

# La « nouvelle symétrie » de Dyson et les identités de Rogers-Ramanujan

**Cilanne Boulet**

Cornell University

Université du Québec à Montréal

Le 7 septembre, 2006

# Plan

---

**Objectif.** une nouvelle preuve d'une généralisation des identités de Rogers-Ramanujan

# Plan

---

**Objectif.** une nouvelle preuve d'une généralisation des identités de Rogers-Ramanujan

- Que sont les identités de Rogers-Ramanujan?
- Première étape: une généralisation d'une identité de Schur
- Un modèle: la preuve de Dyson du théorème du nombre pentagonal d'Euler
- Outils de base: sélection et insertion
- Nouvelle preuve de la généralisation de l'identité de Schur
  - Définition du  $(k,m)$ -rang
  - Deux bijections
- Quelques questions

# Les identités de Rogers-Ramanujan

---

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})}$$

# Les identités de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})}$$

## Interprétation combinatoire.

Le côté droit: partages en parts congrues à 1 ou 4 modulo 5

Le côté gauche: partages sans part sous le carré de Durfee

# La généralisation d'Andrews

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} = \prod_{n \neq 0, \pm k \pmod{2k+1}} \frac{1}{1 - q^n}$$

où  $N_j = n_j + n_{j+1} + \cdots + n_{k-1}$ .

- notation:  $(q)_n = \prod_{j=1}^n (1 - q^j)$

# La généralisation d'Andrews

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} = \prod_{n \neq 0, \pm k \pmod{2k+1}} \frac{1}{1 - q^n}$$

où  $N_j = n_j + n_{j+1} + \cdots + n_{k-1}$ .

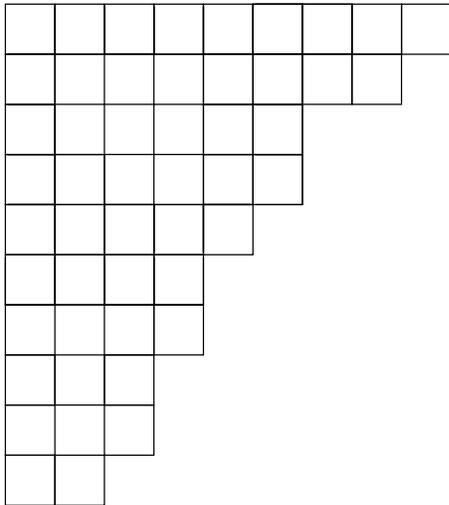
- notation:  $(q)_n = \prod_{j=1}^n (1 - q^j)$

## Interprétation combinatoire.

Le côté gauche: les carrés de Durfee successifs

# Les carrés de Durfee successifs

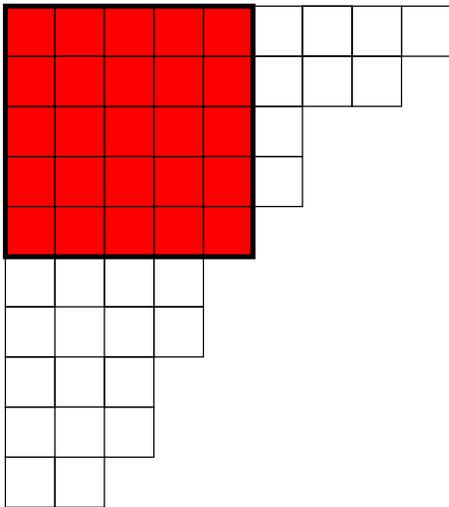
---



- le premier carré de Durfee:  
le plus grand carré qui entre  
dans le diagramme de  
Ferrers de  $\lambda$

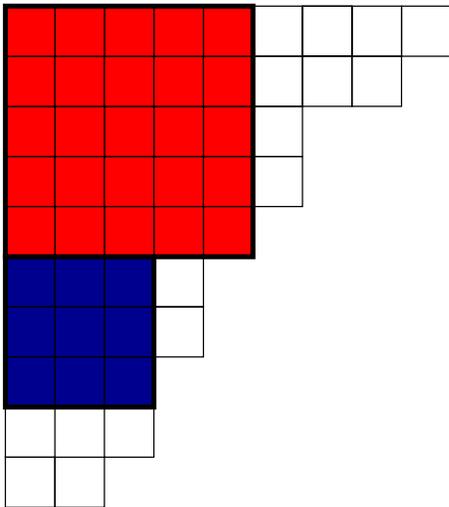
# Les carrés de Durfee successifs

---



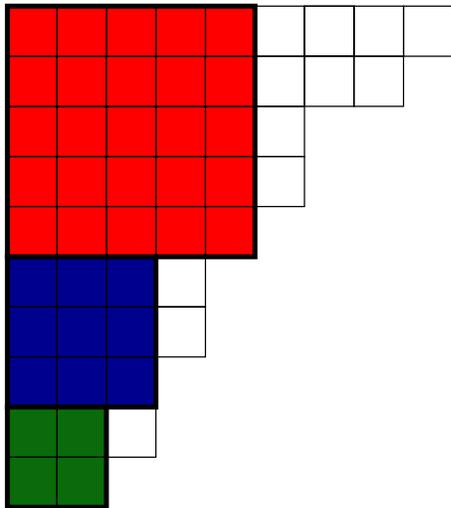
- le premier carré de Durfee:  
le plus grand carré qui entre  
dans le diagramme de  
Ferrers de  $\lambda$

# Les carrés de Durfee successifs



- le premier carré de Durfee: le plus grand carré qui entre dans le diagramme de Ferrers de  $\lambda$
- le 2<sup>e</sup> carré de Durfee: le plus grand carré qui entre sous le premier carré

# Les carrés de Durfee successifs



- le premier carré de Durfee: le plus grand carré qui entre dans le diagramme de Ferrers de  $\lambda$
- le 2<sup>e</sup> carré de Durfee: le plus grand carré qui entre sous le premier carré
- le  $k^{\text{e}}$  carré de Durfee: le plus grand carré qui entre sous le  $(k - 1)^{\text{e}}$  carré

# Les carrés de Durfee successifs

---

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} = \prod_{n \neq 0, \pm k \pmod{2k+1}} \frac{1}{1 - q^n}$$

où  $N_j = n_j + n_{j+1} + \cdots + n_{k-1}$ .

## Interprétation combinatoire.

Le côté gauche: les partages avec moins de  $k$  carrés de Durfee successifs

# Première étape

---

- Nous allons utiliser le théorème du triple produit de Jacobi pour modifier le côté droit de l'identité.

## Première étape

---

- Nous allons utiliser le théorème du triple produit de Jacobi pour modifier le côté droit de l'identité.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + zq^i) \prod_{j=0}^{\infty} (1 + z^{-1}q^j) \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)$$

nous donne

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(j+1)(2k+1)}{2} - kj} = \prod_{n \equiv 0, \pm k \pmod{2k+1}} (1 - q^n)$$

# Première étape

- Nous allons utiliser le théorème du triple produit de Jacobi pour modifier le côté droit de l'identité.

Ceci change le côté droit de Rogers-Ramanujan pour donner

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} =$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(j+1)(2k+1)}{2} - kj}$$

## Première étape

- Nous allons utiliser le théorème du triple produit de Jacobi pour modifier le côté droit de l'identité.

Ceci change le côté droit de Rogers-Ramanujan pour donner

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} =$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(j+1)(2k+1)}{2} - kj}$$

- Cette équation est équivalente à la généralisation d'Andrews.
- C'est une généralisation d'une identité de Schur.

# Un modèle: la preuve de Dyson

---

- Le théorème du nombre pentagonal d'Euler

$$1 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}$$

# Un modèle: la preuve de Dyson

---

- Le théorème du nombre pentagonal d'Euler

$$1 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}$$

- C'est le cas  $k = 1$  de la généralisation de l'identité de Schur.

# Un modèle: la preuve de Dyson

---

- Le théorème du nombre pentagonal d'Euler

$$1 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j+1)}{2}}$$

- C'est le cas  $k = 1$  de la généralisation de l'identité de Schur.
- Nous allons utiliser la preuve de Dyson comme modèle.

# Un modèle: la preuve de Dyson

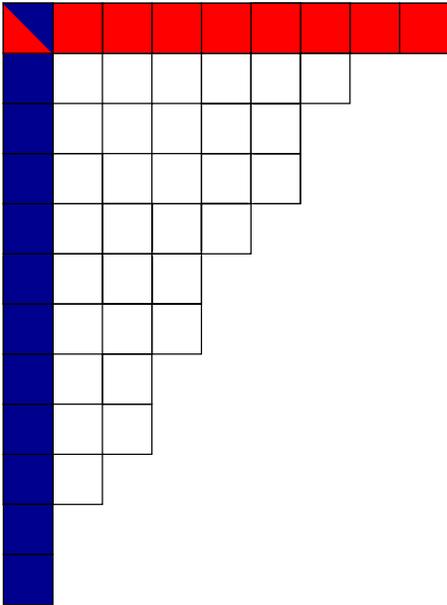
---

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts}$

# Un modèle: la preuve de Dyson

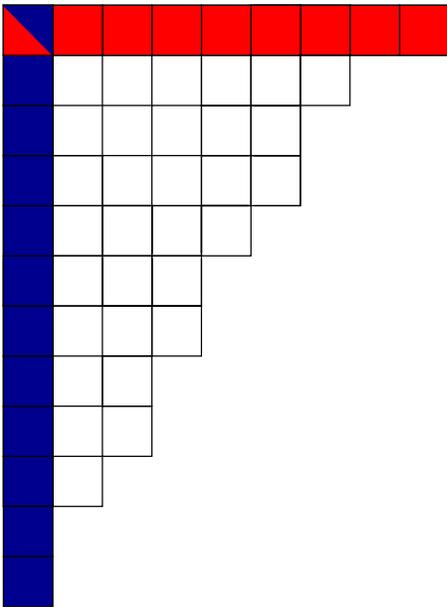
---

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts}$



# Un modèle: la preuve de Dyson

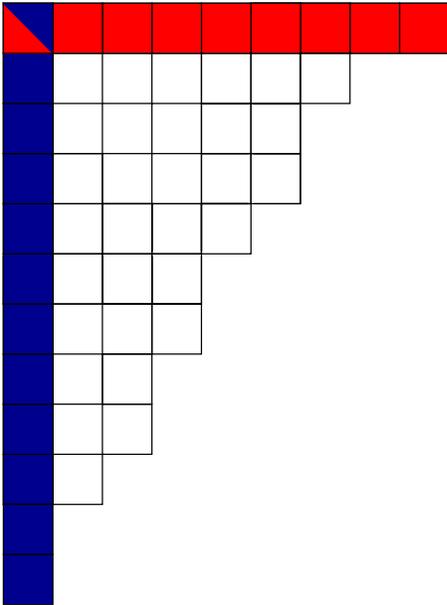
**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts}$



- $\text{rang}(\lambda) = 9 - 12 = -3$

# Un modèle: la preuve de Dyson

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts}$

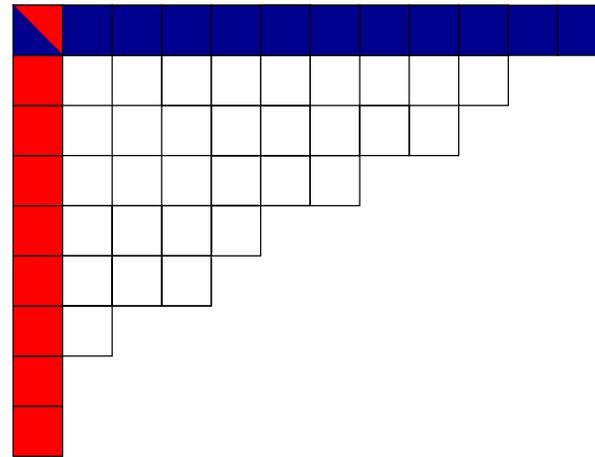
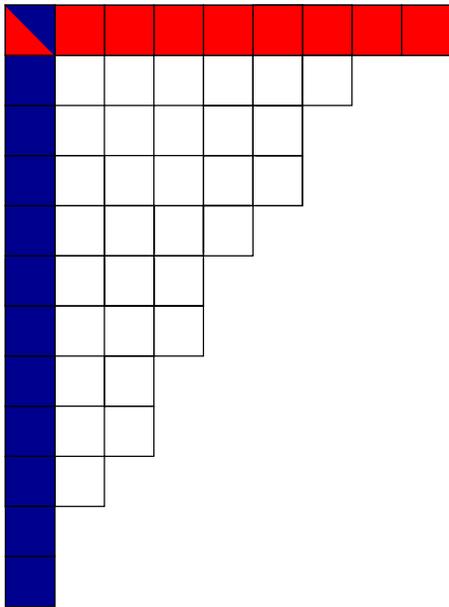


- $\text{rang}(\lambda) = 9 - 12 = -3$

**Conjugaison**

# Un modèle: la preuve de Dyson

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts}$



- $\text{rang}(\lambda) = 9 - 12 = -3$

- $\lambda \vdash n$

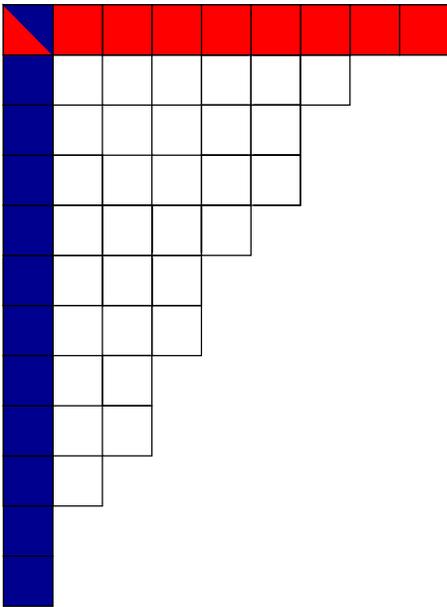
- $\text{rang}(\lambda') = 12 - 9 = 3$

- $\lambda' \vdash n$

**Conjugaison**

# Un modèle: la preuve de Dyson

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts}$

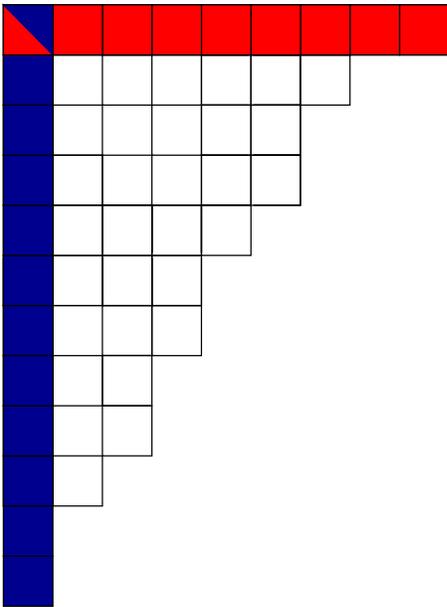


- $\text{rang}(\lambda) = -3 \leq -r$
- $\lambda \vdash n$

**La symétrie de Dyson:**  $\phi_r$

# Un modèle: la preuve de Dyson

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts}$



- $\text{rang}(\lambda) = -3 \leq -r$

- $\lambda \vdash n$

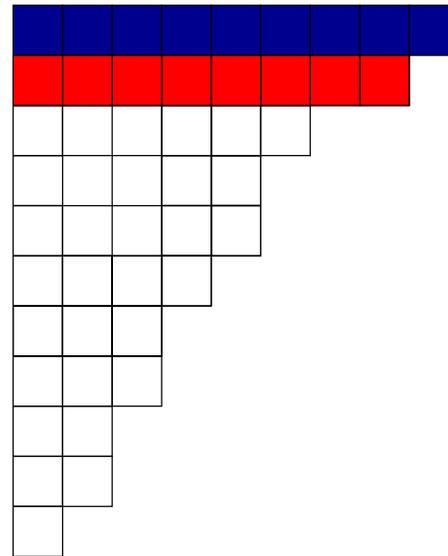
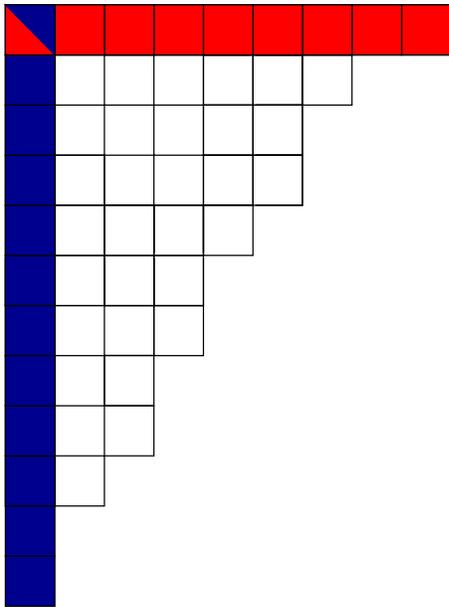
- $\text{rang}(\phi_r(\lambda)) \geq -r - 2$

- $\phi_r(\lambda) \vdash n - r - 1$

**La symétrie de Dyson:**  $\phi_r$

# Un modèle: la preuve de Dyson

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts}$



- $\text{rang}(\lambda) = -3 \leq -r$

- $\lambda \vdash n$

- $\text{rang}(\phi_r(\lambda)) \geq -r - 2$

- $\phi_r(\lambda) \vdash n - r - 1$

**La symétrie de Dyson:**  $\phi_r$  (ex.  $r = 2$ )

# Un modèle: la preuve de Dyson

---

Soit  $h(n, r)$  le nombre de partages de  $n$  qui ont rang  $r$ .

