Tesis de Licenciatura

Raúl Gómez Muñoz

25 de mayo de 2006

Índice general

Introducción

Normalmente, en un primer curso de ecuaciones diferenciales, uno aprende una serie de técnicas que permiten resolver un grupo especial de ecuaciones diferenciales como, por ejemplo, las separables, homogéneas o exactas. Estas técnicas fueron apareciendo paulatinamente hasta que Sophus Lie introdujo los grupos que llevan su nombre y demostró que todas estas técnicas eran casos particulares de un procedimiento general basado en encontrar grupos que transfomaran soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales en otras soluciones del sistema, es decir grupos de simetría para el sistema de ecuaciones diferenciales.

En la visión clásica de Lie los grupos de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales están formados por transformaciones en el espacio de variables independientes y dependientes y actúan en las soluciones transformando sus gráficas. Estos grupos de simetría comunmente actúan de manera no lineal en el espacio base y con frecuencia solo están definidos localmente, es decir, las transformaciones solo tienen sentido para los elementos del grupo suficientemente cercanos a la identidad. Estos grupos no son grupos en el sentido estricto de la palabra ya que la multiplicación de dos de sus elementos no siempre está definida.

La gran ventaja de estudiar grupos con una estructura diferenciable es que las condiciones de invariancia ante la acción del grupo, que generalmente son no lineales y muy complicadas, se pueden reemplazar por la condición de anular a los campos vectoriales generados por la acción. De esta manera el problema se linealiza y este se simplifica notablemente.

A pesar de todas sus ventajas, la teoría de las aplicaciones de los grupos de Lie a las ecuaciones diferenciales desarrollada principalmente por Lie y Noether fué siendo relegada a un segundo término conforme fue siendo cada vez mas aceptada y utilizada la teoría de grupos de Lie globales, es decir grupos de Lie en los cuales la multiplicación si está definida globalmente y que actúan sobre variedades diferenciales abstractas y no solo en subconjuntos abiertos de un espacio Euclideano. Uno de los principales defensores de esta teoría fué E. Cartan, y poco a poco relegó la teoría de grupos locales a la obscuridad.

Al estudiar la acción de grupos globales en variedades abstractas podemos observar que si restringimos nuestra atención a un conjunto abierto U de una variedad M que sea difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces con frecuencia la acción del grupo sobre este abierto solo estará definida localmente y estaremos en un caso similar al de la acción de un grupo local que actúa sobre un abierto

$V \subset \mathbb{R}^n$. Por lo tanto podemos plantearnos el problema de ir en la otra dirección: dada una acción de un grupo local G en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ ¿Existirá un grupo global $\widetilde{G}$ y una variedad M tal que al restringir la acción de $\widetilde{G}$ a un abierto de M y expresarla en coordenadas locales obtengamos la acción de G en U?

Cuando estudiamos los grupo de simetría de ecuaciones diferenciales con frecuencia encontramos que estos solo estan definidos localmente porque el flujo integral de las soluciones se "sale" del espcio sobre el cual estamos trabajando. Es por esto que buscar la manera de ampliar el dominio de definición de la ecuación diferencial a una variedad M en la cual el grupo de simetría de la ecuación sea un grupo global es muy importante porque de esta manera le damos un sentido mas claro a las soluciones que se "salen" del espacio de definición. En este caso "salirse" del espacio base significa simplemente salirse de una carta coordenada y pasar a otra dentro de una misma variedad.

Para construir esta variedades mas grandes en la que las soluciones a la ecuación diferencial no se "salgan" de la variedad necesitaremos obtener información global a partir de los datos locales proporcionados por la ecuación diferencial. Esta información global se obtiene estudiando el grupo de simetría de la ecuación y de esta manera el grupo "decodifica" la información global guardada en la ecuación diferencial.

En este trabajo nos ocuparemos de desarrollar la teoría de grupos locales, para después, a partir de ellos obtener información global a partir de la información codificada en las ecuaciones diferenciales.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos las herramientas necesarias para el estudio de las ecuaciones diferenciales usando grupos de Lie. En especial nos concentraremos en los grupos de Lie locales y sus propiedades.

