 2G_2^c + \mathfrak{su}_2^0$
	$A_2^{6'} + A_1^{16}$	$\mathfrak{su}_3 + \mathfrak{su}_2^0, \mathfrak{su}_3^1 + \mathfrak{su}_2,$ $\mathfrak{su}_3^1 + \mathfrak{su}_2^0, \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) + \mathfrak{su}_2^0$
	B_2^{12}	$\mathfrak{so}_5^1, \mathfrak{so}_5^3$
	$A_1^{520}, A_1^{760}, A_1^{1240}$	$\mathfrak{su}_2^0$
<i>EIX</i>	D_8	$\mathfrak{u}_8^*(\mathbb{H})''$
		$\mathfrak{so}_{16}^8$
	$E_7 + A_1$	$E_7^c + \mathfrak{su}_2, EVI + \mathfrak{su}_2, EVII + \mathfrak{su}_2^0$
	$E_6 + A_2$	$E_6^c + \mathfrak{su}_3^1, EIV + \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ $EII + \mathfrak{su}_3, EIII + \mathfrak{su}_3^1$
	A_8	$\mathfrak{su}_9^5, \mathfrak{su}_9^3$
	$2A_4$	$\mathfrak{su}_5 + \mathfrak{su}_5^1, \mathfrak{su}_5^3 + \mathfrak{su}_5^1$

	$F_4 + G_2$	$FI + G_2^c, F_4^c + GI, FII + GI$
	$2G_2 + A_1^8$	$G_2(\mathbb{C}) + \mathfrak{su}_2,$ $GI + G_2^c + \mathfrak{su}_2, GI + G_2^c + \mathfrak{su}_2^0$
	$A_2^{6'} + A_1^{16}$	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) + \mathfrak{su}_2$

Литература

- [1] Алексеевский А. В., *Группы компонент централизаторов унитарных элементов в полупростых алгебраических группах*, Труды Тбилис. мат. инст. **62** (1979), 5—27.
- [2] Винберг Э. Б., *Группа Вейля градуированной алгебры Ли*, Изв. АН СССР, сер. мат. **40** : 3 (1976), 488—526.
- [3] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, М.: УРСС (1995).
- [4] Дынкин Е. Б., *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли*, Матем. сб. **30**(72) : 2 (1952), 349—462.
- [5] Дынкин Е. Б., *Максимальные подгруппы классических групп*, Труды Моск. мат. общ. **1** (1952), 39—166.
- [6] Карпелевич Ф. И., *Простые подалгебры вещественных алгебр Ли*, Труды Моск. мат. общ. **4** (1955), 3—112.
- [7] Кац В. Г., *Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли*, Функц. анализ **3** : 3 (1969), 94—96.
- [8] Комраков Б. П., *Редуктивные подалгебры полупростых вещественных алгебр Ли*, ДАН СССР **308** : 3 (1989), 521—525.
- [9] Доан Куинь, *Полиномы Пуанкаре компактных однородных римановых пространств с неприводимой стационарной группой*, Тр. сем. вект. тенз. ан. **14** (1968), 33—93.
- [10] Мальцев А. И., *О полупростых подгруппах групп Ли*, Изв. АН СССР, сер. мат. **8** : 4 (1944), 143—174.
- [11] Онищик А. Л., *Топология транзитивных групп преобразований*, Физматлит, Москва, 1995.

- [12] Хелгасон С., *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, М.: Мир (1964).
- [13] Berger M., *Les espaces symétriques noncompacts*, Ann. Ec. Norm. **74** (1957), 85—177.
- [14] Cartan É., *Sur la structure des groupes des transformations finit et continus*, Thesis, Paris, 1894.
- [15] Cartan É., *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane*, Bull. Soc. Math. France **41** (1913), 53—96.
- [16] Gray A., *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3*, Diff. Geom. **7** (1972), 343—369.
- [17] Liebeck M.W., Seitz G.M., *Redictive subgroups of exceptional algebraic groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **121** : 580 (1996), 1—111.
- [18] Losev I.V., *On invariants of a set of elements of a semisimple Lie algebra*, arXiv:math.RT/0512538 (2005).
- [19] McKay W.G., Patera J., *Tables of dimensions, indices, and branching rules for representations of simple Lie algebras*, Lecture notes in pure and applied mathematics **69** (1981).
- [20] Sugiura M., *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **11** : 4 (1959), 374—434.
- [21] Vinberg E.B., *Short SO_3 - structures on simple Lie algebras and the associated quasielliptic planes*, Amer. Math. Soc. Transl. **213** (2005), 243—270.
- [22] Weyl H., *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen*, Math. Zeitschr. **I—23** (1925), 271—309; **II—24** (1926), 328—376; **III—24** (1926), 377—395. Русский перевод (неполный) в УМН, вып. 4 (1938), 201—257.
- [23] Wolf J., Gray A., *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms*, J. Diff. Geom. **2** : 1—2 (1968), 77—159.

Публикации по теме диссертации:

А. Н. Минченко. *Полупростые подалгебры особых алгебр Ли*, Труды Моск. мат. общ. **67** (2006), 256—293.

А. Н. Минченко. *Триады и короткие SO_3 -подгруппы компактных групп*, Усп. мат. наук **62** : 5 (2007), 159—160.

А. Н. Минченко. *О полупростых подалгебрах особых вещественных алгебр Ли*, депонировано в ВИНТИ РАН, 337-В 2008, 40 с.