# Un modèle: la preuve de Dyson

---

Soit  $h(n, r)$  le nombre de partages de  $n$  qui ont rang  $r$ .

- Conjugaison

$$h(n, r) = h(n, -r)$$

# Un modèle: la preuve de Dyson

---

Soit  $h(n, r)$  le nombre de partages de  $n$  qui ont rang  $r$ .

- Conjugaison

$$h(n, r) = h(n, -r)$$

- La symétrie de Dyson

$$h(n, \leq -r) = h(n - r - 1, \geq -r - 2)$$

# Un modèle: la preuve de Dyson

---

Soit  $h(n, r)$  le nombre de partages de  $n$  qui ont rang  $r$ .

- Conjugaison

$$h(n, r) = h(n, -r)$$

- La symétrie de Dyson

$$h(n, \leq -r) = h(n - r - 1, \geq -r - 2)$$

- Nous observons aussi que

$$h(n, \leq -r) + h(n, \geq -r + 1) = p(n) = \text{le nombre de partages de } n$$

# Un modèle: la preuve de Dyson

---

Soit  $h(n, r)$  le nombre de partages de  $n$  qui ont rang  $r$ .

- Conjugaison

$$h(n, r) = h(n, -r)$$

- La symétrie de Dyson

$$h(n, \leq -r) = h(n - r - 1, \geq -r - 2)$$

- Nous observons aussi que

$$h(n, \leq -r) + h(n, \geq -r + 1) = p(n) = \text{le nombre de partages de } n$$

Quelques opérations simples nous donnent la série génératrice pour les partages qui ont rang inférieur ou égal à  $-r$  et nous donne une preuve du théorème du nombre pentagonal d'Euler.

# Plan

---

Les étapes de la preuve de la généralisation de l'identité de Schur:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} =$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(j+1)(2k+1)}{2} - kj}$$

# Plan

---

Les étapes de la preuve de la généralisation de l'identité de Schur:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} =$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(j+1)(2k+1)}{2} - kj}$$

- donner la définition d'un nouveau rang
- trouver une bijection qui généralise la conjugaison
- trouver une bijection qui généralise la symétrie de Dyson
- finir la preuve avec un peu de l'algèbre

# Sélection

---

**Déf.**  $f(\lambda) =$  la plus grande part de  $\lambda$

Soient  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$  une suite de  $k$  partages

et  $p_2, p_3, \dots, p_k$  une suite de  $k - 1$  entiers non négatifs,

tels que  $f(\lambda^2) \leq p_2, f(\lambda^3) \leq p_3, \dots, f(\lambda^k) \leq p_k$ .

Nous sélectionnons une part de chaque partage de cette façon:

- Nous sélectionnons la première part (ie, la plus grande) de  $\lambda^k$ .
- Si nous avons sélectionné la  $j^{\text{e}}$  part de  $\lambda^i$ , nous sélectionnons la  $(j + p_i - \lambda^i_j)^{\text{e}}$  part de  $\lambda^{i-1}$ .

# Sélection

---

**Déf.**  $f(\lambda) =$  la plus grande part de  $\lambda$

Soient  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$  une suite de  $k$  partages

et  $p_2, p_3, \dots, p_k$  une suite de  $k - 1$  entiers non négatifs,

tels que  $f(\lambda^2) \leq p_2, f(\lambda^3) \leq p_3, \dots, f(\lambda^k) \leq p_k$ .

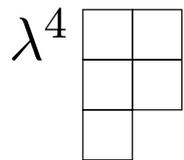
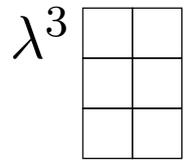
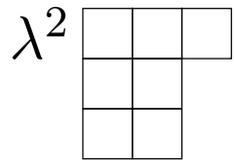
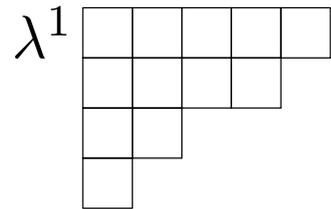
Nous sélectionnons une part de chaque partage de cette façon:

- Nous sélectionnons la première part (ie, la plus grande) de  $\lambda^k$ .
- Si nous avons sélectionné la  $j^{\text{e}}$  part de  $\lambda^i$ , nous sélectionnons la  $(j + p_i - \lambda^i_j)^{\text{e}}$  part de  $\lambda^{i-1}$ .

**Déf.**  $A(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k; p_2, p_3, \dots, p_k) =$  la somme des parts sélectionnées

# Sélection

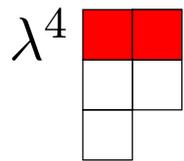
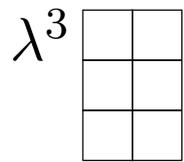
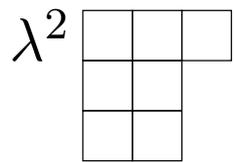
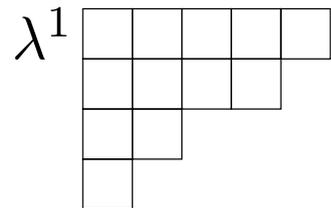
---



$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3)$$

# Sélection

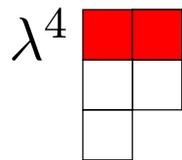
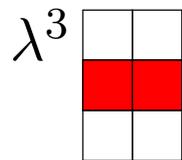
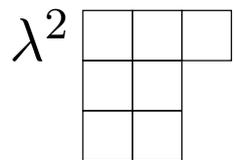
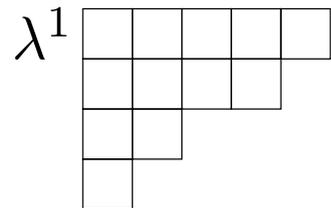
---



$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3)$$

# Sélection

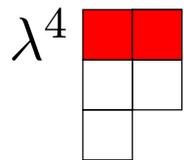
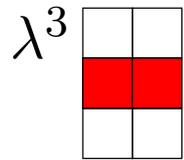
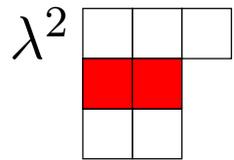
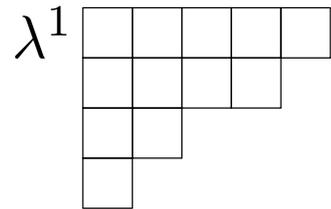
---



$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3)$$

# Sélection

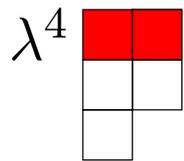
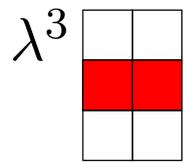
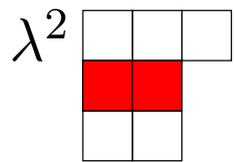
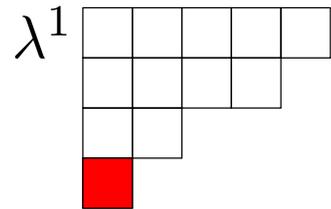
---



$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3)$$

# Sélection

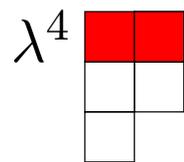
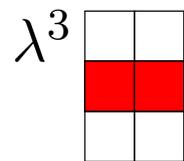
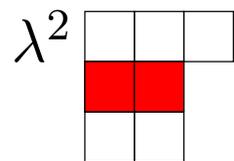
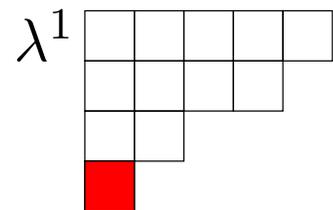
---



$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3)$$

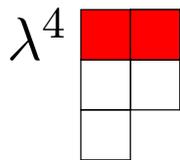
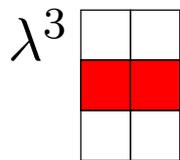
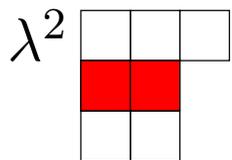
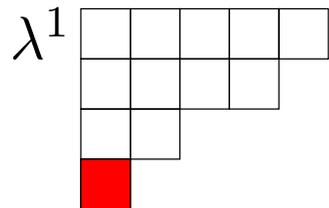
# Sélection

---

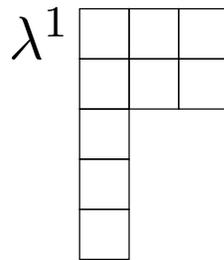


$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3) = 7$$

# Sélection

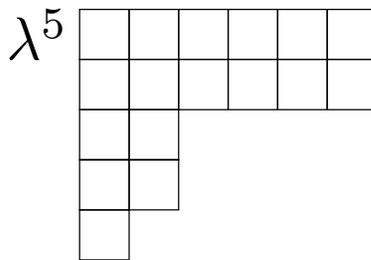


$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3) = 7$$



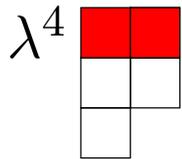
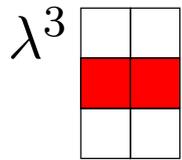
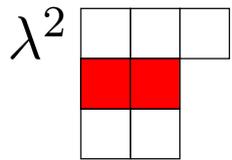
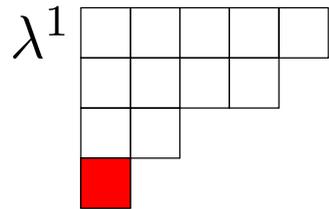
$\lambda^3$

$\lambda^4$

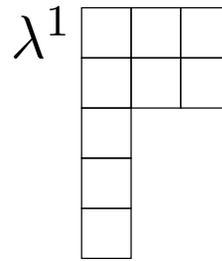


$$A(\lambda^1, \dots, \lambda^5; 2, 0, 2, 6)$$

# Sélection

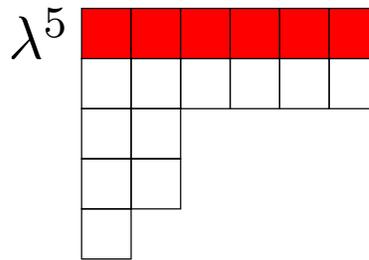


$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3) = 7$$



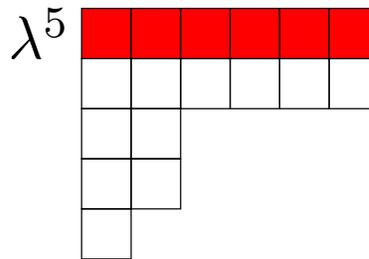
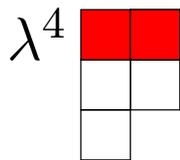
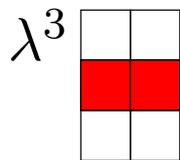
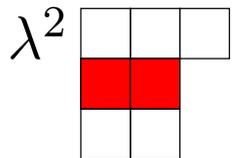
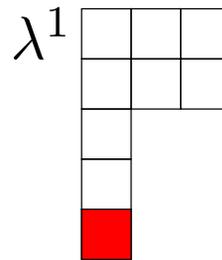
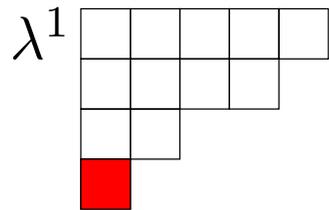
$\lambda^3$

$\lambda^4$



$$A(\lambda^1, \dots, \lambda^5; 2, 0, 2, 6)$$

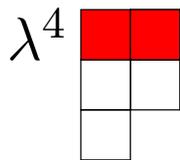
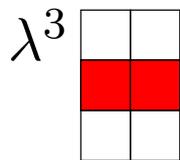
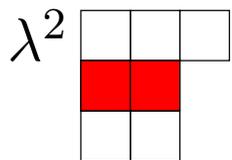
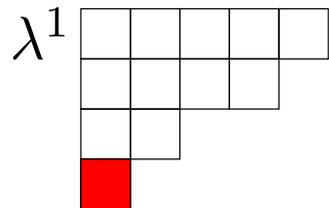
# Sélection



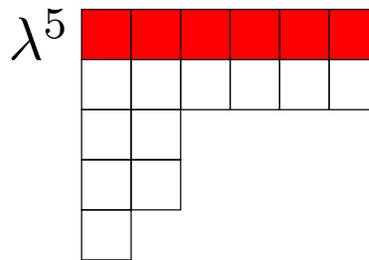
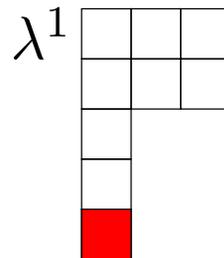
$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3) = 7$$

$$A(\lambda^1, \dots, \lambda^5; 2, 0, 2, 6)$$

# Sélection



$$A(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4; 4, 2, 3) = 7$$



$$A(\lambda^1, \dots, \lambda^5; 2, 0, 2, 6) = 7$$

# Insertion

---

Soient  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$  une suite de  $k$  partages  
et  $p_2, p_3, \dots, p_k$  une suite de  $k - 1$  entiers non négatifs,  
tels que  $f(\lambda^2) \leq p_2, f(\lambda^3) \leq p_3, \dots, f(\lambda^k) \leq p_k$   
et soit  $a$  un entier tel que  $a \geq A(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k; p_2, p_3, \dots, p_k)$ .

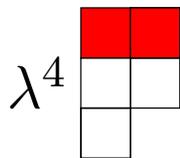
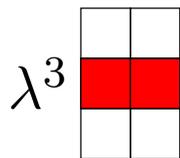
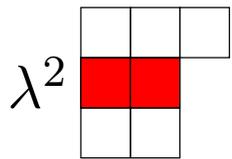
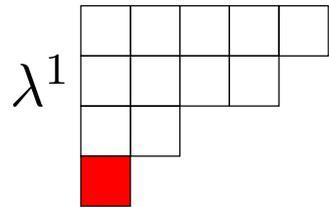
Il existe une suite (unique) de  $k$  partages  $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k$ , obtenue en insérant une part (qui peut être vide) dans chacun des partages,  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ , telle que

- $|\mu^1| + |\mu^2| + \dots + |\mu^k| = n + a,$
- $f(\mu^2) \leq p_2, f(\mu^3) \leq p_3, \dots, f(\mu^k) \leq p_k,$  et
- $A(\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k; p_2, p_3, \dots, p_k) = a.$

De plus, les parts insérées sont celles qui sont sélectionnées en calculant  $A(\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k; p_2, p_3, \dots, p_k)$ .