En las primeras secciones enunciaremos el importante teorema de Frobenius y daremos su demostración. Después de esto definiremos lo que es un grupo de Lie local y estudiaremos sus propiedades básicas.

En las siguientes secciones estudiaremos las acciones de grupos de Lie locales en variedades suaves y describiremos los métodos mas comunes para encontrar sus invariantes.

A lo largo de este trabajo usaremos la notación usual para referirnos a las variedades diferenciables y a los objetos algebraicos asociados a ellas, es decir, si M, N son dos variedades diferenciables, $C^\infty(M)$ denotará el álgebra de funciones diferenciables de M a $\mathbb{R}$. $\mathfrak{X}(M)$ denotará el ágebra de Lie de los campos vectoriales diferenciables definidos en M. Si $F : M \to N$ es una función diferenciable, denotaremos por $F^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ al morfismo de álgebras que induce F vía $f \mapsto f \circ F$. Identificaremos también a cada $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}(M)$ con una aplicación $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ lineal que satisface la regla de Leibnitz, es decir, con una derivación. Finalmente, $\Omega(M)$ denotará el espacio de formas diferenciales definidas en la variedad M.

1.1. El Teorema de Frobenius

Dado un campo vectorial suave en una variedad M siempre podemos encontrar su *flujo integral*, es decir, curvas tales que su vector tangente en cada punto coincide con el campo vectorial dado de antemano. Teniendo esto en cuenta podemos preguntarnos si, en lugar de elegir en cada punto un solo vector tangente, elegimos un subespacio del espacio tangente de manera *suave* ¿Podremos hallar subvariedades tales que su espacio tangente en cada punto coincida con el subespacio del espacio tangente a M elegido de antemano? El teorema de Frobenius nos indica cuando es posible encontrar estas *variedades integrales*.

Antes de enunciar el teorema de Frobenius necesitaremos dar algunas definiciones.

Definición 1.1. Sean M y N dos variedades y sea $F : M \to N$ una función suave. Sean $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}(N)$. Decimos que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ están F-relacionados si

$$F^* \circ \mathbf{v} = \mathbf{u} \circ F^*.$$

Proposición 1.2. *Sea $F : M \to N$ suave. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in \mathfrak{X}(M)$ y $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_1$ están F-relacionadas y $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u}_2$ están F-relacionados, entonces $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ y $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ están F-relacionados.*

Dem. Solamente tenemos que observar que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \circ F^* &= (\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_1) \circ F^* \\
&= \mathbf{v}_1 \circ F^* \circ \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 \circ F^* \circ \mathbf{u}_1 \\
&= F^* \circ \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 - F^* \circ \mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_1 \\
&= F^* \circ [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]
\end{aligned}$$

la última igualdad es justamente lo que queríamos probar. □

Definición 1.3. Sea M una variedad de dimensión m. Sea $1 \leq r \leq m$ un entero. Una distribución $\mathfrak{D}$, r-dimensional, en la variedad M es una elección de un subespacio r-dimensional $\mathfrak{D}(x) \subset T_x M$ para cada $x \in M$. Decimos que $\mathfrak{D}$ es suave si para cada x en M existe una vecindad U de x y r campos vectoriales $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ de clase C^∞ en U que generan a $\mathfrak{D}$ en cada punto de U. Un campo vectorial $\mathbf{v}$ en M se dice que pertenece a la distribución $\mathfrak{D}$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{D}$ si $\mathbf{v}|_x \in \mathfrak{D}(x)$ para cada $x \in M$. Una distribución suave $\mathfrak{D}$ se llama involutiva si $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] \in \mathfrak{D}$ simpre que $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{D}$.

Definición 1.4. Una subvariedad $N \subset M$ se dice que es una variedad integral de la distribución $\mathfrak{D}$ de M si

$$T_x N = \mathfrak{D}(x) \qquad \forall x \in N.$$

Definición 1.5. Una distribución $\mathfrak{D}$ en M se dice que es completamente integrable si para cada $x \in M$ existe una subvariedad $N \subset M$ con $x \in N$ tal que N es una variedad integral de $\mathfrak{D}$.