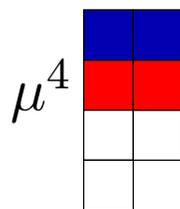
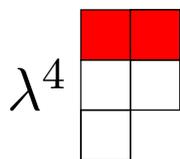
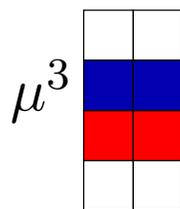
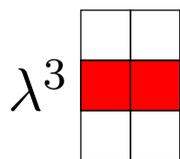
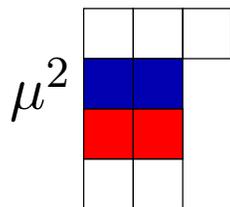
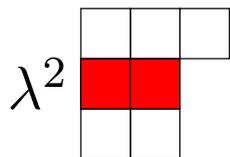
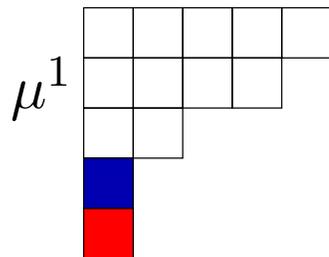
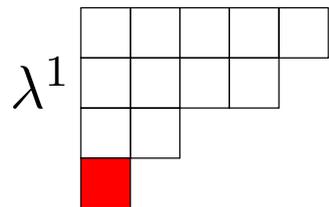
# Insertion

---



$$A(\lambda; 4, 2, 3) = 7$$

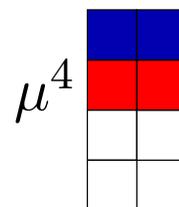
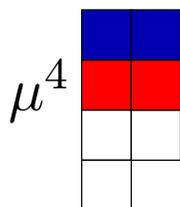
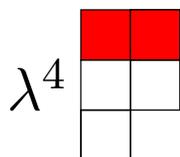
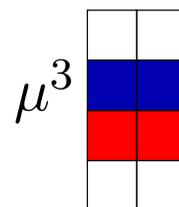
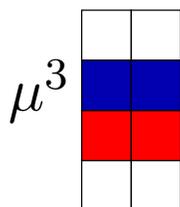
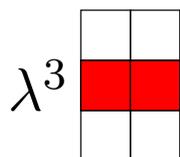
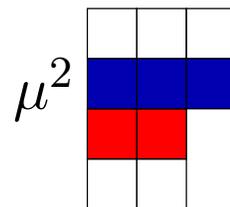
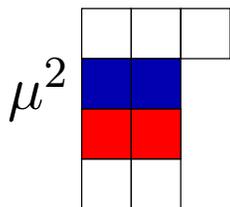
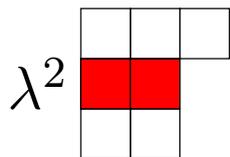
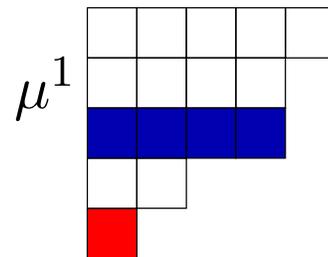
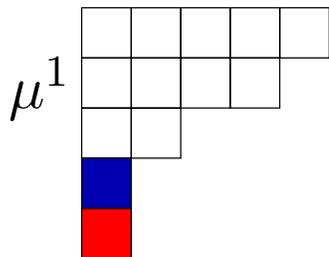
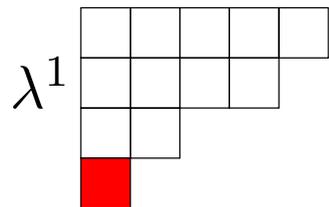
# Insertion



$$A(\lambda; 4, 2, 3) = 7$$

$$a = 7$$

# Insertion

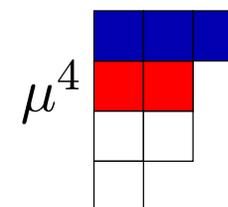
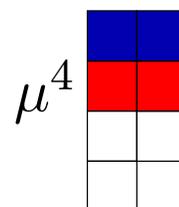
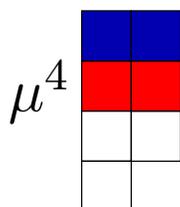
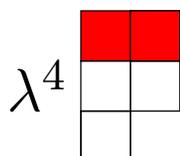
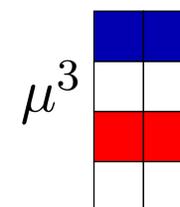
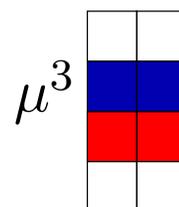
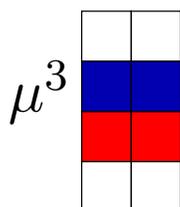
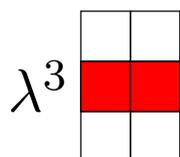
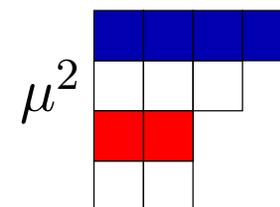
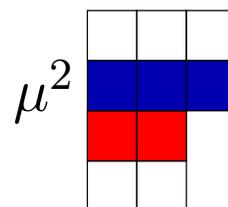
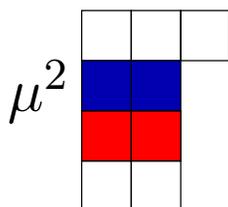
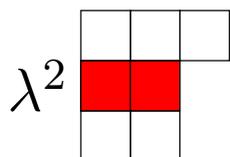
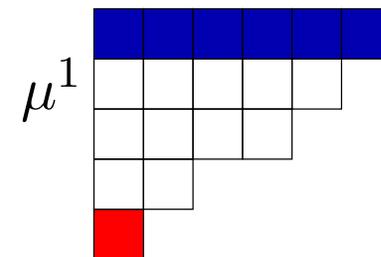
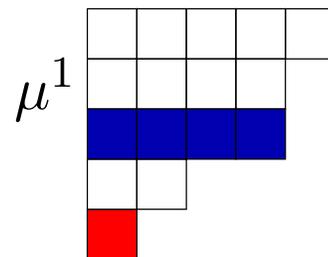
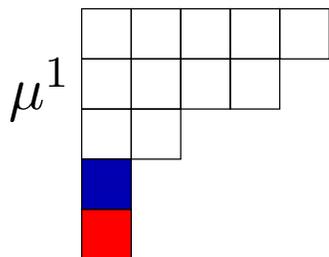
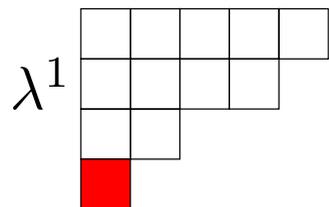


$$A(\lambda; 4, 2, 3) = 7$$

$$a = 7$$

$$a = 11$$

# Insertion



$$A(\lambda; 4, 2, 3) = 7$$

$$a = 7$$

$$a = 11$$

$$a = 16$$

## $m$ -rectangles de Durfee successifs

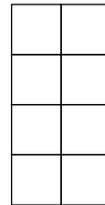
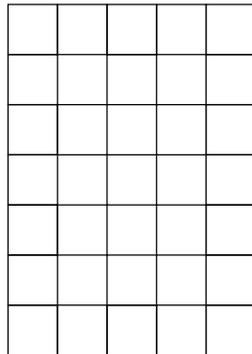
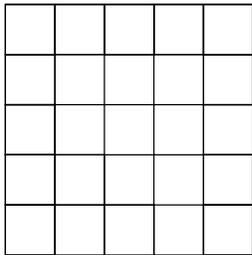
---

**Déf.**  $m$ -rectangle: un rectangle avec hauteur = largeur +  $m$

# $m$ -rectangles de Durfee successifs

---

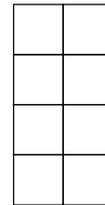
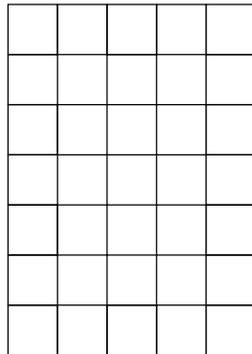
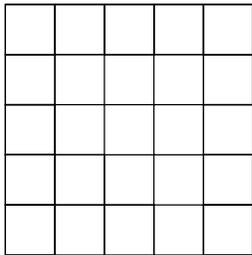
**Déf.**  $m$ -rectangle: un rectangle avec hauteur = largeur +  $m$



# $m$ -rectangles de Durfee successifs

---

**Déf.**  $m$ -rectangle: un rectangle avec hauteur = largeur +  $m$

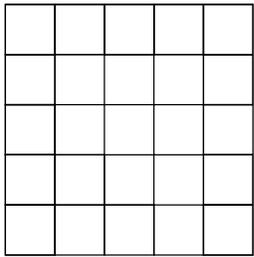


$$m = 0$$

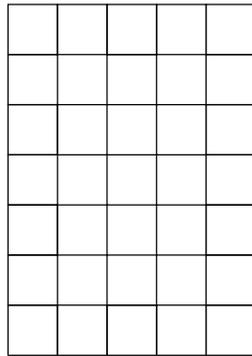
# $m$ -rectangles de Durfee successifs

---

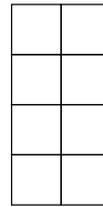
**Déf.**  $m$ -rectangle: un rectangle avec hauteur = largeur +  $m$



$$m = 0$$

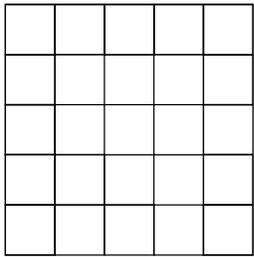


$$m = 2$$

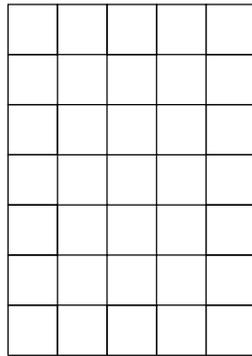


# $m$ -rectangles de Durfee successifs

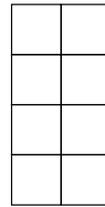
**Déf.**  $m$ -rectangle: un rectangle avec hauteur = largeur +  $m$



$$m = 0$$



$$m = 2$$

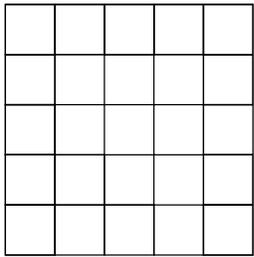


$$m = 2$$

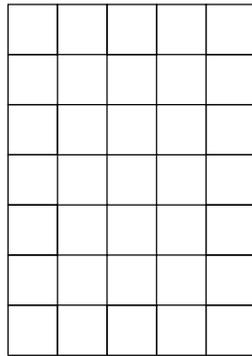


# $m$ -rectangles de Durfee successifs

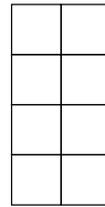
**Déf.**  $m$ -rectangle: un rectangle avec hauteur = largeur +  $m$



$$m = 0$$



$$m = 2$$



$$m = 2$$



$$m = 5$$

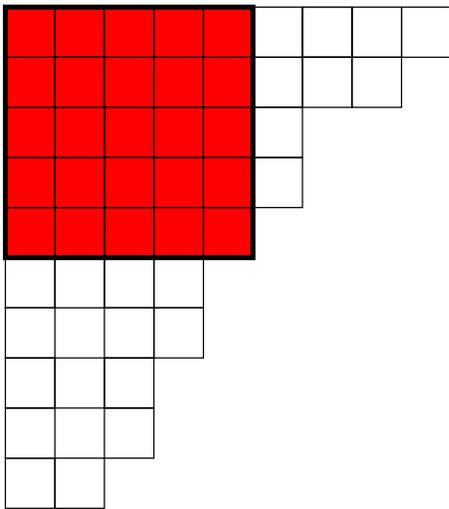
# $m$ -rectangles de Durfee successifs

---

**Déf.**  $m$ -rectangles de Durfee successifs de  $\lambda$ :

# $m$ -rectangles de Durfee successifs

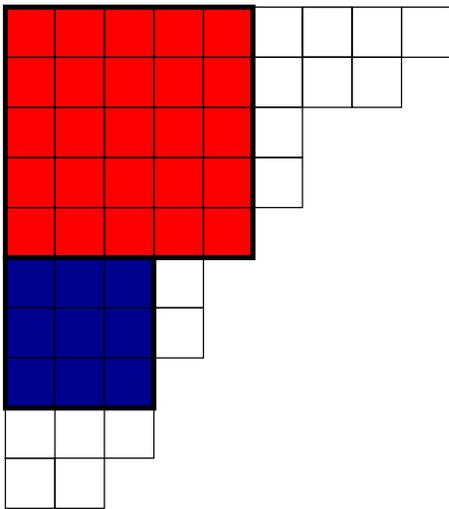
**Déf.**  $m$ -rectangles de Durfee successifs de  $\lambda$ :



$$m = 0$$

# $m$ -rectangles de Durfee successifs

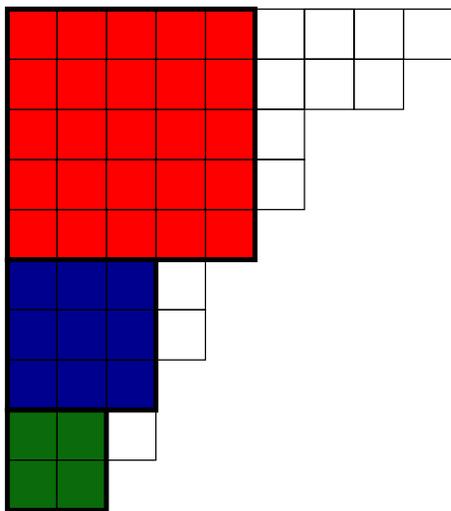
**Déf.**  $m$ -rectangles de Durfee successifs de  $\lambda$ :



$$m = 0$$

# $m$ -rectangles de Durfee successifs

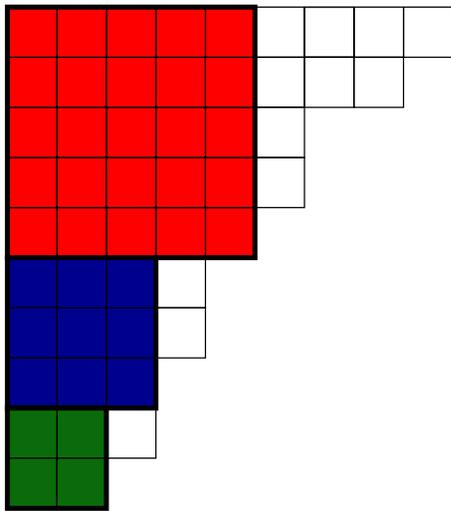
**Déf.**  $m$ -rectangles de Durfee successifs de  $\lambda$ :



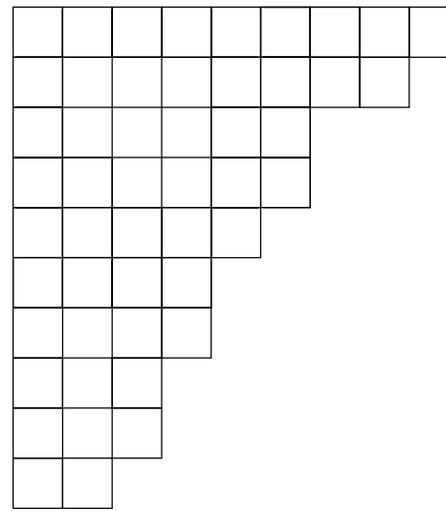
$$m = 0$$

# $m$ -rectangles de Durfee successifs

**Déf.**  $m$ -rectangles de Durfee successifs de  $\lambda$ :



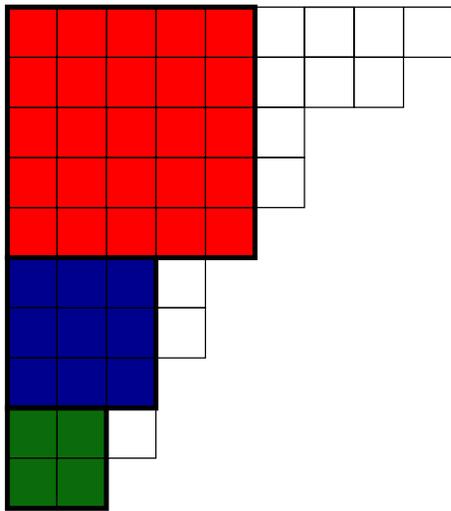
$$m = 0$$



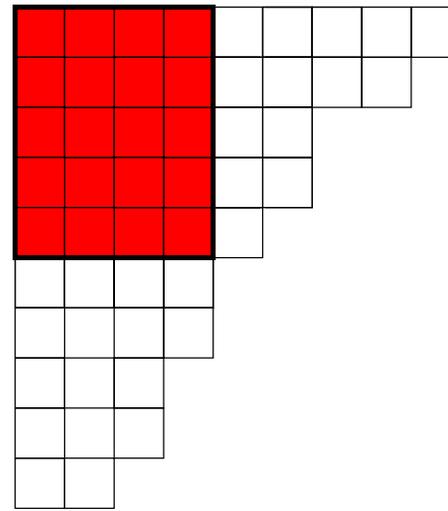
$$m = 1$$

# $m$ -rectangles de Durfee successifs

**Déf.**  $m$ -rectangles de Durfee successifs de  $\lambda$ :



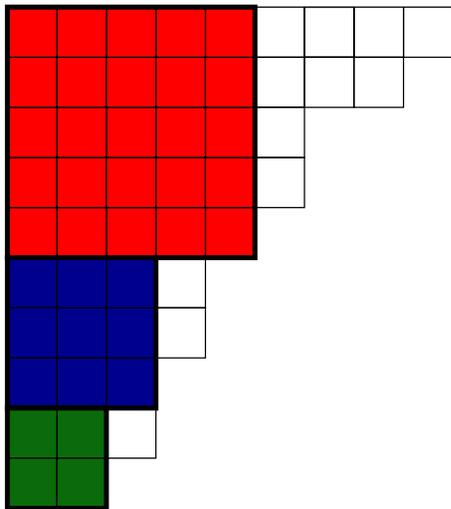
$$m = 0$$



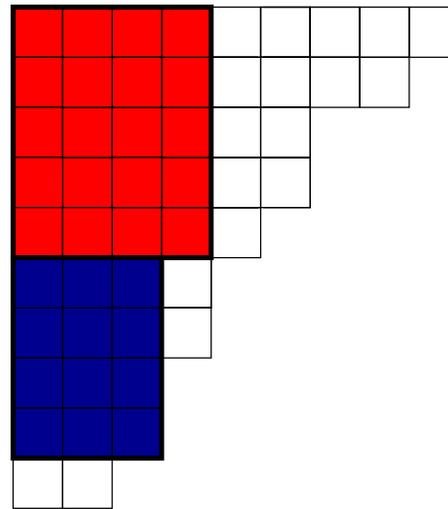
$$m = 1$$

# $m$ -rectangles de Durfee successifs

**Déf.**  $m$ -rectangles de Durfee successifs de  $\lambda$ :



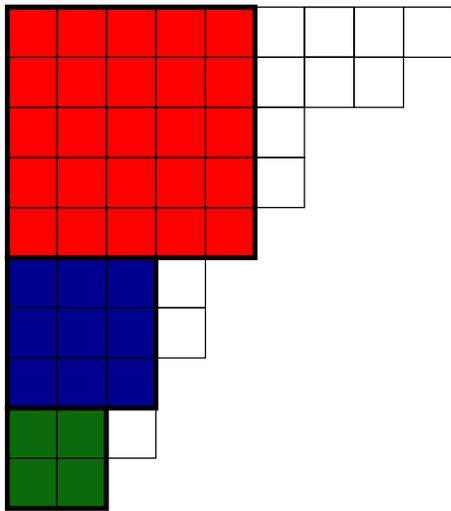
$$m = 0$$



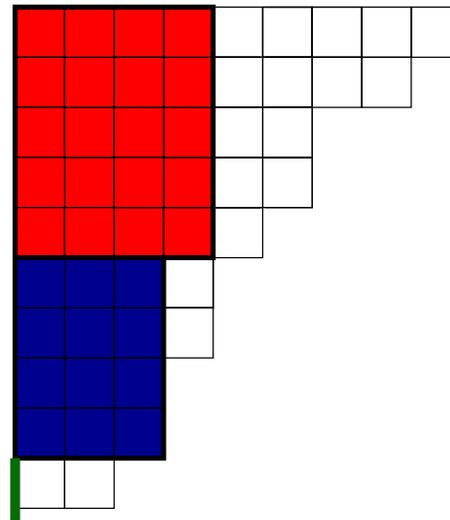
$$m = 1$$

# $m$ -rectangles de Durfee successifs

**Déf.**  $m$ -rectangles de Durfee successifs de  $\lambda$ :



$$m = 0$$



$$m = 1$$

# Le rang de Dyson

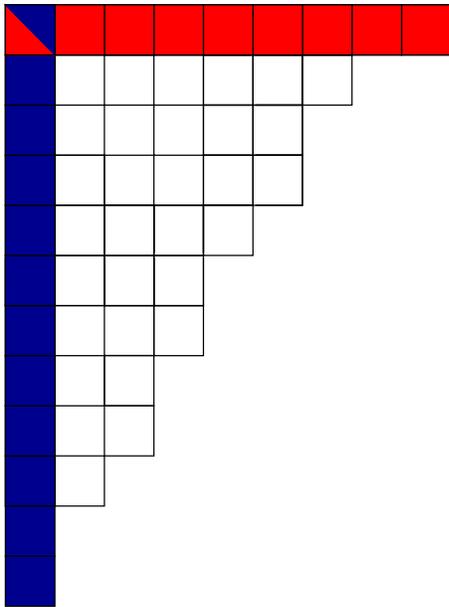
---

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts} = f(\lambda) - \ell(\lambda)$

# Le rang de Dyson

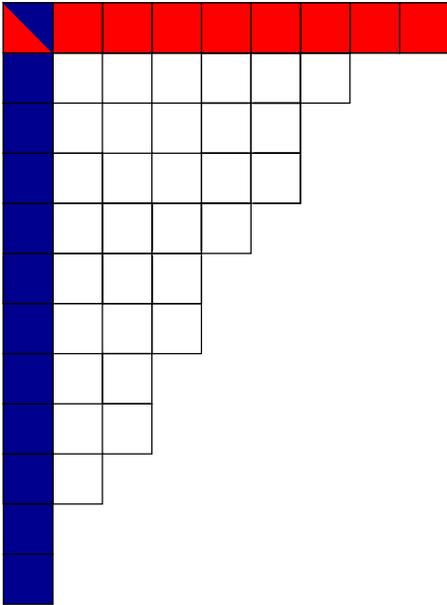
---

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts} = f(\lambda) - \ell(\lambda)$



# Le rang de Dyson

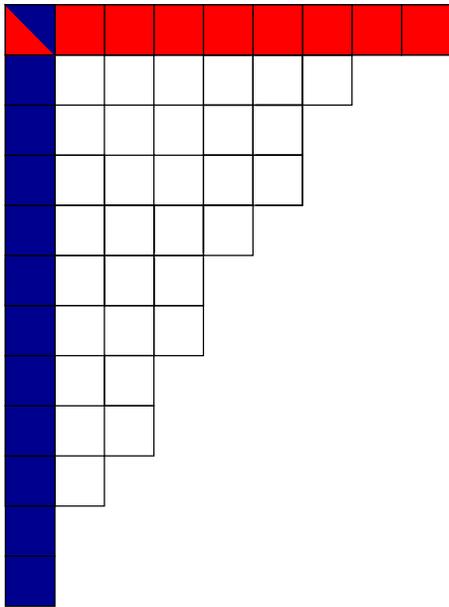
**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts} = f(\lambda) - \ell(\lambda)$



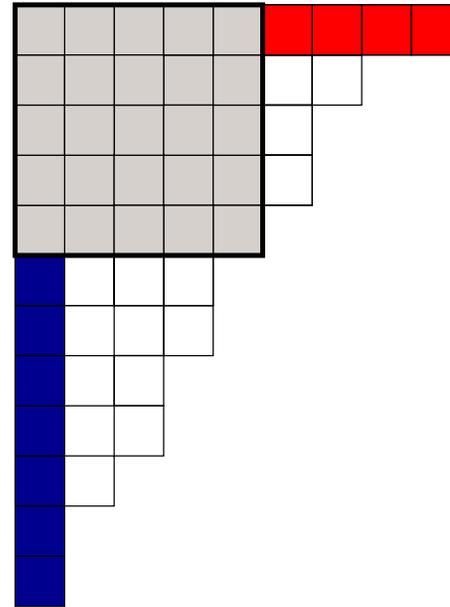
- $\text{rang}(\lambda) = 9 - 12 = -3$

# Le rang de Dyson

**Déf.**  $\text{rang}(\lambda) = \text{plus grande part} - \text{nombre de parts} = f(\lambda) - \ell(\lambda)$



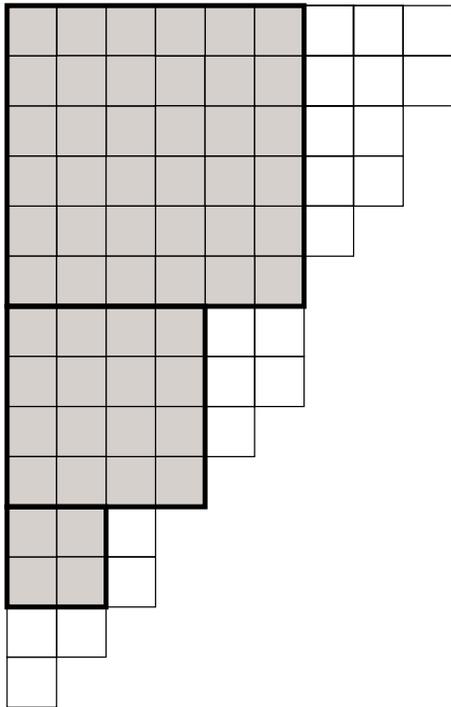
•  $\text{rang}(\lambda) = 9 - 12 = -3$



•  $\text{rang}(\lambda) = 4 - 7 = -3$

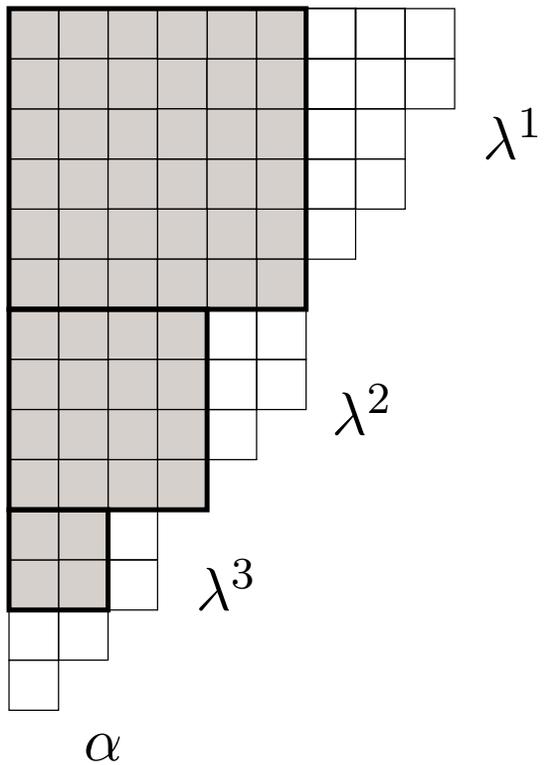
# Définition du $(k,m)$ -rang

---

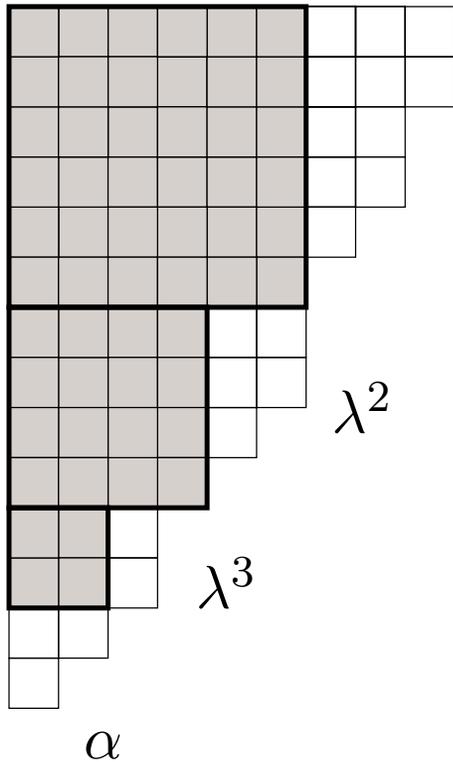


# Définition du (k,m)-rang

---

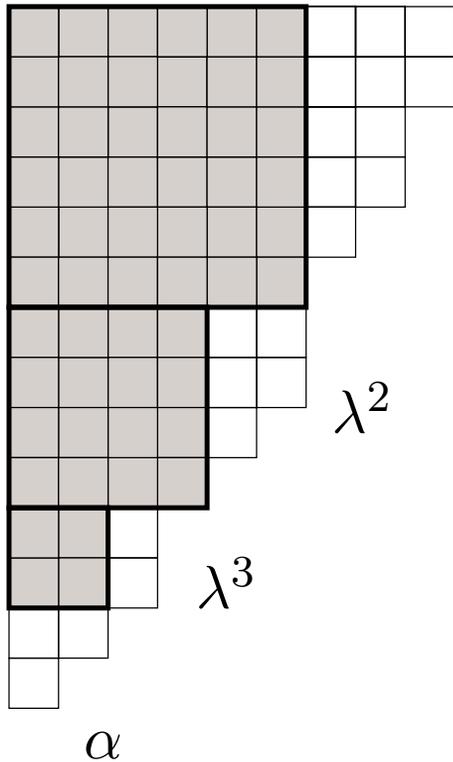


# Définition du (k,m)-rang



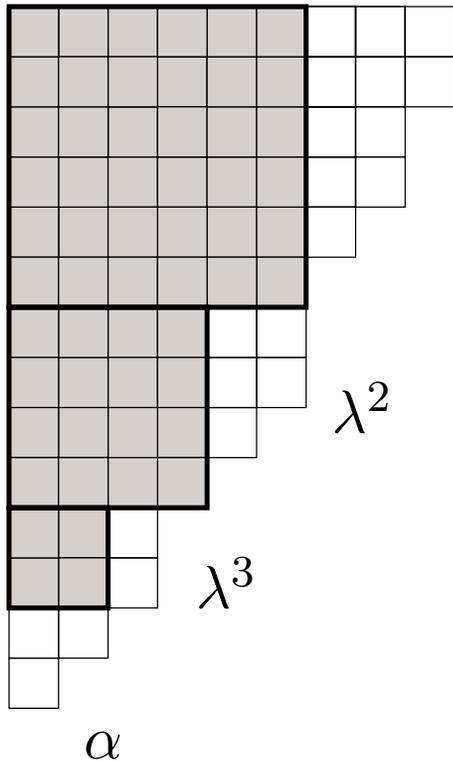
$\lambda^1$  • Soit  $N_i$  la largeur du  $i^e$   $m$ -rectangle de Durfee.