Proposición 1.6. *Sea $\mathfrak{D}$ una distribución completamente integrable en M. Entonces $\mathfrak{D}$ es involutiva.*

Dem. Sean $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{D}$, y sea N una variedad integral de $\mathfrak{D}$ que pasa por x. Entonces $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}(N)$ y por lo tanto

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}]_{(x)} \in T_x N = \mathfrak{D}(x).$$

Por lo tanto $\mathfrak{D}$ es involutiva. □

Teorema 1.7 (Frobenius). *Sea M una variedad diferenciable de dim m y sea $\mathfrak{D}$ una distribución r-dimensional, involutiva en M. Entonces existe una variedad integral N de $\mathfrak{D}$ que pasa a través de x. De hecho existe un sistema de coordenadas (U, φ) centrado en x, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_m$ tales que, para cada elección de $m - r$ constantes $c_{r+1}, \ldots, c_m$ la rebanada*

$$x_i = c_i \qquad i = r+1, \ldots, m \tag{1.1}$$

define una variedad integral de $\mathfrak{D}$. Además si N es una variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ tal que $N \subset U$, entonces N está contenida en una de estas rebanadas.

Dem. Probaremos la existencia usando inducción en r. Para el caso $r = 1$, escojamos un campo vectorial $\mathbf{v} \in \mathfrak{D}$, definido en una vecindad de x, tal que $\mathbf{v}|_x \neq 0$. Entonces podemos elegir coordenadas (U, φ) alrededor de x de tal manera que

$$\mathbf{v}|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Por lo tanto el resultado se cumple para $r = 1$.

Ahora supongamos que el teorema es cierto hasta $r - 1$. Queremos probar que el resultado se cumple para r. Como $\mathfrak{D}$ es suave, existen campos vectoriales $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ que generan a $\mathfrak{D}$ en una vecindad $\widetilde{V}$ de x. Podemos elegir un sistema de coordenadas locales $(V, y_1, \ldots, y_m)$ centrado en x, con $V \subset \widetilde{V}$ tal que

$$\mathbf{v}_1|_V = \frac{\partial}{\partial y_1}. \tag{1.2}$$

En V definamos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i(y_1)\mathbf{v}_1 \qquad i = 1, \ldots l. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Los campos vectoriales $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente independientes en V, y por tanto generan a $\mathfrak{D}$ en V. Sea S la rebanada $y_1 = 0$, y sean

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i|_S \qquad i = 2, \ldots, l. \tag{1.4}$$

De (1.2) y (1.3)

$$\mathbf{u}_i(y_1) = \mathbf{v}_i(y_1) - \mathbf{v}_i(y_1)\mathbf{v}_1(y_1) = 0 \tag{1.5}$$

por lo tanto los $\mathbf{w}_i$'s son campos vectoriales en S. Como los $\mathbf{w}_i$'s son linealmente independientes generan una distribución de dimensión $r - 1$ en S. Ahora si $i, j \geq 2$ tenemos que

$$[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k \mathbf{u}_k$$

con c_{ij}^k funciones suaves, pero

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j](y_1) &= \mathbf{u}_i \circ \mathbf{u}_j(y_1) - \mathbf{u}_j \circ \mathbf{u}_i(y_1) = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k \mathbf{u}_k(y_1) \\ &= \mathbf{u}_i \circ 0 - \mathbf{u}_j \circ 0 = c_{ij}^1 \end{aligned}$$

por lo tanto $c_{ij}^1 = 0$, si i, $j \geq 2$. Así

$$[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j] = \sum_{k=2}^{r} c_{ij}^k \mathbf{u}_k \tag{1.6}$$

y por lo tanto

$$[\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j] = \sum_{k=2}^{r} c_{ij}^k \mathbf{w}_k. \tag{1.7}$$

Esta ecuación nos dice que la distribución generada por $\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r$ en S es involutiva. Por hipótesis de inducción existe un sistema de coordenadas $z_2, \ldots, z_m$ en alguna vecindad de x en S tal que las rebanadas $z_i = c_i$, donde las c_i's son constantes son precisamente las variedades integrales de la distribución generada por $\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r$ en esta vecindad.