# Définition du (k,m)-rang



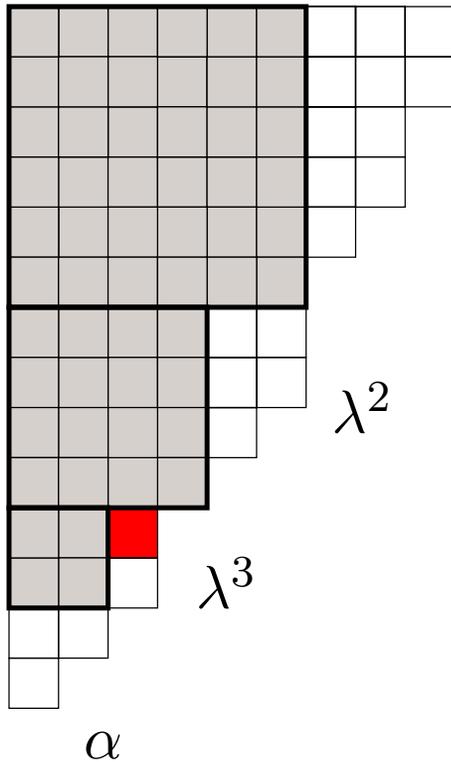
- Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.
- Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .

# Définition du (k,m)-rang



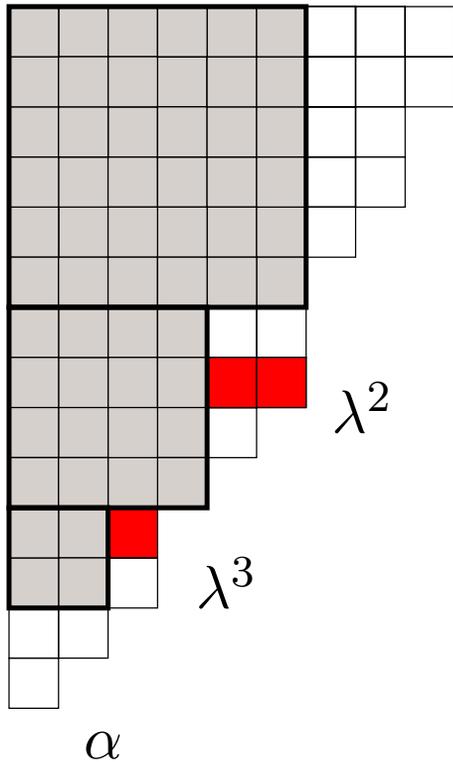
- Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.
- Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .
- Nous sélectionnons des parts de  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ .

# Définition du (k,m)-rang



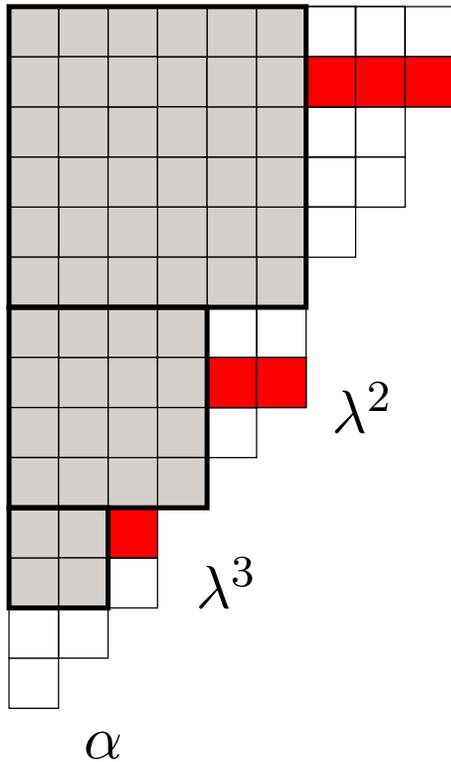
- Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.
- Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .
- Nous sélectionnons des parts de  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ .

# Définition du (k,m)-rang



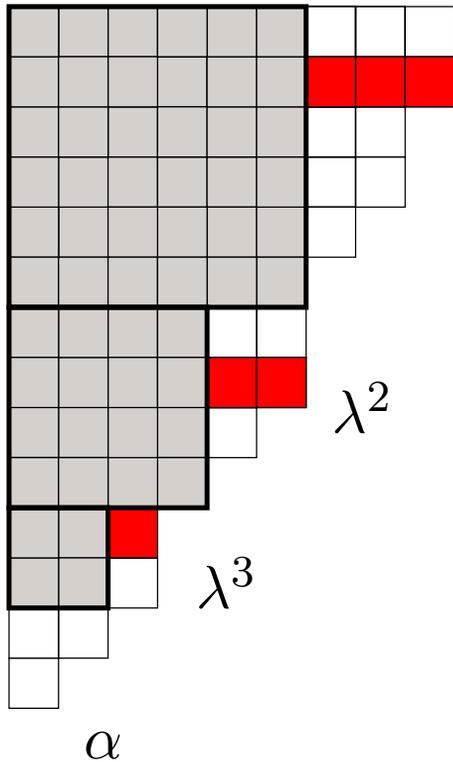
- Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.
- Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .
- Nous sélectionnons des parts de  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ .

# Définition du (k,m)-rang



- Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.
- Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .
- Nous sélectionnons des parts de  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ .

# Définition du (k,m)-rang



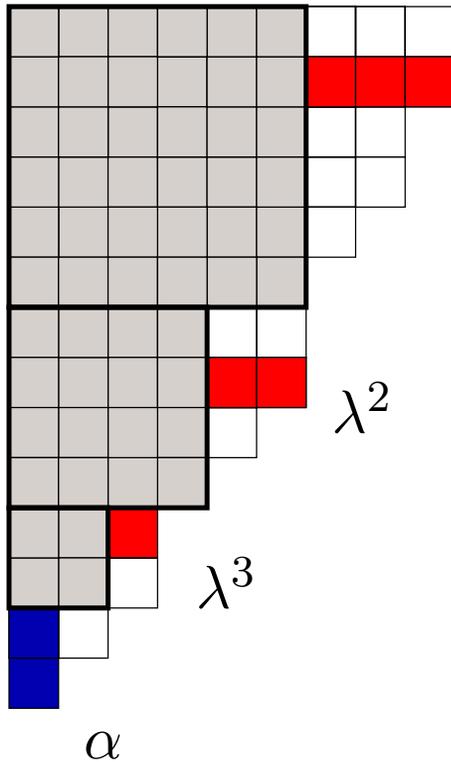
$\lambda^1$  • Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.

• Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .

• Nous sélectionnons des parts de  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ .

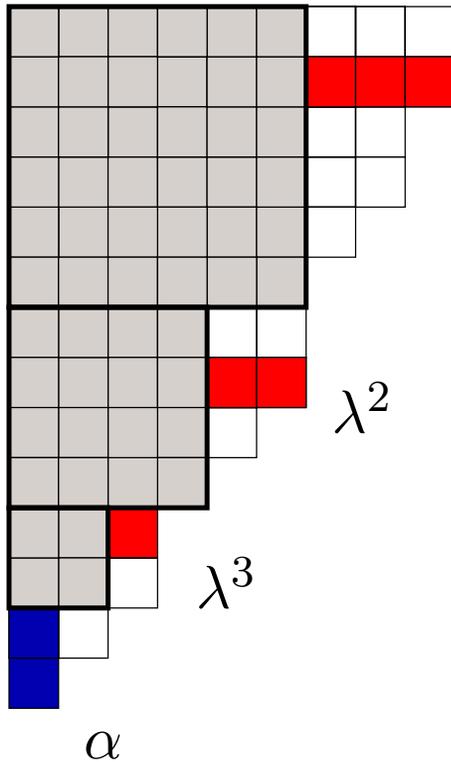
•  $A(\lambda) = A(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k; p_2, \dots, p_k) = 6$ .

# Définition du (k,m)-rang



- Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.
- Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .
- Nous sélectionnons des parts de  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ .
- $A(\lambda) = A(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k; p_2, \dots, p_k) = 6$ .

# Définition du $(k,m)$ -rang



$\lambda^1$  • Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.

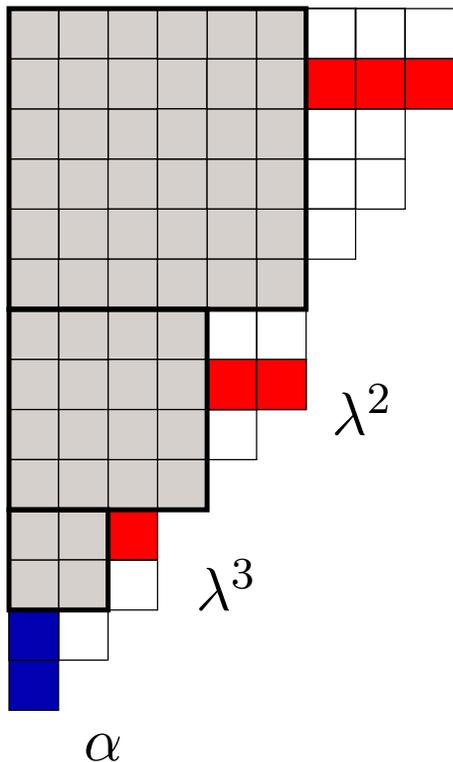
• Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .

• Nous sélectionnons des parts de  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ .

•  $A(\lambda) = A(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k; p_2, \dots, p_k) = 6$ .

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$ .

# Définition du $(k,m)$ -rang



$\lambda^1$  • Soit  $N_i$  la largeur du  $i^{\text{e}}$   $m$ -rectangle de Durfee.

• Soit  $p_i = N_{i-1} - N_i$ .

• Nous sélectionnons des parts de  $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ .

•  $A(\lambda) = A(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k; p_2, \dots, p_k) = 6$ .

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha) = 4$ .

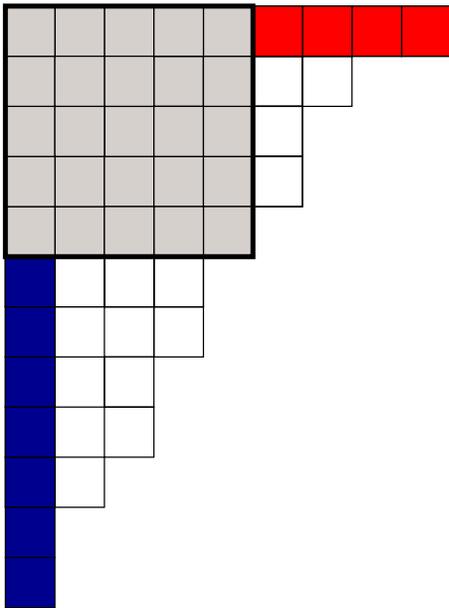
## Définition du $(k,m)$ -rang

---

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$

# Définition du $(k,m)$ -rang

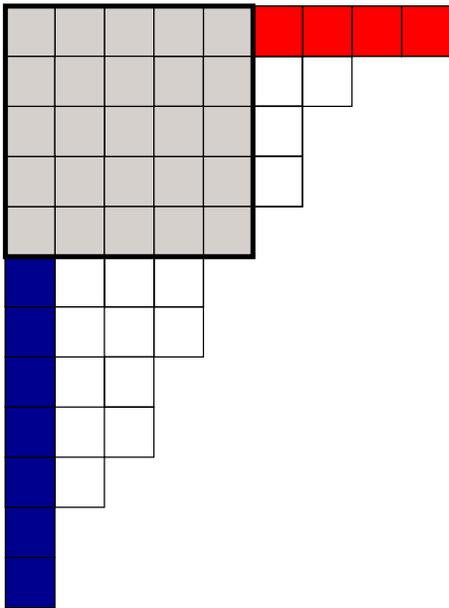
**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 1, m = 0$$

# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$

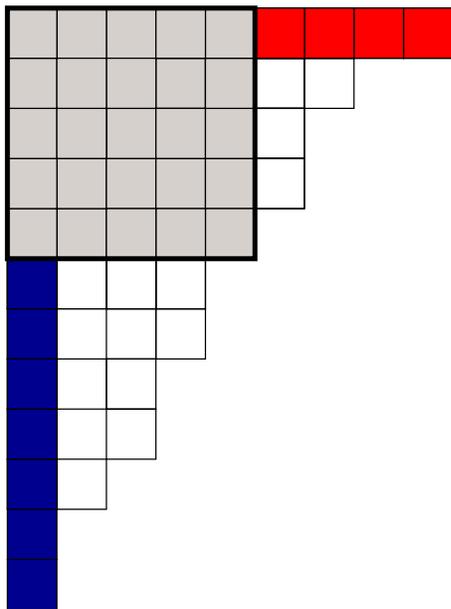


$$k = 1, m = 0$$

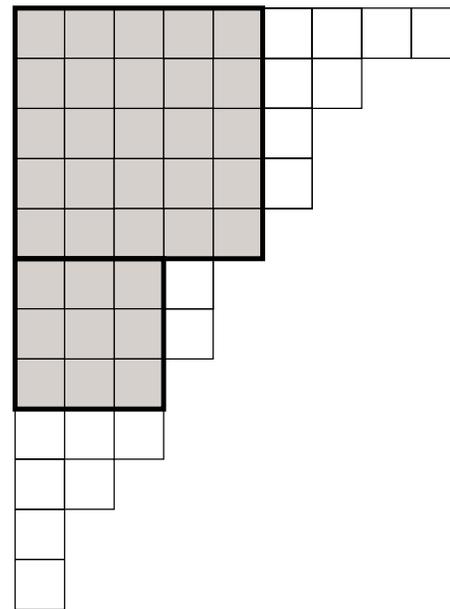
- $r_{k,m}(\lambda) = 4 - 7 = -3$

# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 1, m = 0$$

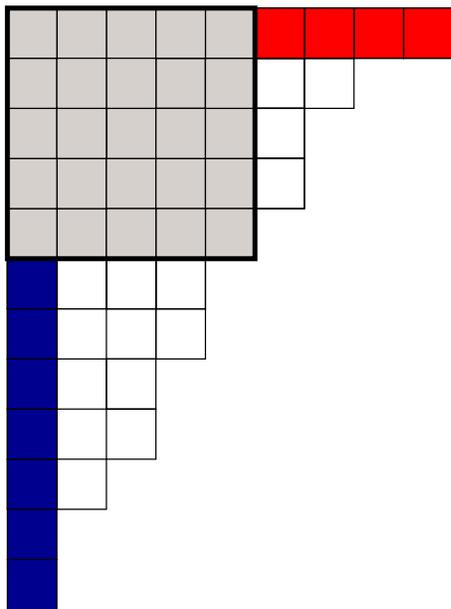


$$k = 2, m = 0$$

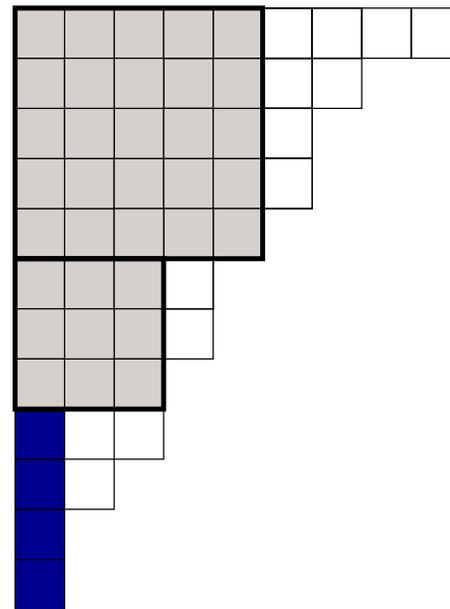
- $r_{k,m}(\lambda) = 4 - 7 = -3$

# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 1, m = 0$$

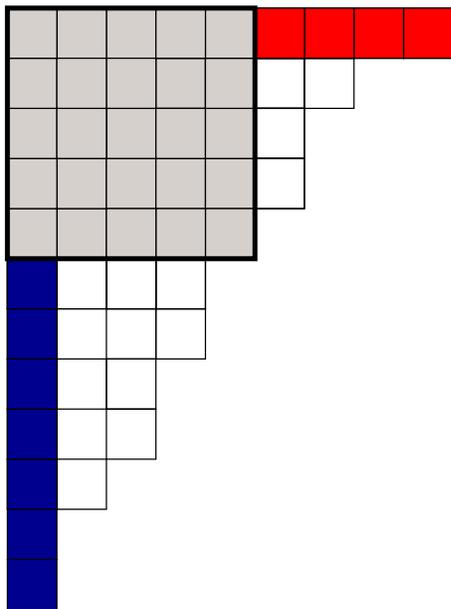


$$k = 2, m = 0$$

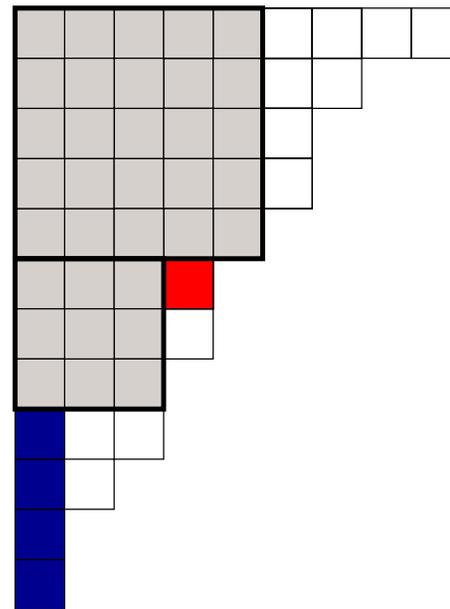
- $r_{k,m}(\lambda) = 4 - 7 = -3$

# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 1, m = 0$$

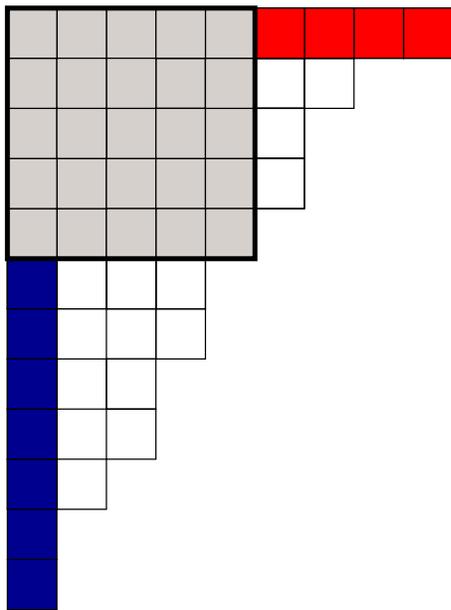


$$k = 2, m = 0$$

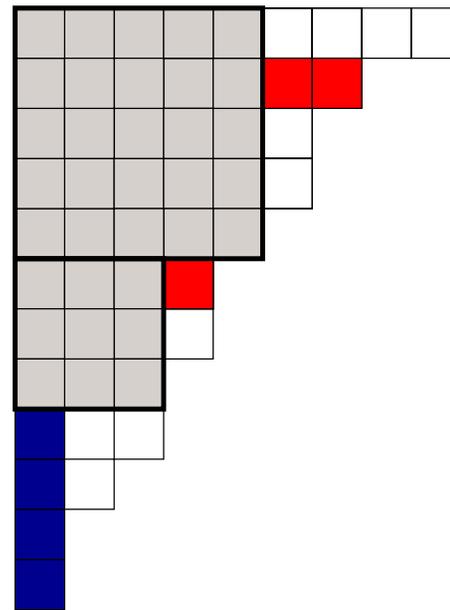
- $r_{k,m}(\lambda) = 4 - 7 = -3$

# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 1, m = 0$$

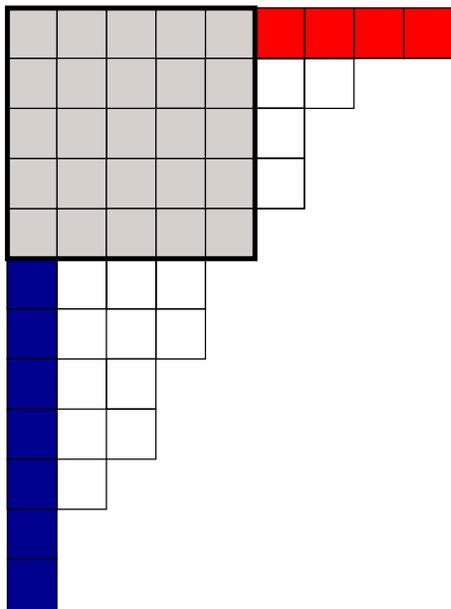


$$k = 2, m = 0$$

- $r_{k,m}(\lambda) = 4 - 7 = -3$

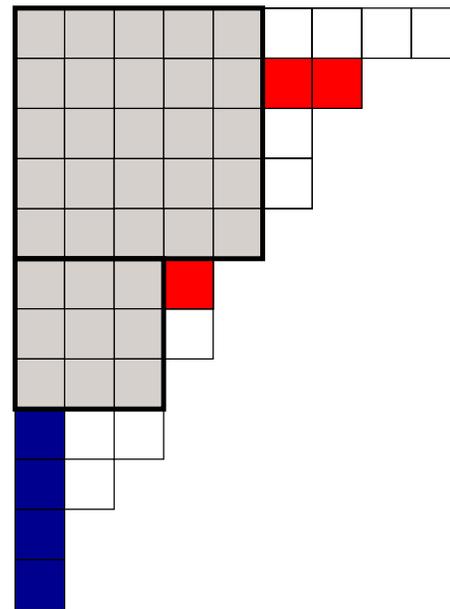
# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 1, m = 0$$

- $r_{k,m}(\lambda) = 4 - 7 = -3$

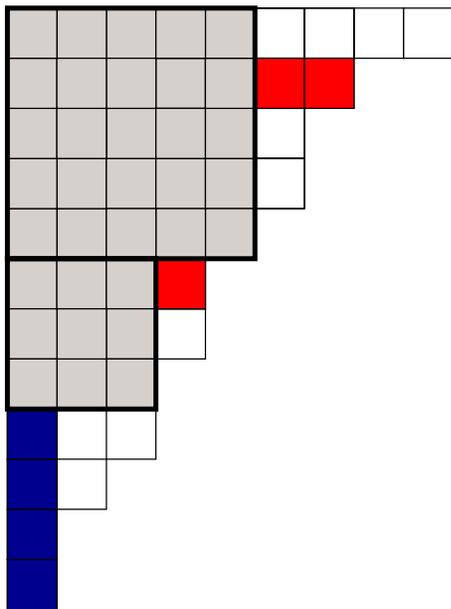


$$k = 2, m = 0$$

- $r_{k,m}(\lambda) = 1 + 2 - 4 = -1$

# Définition du (k,m)-rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$

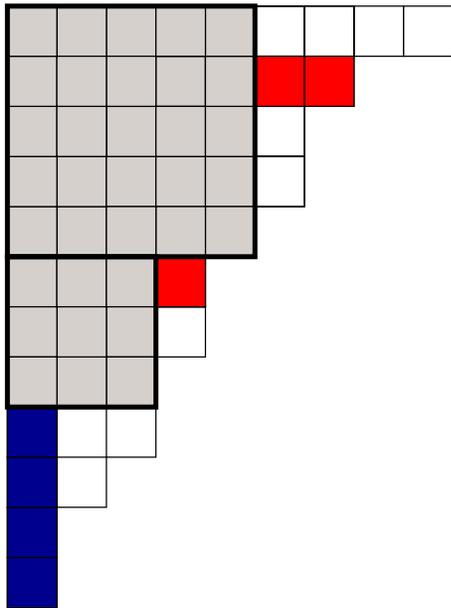


$$k = 2, m = 0$$

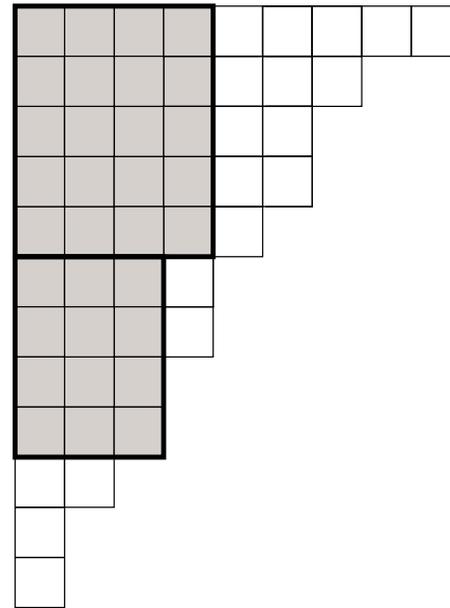
- $r_{k,m}(\lambda) = 1 + 2 - 4 = -1$

# Définition du (k,m)-rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 2, m = 0$$

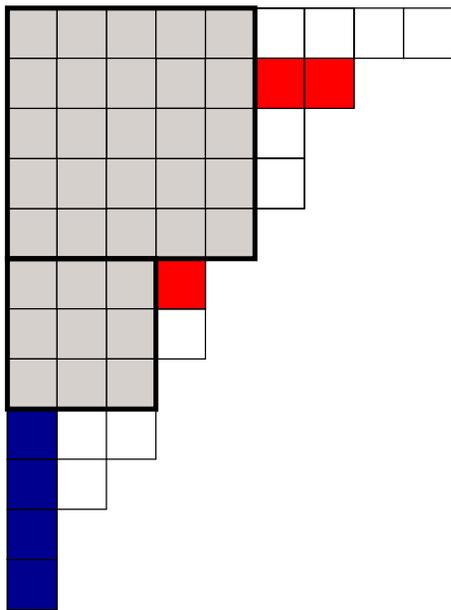


$$k = 2, m = 1$$

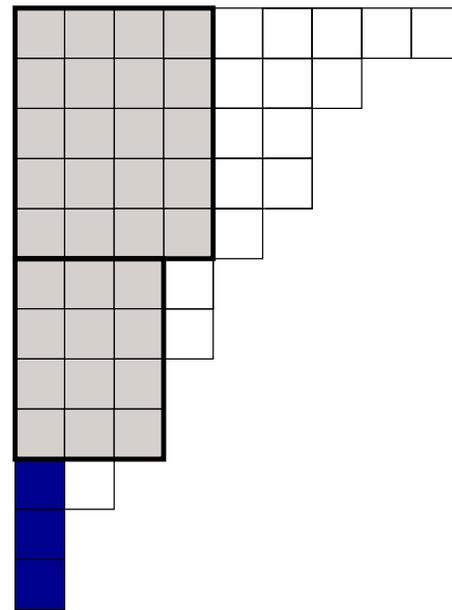
- $r_{k,m}(\lambda) = 1 + 2 - 4 = -1$

# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 2, m = 0$$

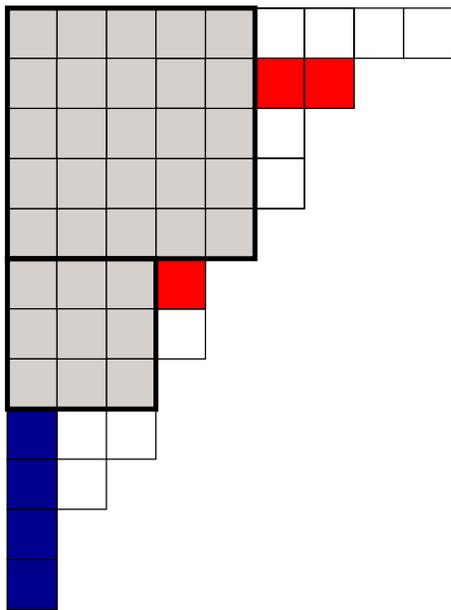


$$k = 2, m = 1$$

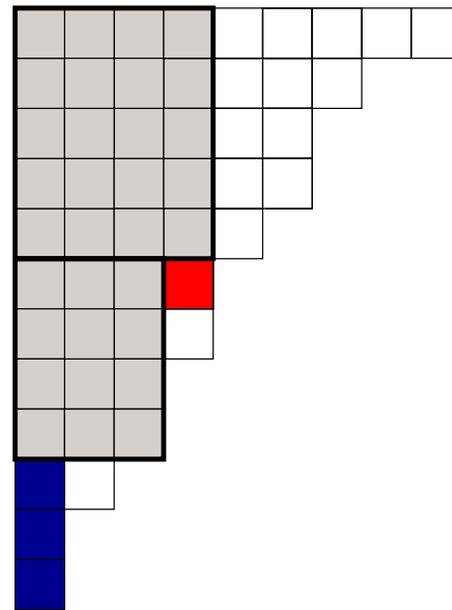
- $r_{k,m}(\lambda) = 1 + 2 - 4 = -1$

# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$k = 2, m = 0$

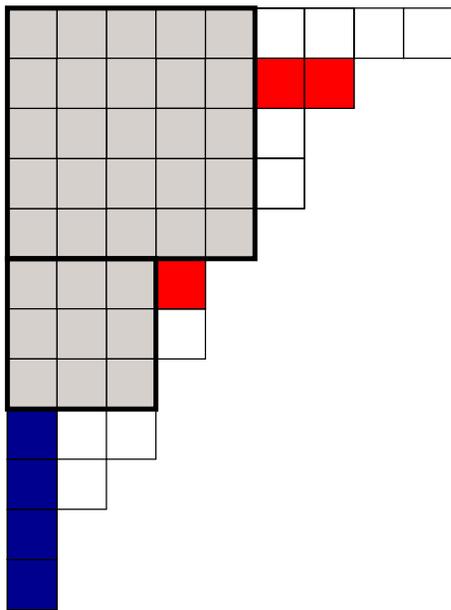


$k = 2, m = 1$

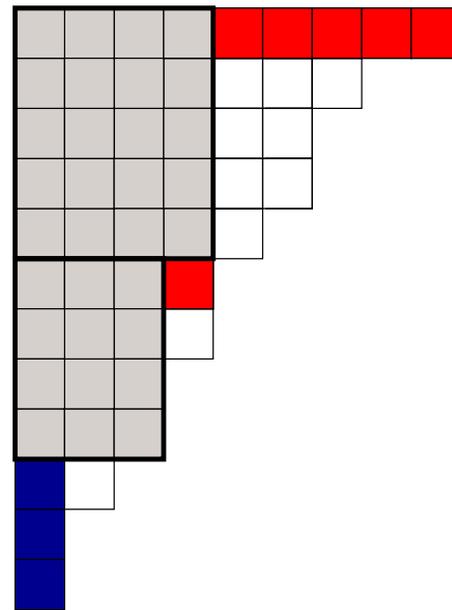
- $r_{k,m}(\lambda) = 1 + 2 - 4 = -1$

# Définition du $(k,m)$ -rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$$k = 2, m = 0$$

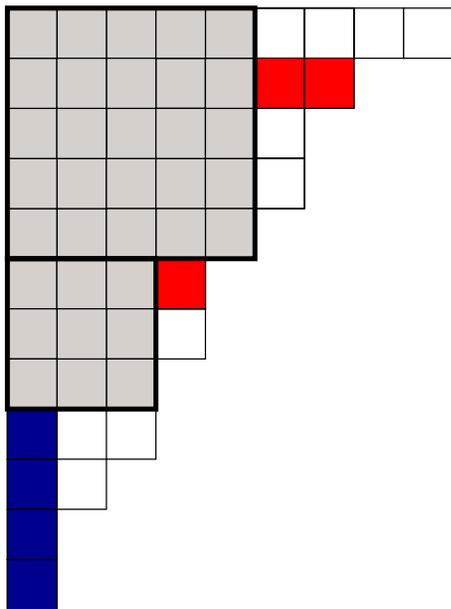


$$k = 2, m = 1$$

- $r_{k,m}(\lambda) = 1 + 2 - 4 = -1$

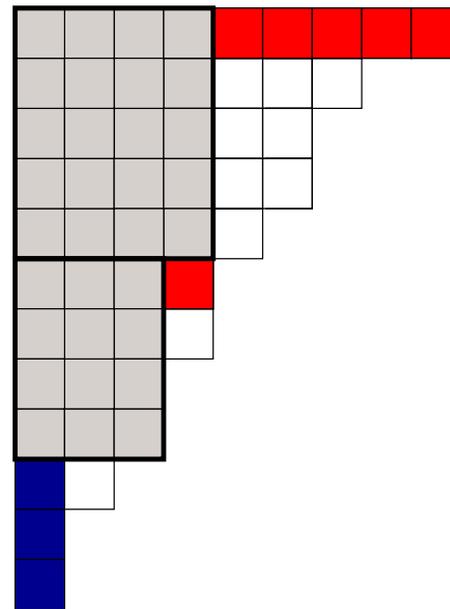
# Définition du (k,m)-rang

**Déf.**  $(k, m)$ -rang de  $\lambda$ :  $r_{k,m}(\lambda) = A(\lambda) - \ell(\alpha)$



$k = 2, m = 0$

- $r_{k,m}(\lambda) = 1 + 2 - 4 = -1$



$k = 2, m = 1$

- $r_{k,m}(\lambda) = 1 + 5 - 3 = 3$

# Observations

---

Soit  $h(n, k, m, r)$  le nombre de partages de  $n$  qui ont  $(k, m)$ -rang égal à  $r$ .