Las funciones

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_j &= z_j \circ \pi \qquad j = 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde $\pi : V \to S$ es la proyección natural en el sistema de coordenadas de y, están definidas en alguna vecindad de x en M, son independientes en x y todas son cero en x. Por lo tanto existe un sistema de coordenadas centrado en x con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_m$ en una vecindad U de x. Ahora probaremos que

$$\mathbf{u}_i(x_{r+l}) \equiv 0 \qquad \begin{aligned} i &= 1, \ldots, r \\ r &= 1, \ldots, m-r \end{aligned} \tag{1.9}$$

una vez probada esta afirmación podremos conclur que los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}$ forman una base de $\mathfrak{D}$ en cada punto de U, y por lo tanto las rebanadas (1.1) son variedades integrales de $\mathfrak{D}$.

Para probar (1.9), observemos primero que de (1.8)

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & j = 2, \ldots, m \end{cases} \tag{1.10}$$

en U. Por lo tanto, de (1.2), (1.3) y (1.10), se sigue que,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{1.11}$$

en U. Por lo tanto (1.9) se cumple para $i = 1$. Ahora supongamos que $i \in \{2, \ldots, r\}$ y $l \in \{1, \ldots, m-r\}$. De (1.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{u}_i(x_{r+l})) &= \mathbf{u}_1(\mathbf{u}_i(x_{r+l})) \\ &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i](x_{r+l}) + \mathbf{u}_i(\mathbf{u}_1(x_{r+l})) \\ &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i](x_{r+l}) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ahora, como $\mathfrak{D}$ es involutiva, existen funciones suaves c_{1i}^k tales que

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i] = \sum_{k=1}^{r} c_{1i}^k \mathbf{u}_k. \tag{1.13}$$

De (1.13) y (1.12) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{u}_i(x_{r+l})) = \sum_{k=2}^{r} c_{1i}^k \mathbf{u}_k(x_{r+l}) \qquad \begin{array}{l} i = 2, \ldots, r, \\ l = 1, \ldots, m-r. \end{array} \tag{1.14}$$

Fijemos una rebanada en U de la forma $x_2 = c_2, \ldots, x_r = c_r$ con $c_2, \ldots, c_r$ constantes. En esta rebanada $u_i(x_{r+l})$ es una función de x_1 solamente, y (1.14) se convierte en un sistema de $r-1$ ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con respecto a x_1.

$$\begin{pmatrix} c_{12}^2 & \cdots & c_{12}^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1r}^2 & \cdots & c_{1r}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2(x_{r+l}) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_l(x_{r+l}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{u}_2(x_{r+l}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_l}\mathbf{u}_l(x_{r+l}) \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Ahora, por hipótesis de inducción,

$$\mathbf{u}_i(x_{r+l})(0, k_2, \ldots, k_m) = \mathbf{w}_i(x_{r+l})(k_2, \ldots, k_m) = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 2, \ldots, r \\ l = 1, \ldots, m-r. \end{array} \tag{1.16}$$

Por lo tanto de (1.15), (1.16) y el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales con condición inicial, $\mathbf{u}_i(x_{r+l})$ debe ser idénticamente cero en U. Así (1.9) se cumple y el paso de inducción está completo.

Finalmente supongamos que $N \subset M$ es una variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ tal que $N \subset U$ y sea π la proyección de $\mathbb{R}^m$ sobre las últimas $m-r$ coordenadas. Entonces los vectores en $\mathfrak{D}$ son aniquilados por $d(\pi \circ \varphi)$ (recordemos que φ proporciona las coordenadas locales de U), es decir

$$d(\pi \circ \varphi)|_{TN} \equiv 0$$

de donde $\pi \circ \varphi$ es constante, ya que N es conexo. Por lo tanto N está contenido en una de las rebanadas (1.1). □

1.2. Grupos Locales de Transformaciones

Como veremos mas adelante los grupos locales de transformaciones surgen de manera natural al estudiar los grupos de simetría de las ecuaciones diferenciales. Justamente este tipo de grupos son los que consideró Sophus Lie cuando desarrolló su teoría de grupos diferenciales.

Definición 1.8. Un grupo de Lie local de r-parámetros consiste de subconjuntos abiertos conexos $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ que contienen al origen, y de funciones suaves

$$m : V \times V \to \mathbb{R}^r,$$

e

$$i : V_0 \to V,$$

con las siguientes propiedades.