- Si  $m > 0$ , il y a toujours  $k$   $m$ -rectangles de Durfee successifs.

$$h(n, k, m, \leq -r - 1) + h(n, k, m, \geq -r) = p(n)$$

# Observations

---

Soit  $h(n, k, m, r)$  le nombre de partages de  $n$  qui ont  $(k, m)$ -rang égal à  $r$ .

- Si  $m > 0$ , il y a toujours  $k$   $m$ -rectangles de Durfee successifs.

$$h(n, k, m, \leq -r - 1) + h(n, k, m, \geq -r) = p(n)$$

- So  $m = 0$ , il n'y a pas toujours  $k$  carrés de Durfee successifs.

$$h(n, k, 0, \leq -r - 1) + h(n, k, 0, \geq -r) = p(n) - q(n)$$

$q(n)$  est le nombre de partages de  $n$  avec moins de  $k$  carrés de Durfee successifs.

# Première bijection

---

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

# Première bijection

---

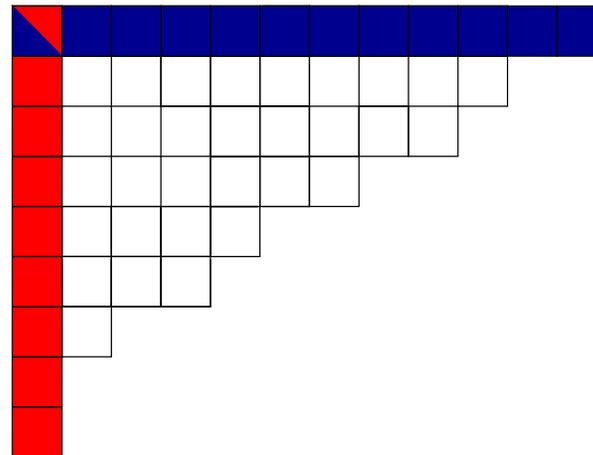
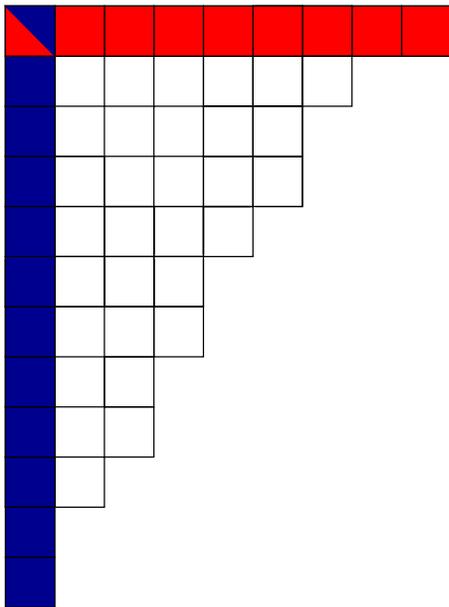
**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

Si  $k = 1$ , cette bijection est la conjugaison:

# Première bijection

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

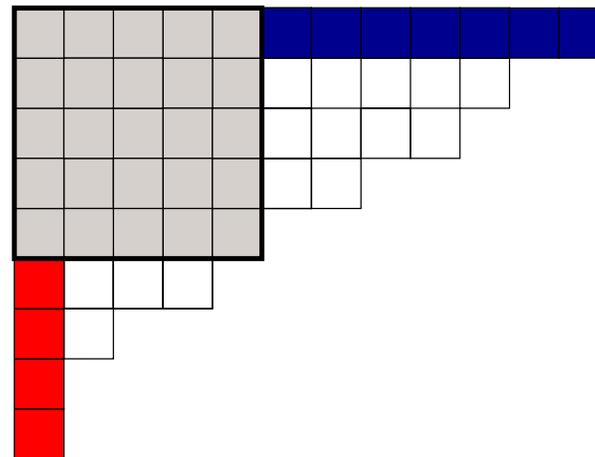
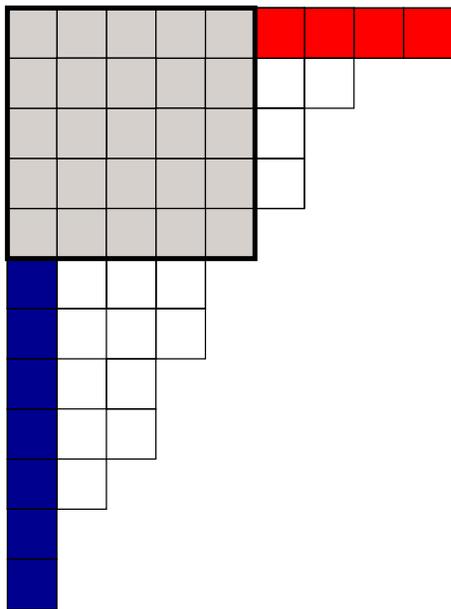
Si  $k = 1$ , cette bijection est la conjugaison:



# Première bijection

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

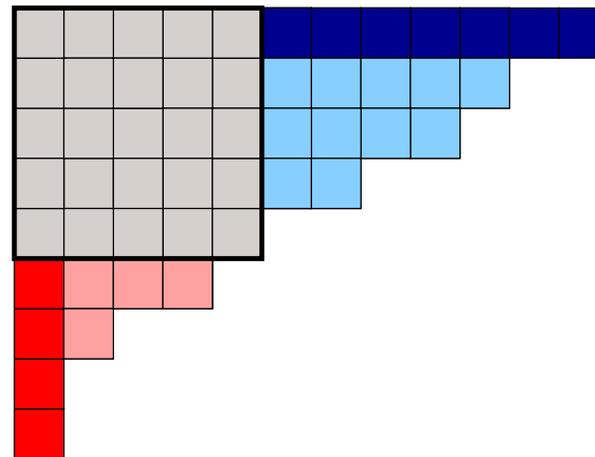
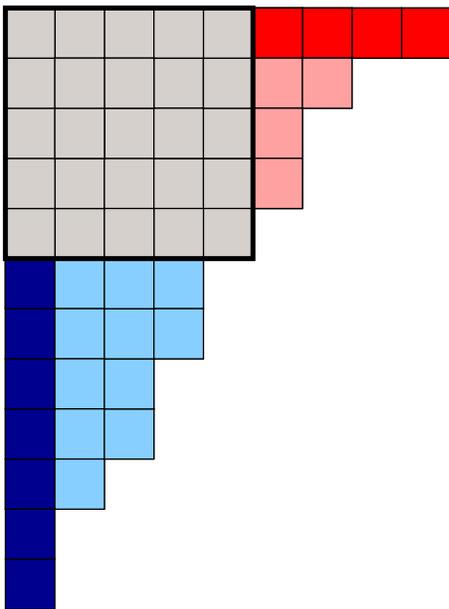
Si  $k = 1$ , cette bijection est la conjugaison:



# Première bijection

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

Si  $k = 1$ , cette bijection est la conjugaison:



# Première bijection

---

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

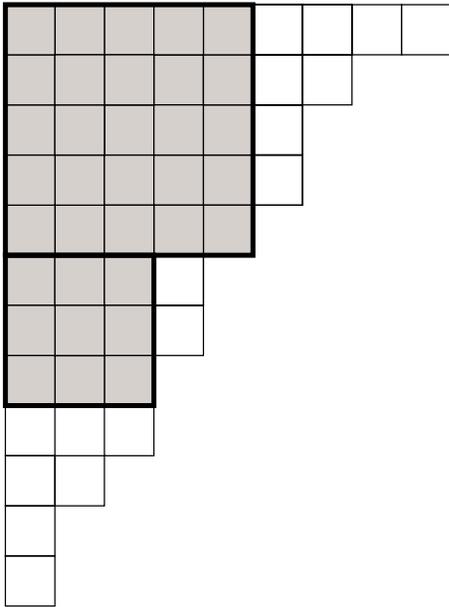
Si  $k = 2$ :

# Première bijection

---

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

Si  $k = 2$ :

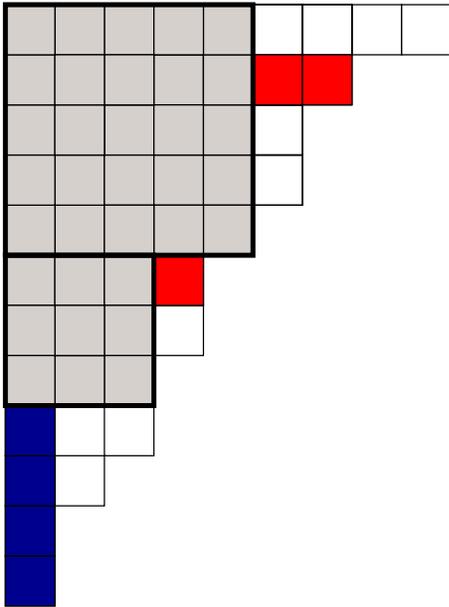


# Première bijection

---

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

Si  $k = 2$ :

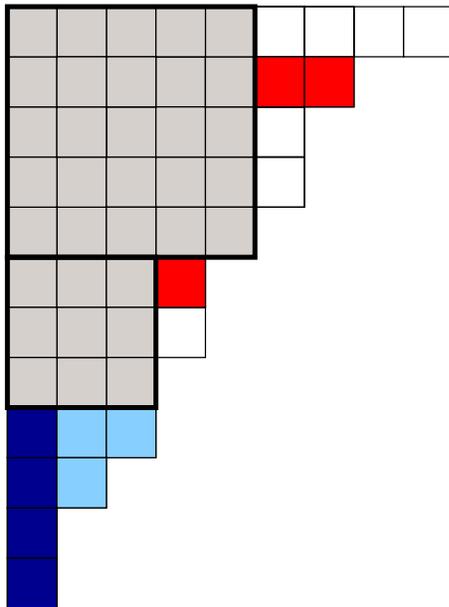


# Première bijection

---

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

Si  $k = 2$ :

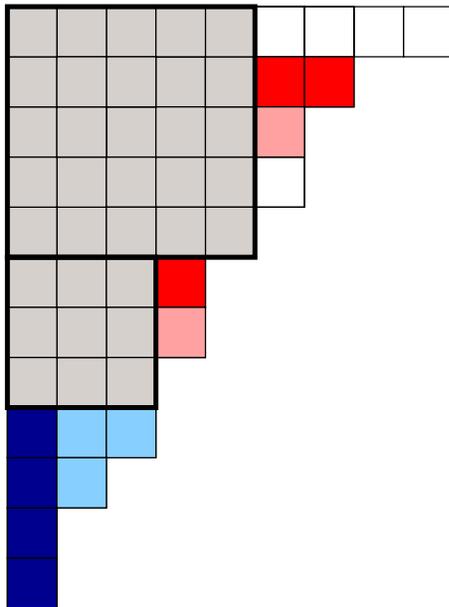


# Première bijection

---

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

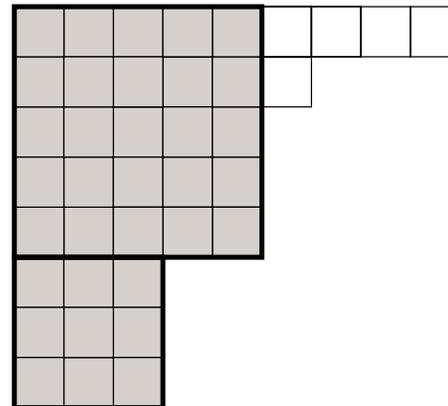
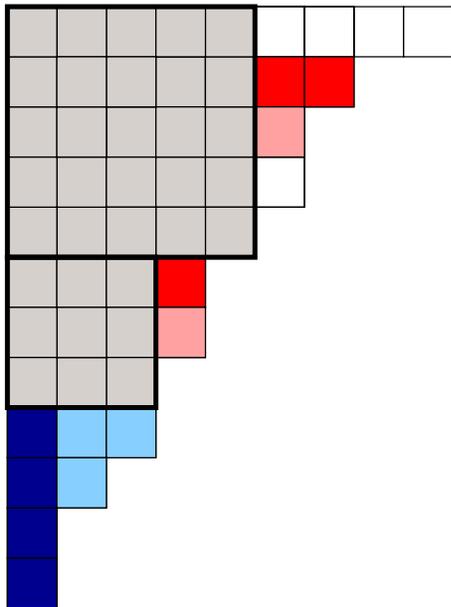
Si  $k = 2$ :



# Première bijection

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

Si  $k = 2$ :

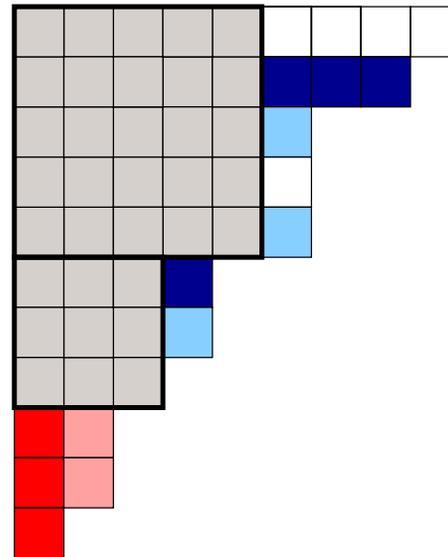
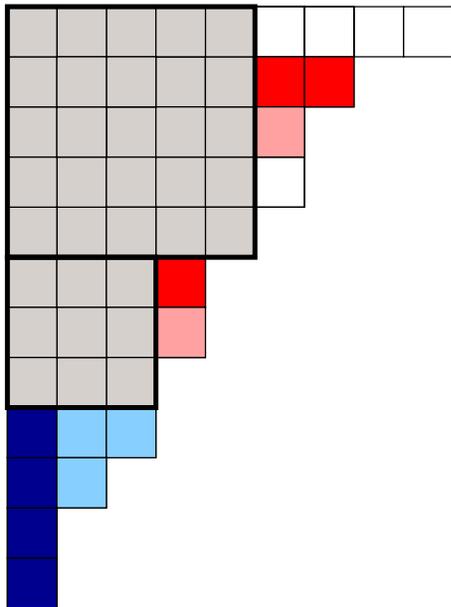




# Première bijection

**Première symétrie.**  $h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$

Si  $k = 2$ :



# Deuxième bijection

---

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

# Deuxième bijection

---

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

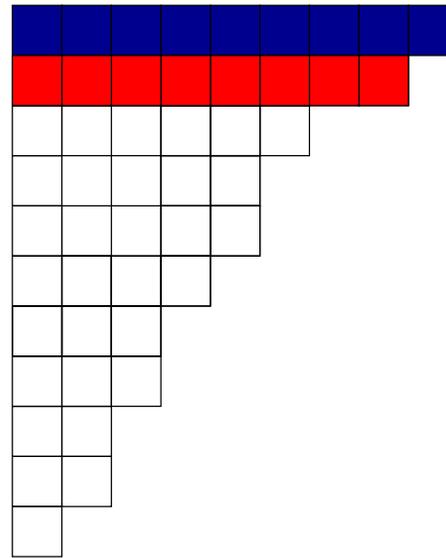
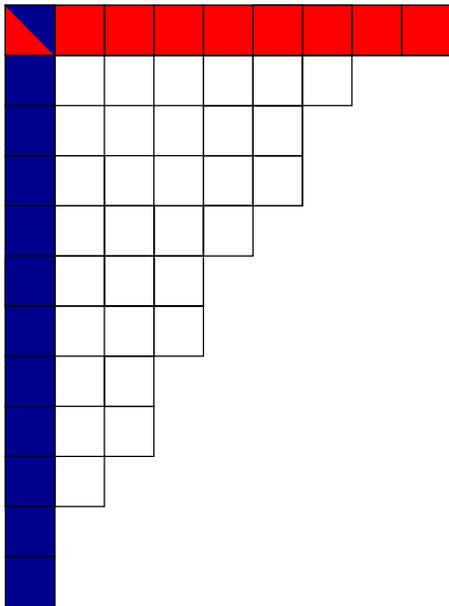
Si  $k = 1$ , cette bijection correspond à la symétrie de Dyson  $\phi_r$ :

# Deuxième bijection

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

Si  $k = 1$ , cette bijection correspond à la symétrie de Dyson  $\phi_r$ :



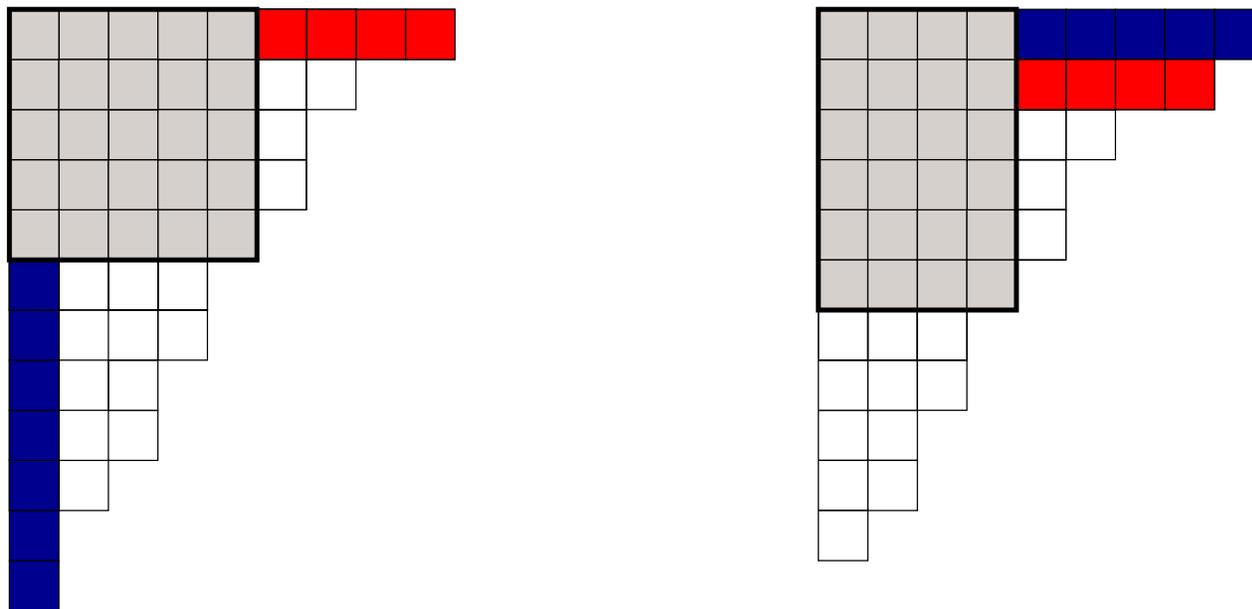
(rang =  $-3$  et  $r = 2$ )

# Deuxième bijection

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

Si  $k = 1$ , cette bijection correspond à la symétrie de Dyson  $\phi_r$ :



(rang =  $-3$  et  $r = 2$ )

# Deuxième bijection

---

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

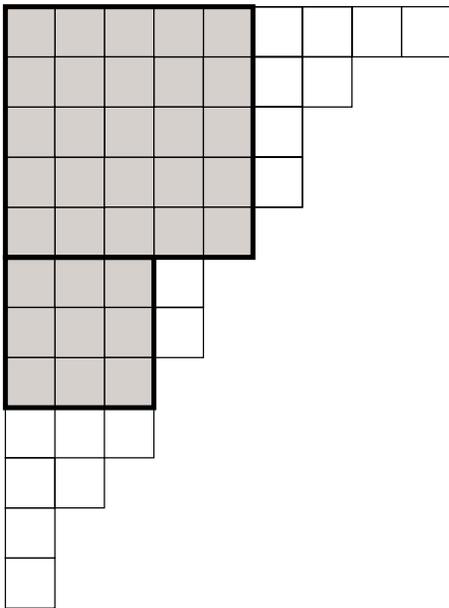
Si  $k = 2$ :

# Deuxième bijection

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

Si  $k = 2$ :

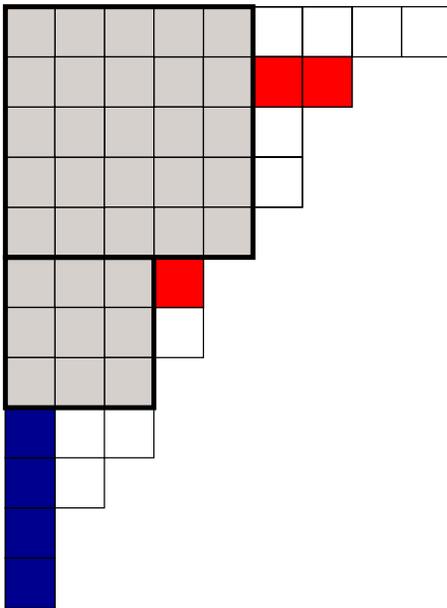


# Deuxième bijection

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

Si  $k = 2$ :

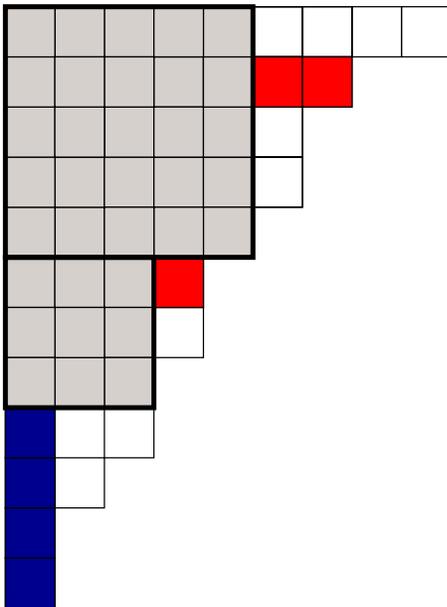


# Deuxième bijection

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

Si  $k = 2$ :



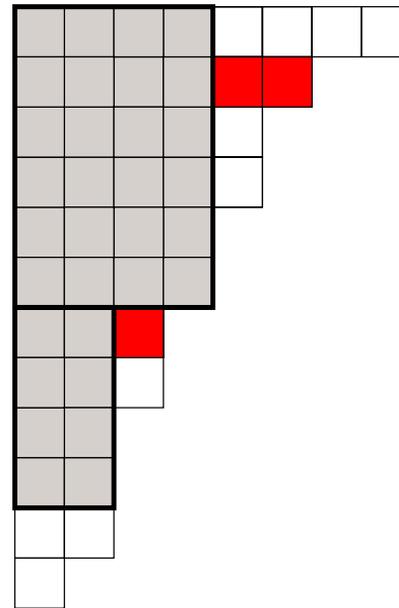
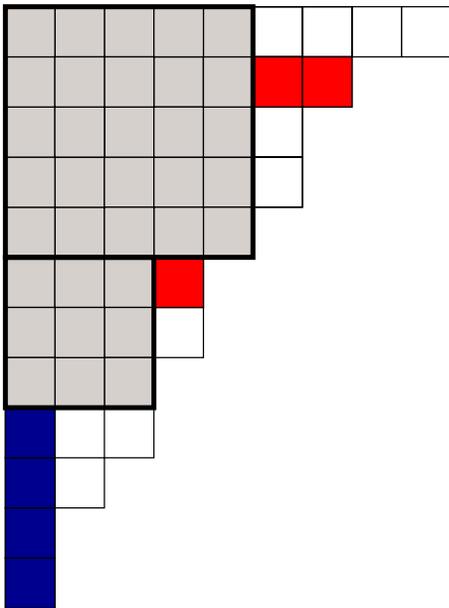
(rang =  $-1$  et  $r = 0$ )

# Deuxième bijection

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

Si  $k = 2$ :



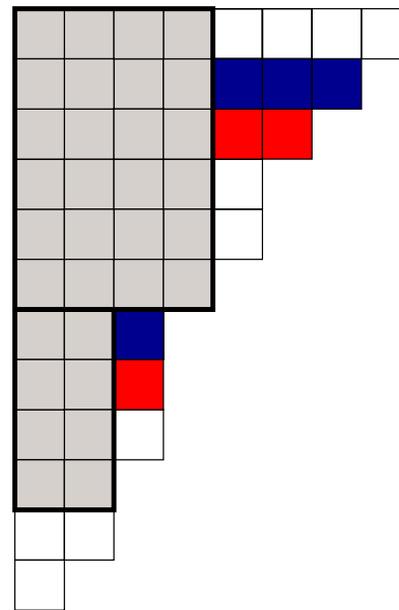
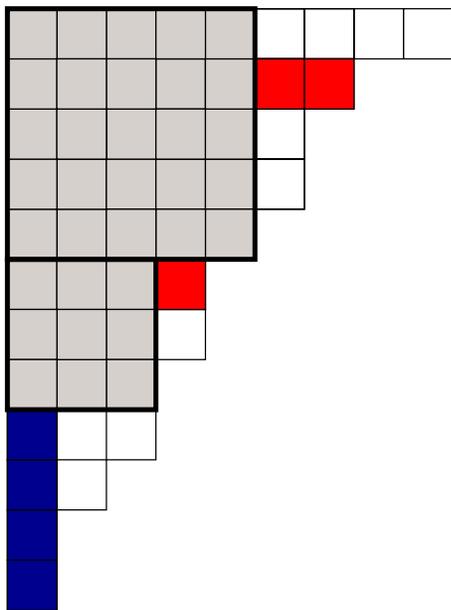
(rang = -1 et  $r = 0$ )

# Deuxième bijection

## Deuxième symétrie.

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

Si  $k = 2$ :



(rang =  $-1$  et  $r = 0$ )

# Les preuves...

---

Pour chaque bijection nous avons:

- pour  $k = 1$  et  $k = 2$ :  
des formules exactes qui décrivent les bijection,
- en général:  
une description qui utilise la sélection et l'insertion

La preuve du lemme qui décrit l'insertion donne un algorithme pour calculer l'insertion, ce qui nous donne un algorithme pour nos deux bijections.

# Symétries

---

$h(n, k, m, r)$  = nombre de partages de  $n$  avec  $(k, m)$ -rang égal à  $r$

# Symétries

---

$h(n, k, m, r)$  = nombre de partages de  $n$  avec  $(k, m)$ -rang égal à  $r$

- Première symétrie

$$h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$$

# Symétries

---

$h(n, k, m, r)$  = nombre de partages de  $n$  avec  $(k, m)$ -rang égal à  $r$

- Première symétrie

$$h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$$

- Deuxième symétrie

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

# Symétries

---

$h(n, k, m, r)$  = nombre de partages de  $n$  avec  $(k, m)$ -rang égal à  $r$

- Première symétrie

$$h(n, k, 0, r) = h(n, k, 0, -r)$$

- Deuxième symétrie

$$h(n, k, m, \leq -r) = h(n - r - k(m + 1), k, m + 2, \geq -r)$$

- et nos observations ...

si  $m > 0$ ,  $h(n, k, m, \leq -r - 1) + h(n, k, m, \geq -r) = p(n)$

si  $m = 0$ ,  $h(n, k, 0, \leq -r - 1) + h(n, k, 0, \geq -r) = p(n) - q(n)$

## Un peu d'algèbre...

---

- La deuxième symétrie et la deuxième observation nous donnent:

$$\sum_{r_{k,m}(\lambda) \leq -r} q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-1} q^{jr + jmk + j^2k + \frac{j(j-1)}{2}}$$

# Un peu d'algèbre...

- La deuxième symétrie et la deuxième observation nous donnent:

$$\sum_{r_{k,m}(\lambda) \leq -r} q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-1} q^{jr+jmk+j^2k+\frac{j(j-1)}{2}}$$

- Avec la première symétrie et la première observation, nous avons:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2+N_2^2+\cdots+N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} =$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(j+1)(2k+1)}{2} - kj}$$

## ... et la preuve est complète

---

Nous avons donné une preuve de la généralisation de l'identité de Schur, ce qui démontre la généralisation d'Andrews des identités de Rogers-Ramanujan:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} = \prod_{n \neq 0, \pm k \pmod{2k+1}} \frac{1}{1 - q^n}$$

où  $N_j = n_j + n_{j+1} + \cdots + n_{k-1}$ .

## Liens avec d'autres résultats

---

- Bressoud et Zeilberger ont trouvé une preuve bijective de la généralisation d'Andrews des identités de Rogers-Ramanujan qui utilise le principe d'involution.

Dans certains cas, notre deuxième bijection ressemble à une de leurs bijections.

## Liens avec d'autres résultats

---

- Bressoud et Zeilberger ont trouvé une preuve bijective de la généralisation d'Andrews des identités de Rogers-Ramanujan qui utilise le principe d'involution.

Dans certains cas, notre deuxième bijection ressemble à une de leurs bijections.

- Garvan a défini une généralisation du rang de Dyson, différente de la nôtre, qu'il appelle le  $k$ -rang.

Nous pouvons démontrer de façon bijective que son  $k$ -rang et notre  $(k, 0)$ -rang ont la même distribution.

# Quelques questions

- Andrews a démontré que pour  $1 \leq a \leq k$ ,

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2 + N_a + \cdots + N_{k-1}}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} = \prod_{n \neq 0, \pm a \pmod{2k+1}} \frac{1}{1 - q^n}$$

# Quelques questions

- Andrews a démontré que pour  $1 \leq a \leq k$ ,

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \cdots + N_{k-1}^2 + N_a + \cdots + N_{k-1}}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \cdots (q)_{n_{k-1}}} = \prod_{n \neq 0, \pm a \pmod{2k+1}} \frac{1}{1 - q^n}$$

## Question.

Est-ce que notre preuve peut prouver ses identités aussi?

# Quelques questions

---

- Ramanujan a démontré que

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}$$

# Quelques questions

---

- Ramanujan a démontré que

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}$$

- Le rang de Dyson explique ce résultat de façon combinatoire.  
(conjecture: Dyson, preuve: Atkin et Swinnerton-Dyer)

# Quelques questions

---

- Ramanujan a démontré que

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}$$

- Le rang de Dyson explique ce résultat de façon combinatoire.  
(conjecture: Dyson, preuve: Atkin et Swinnerton-Dyer)

## Question.

Est-ce qu'il y a des congruences de ce genre pour les partages qui ont  $k$  carrés de Durfee?

## Quelques questions

---

- Berkovich et Garvan ont une version de la symétrie de Dyson pour les diagrammes modulaires de partages (modulo 2). Ils suivent le modèle de la preuve de Dyson et utilisent leur bijection pour donner une preuve combinatoire d'une identité de Gauss.

## Quelques questions

---

- Berkovich et Garvan ont une version de la symétrie de Dyson pour les diagrammes modulaires de partages (modulo 2). Ils suivent le modèle de la preuve de Dyson et utilisent leur bijection pour donner une preuve combinatoire d'une identité de Gauss.

**Question.** Est-ce qu'il y a des versions de nos bijections pour d'autres familles de diagrammes de Ferrers? Quelles identités pouvons-nous prouver avec des bijections de ce genre?

# Quelques questions

---

- Pak a démontré que la symétrie de Dyson peut être répétée pour donner une bijection entre les partages en parts impaires et les partages en parts distinctes.

## Quelques questions

---

- Pak a démontré que la symétrie de Dyson peut être répétée pour donner une bijection entre les partages en parts impaires et les partages en parts distinctes.

### Question.

Est-ce qu'il y a un résultat semblable pour les partages qui ont  $k$  carrés de Durfee?