1. *Asociatividad.* Si x, y, $z \in V$, y $m(x,y)$, $m(y,z) \in V$, entonces

$$m(x, m(y,z)) = m(m(x,y), z).$$

2. *Elemento Identidad.* Para toda $x \in V$, $m(0,x) = x = m(x,0)$.

3. *Inversos.* Para todo x en $\mathbf{v}_0$, $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

Normalmente denotaremos a $m(x,y)$ por $x \cdot y$ y a $i(x)$ por x^{-1} y omitiremos hacer referencia a V_0 y V si estos se identifican fácilmente a partir del contexto.

Definición 1.9. Sea M una variedad diferenciable. Un *grupo local de transformaciones* que actúa en M está dado por un grupo de Lie local G, y un subconjunto abierto U de $G \times M$, con

$$\{e\} \times M \subset U \subset G \times M,$$

que es el dominio de definición de la acción del grupo, y una función suave $\psi : U \to M$ con las siguientes propiedades:

1. Si $(h,x) \in U$, $(g, \psi(h,x)) \in U$ y $(g \cdot h, x) \in U$, entonces

$$\psi(g, \psi(h,x)) = \psi(g \cdot h, x).$$

2. Para todo $x \in M$,

$$\psi(e,x) = x.$$

3. Si $(g,x) \in U$, entonces $(g^{-1}, \psi(g,x)) \in U$ y

$$\psi(g^{-1}, \psi(g,x)) = x.$$

Por brevedad escribiremos $g \cdot x$ en lugar de $\psi(g,x)$. Observemos que para cada $x \in M$ el conjunto

$$G_x := \{g \in G | (g,x) \in U\}$$

forma un grupo de Lie local. Observemos también que para cada $g \in G$ el conjunto

$$M_g := \{x \in M | (g,x) \in U\}$$

es una subvariedad abierta de M. Diremos que un grupo local de transformaciones actúa regularmente en una variedad si todas sus órbitas son de rango máximo y diremos que actúa semiregularmente si todas sus órbitas tienen la misma dimensión.

Ejemplo 1.10. Sean $G = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}$,

$$U = \{(t, x) \in G \times M \mid tx \neq 1\},$$

y definamos $\psi : U \to \mathbb{R}$ mediante $\psi(t, x) = x/(1-tx)$. Notemos que ψ esta bién definida en U y además

$$\psi(0, x) = x$$

$$\psi(t_1, \psi(t_2, x)) = \psi\big(t_1, \frac{x}{1-t_2x}\big) = \frac{\frac{x}{1-t_2x}}{1-t_1\big(\frac{x}{1-t_2x}\big)} = \frac{x}{1-(t_1+t_2)x}$$

de donde

$$\psi(t_1, \psi(t_2, x)) = \psi(t_1 + t_2, x)$$

y finalmente

$$\psi(-t, \psi(t, x)) = x.$$

Por lo tanto ψ cumple todas las condiciones de un grupo local de transformaciones.

Quisiéramos destacar que ψ es el flujo integral de la ecuación diferencial $x' = x^2$. En general dado un campo vectorial

$$\mathbf{v} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

podemos definir la ecuación diferencial

$$x' = \xi(x)$$

donde $\xi(x) = (\xi^1(x), \ldots, \xi^n(x))$. El flujo integral ψ de esta ecuación diferencial define una acción de un grupo de Lie (local) uniparamétrico. De ahora en adelante dado un campo vectorial $\mathbf{v}$, definiremos

$$(\exp \varepsilon\mathbf{v}) \cdot x = \psi_\varepsilon(x).$$

Esta notación no debe causar confusión con el otro mapeo exponencial

$$\exp t\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathbf{v}^n}{n!} : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

ya que en cualquier caso debe resultar claro del contexto a cual función exponencial nos referiremos en cada caso. Observemos que con esta notación, si $\psi_\varepsilon(x) = \exp \varepsilon v \cdot x$, entonces $\psi_\varepsilon^* = \exp \varepsilon\mathbf{v}$.

Como veremos en la siguiente sección, si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ generan un álgebra de Lie de campos vectoriales, entonces existe $U \subset \mathbb{R}^r \times M$ tal que

$$\psi : U \to M$$
$$((\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r), x) \mapsto (\exp \varepsilon_r\mathbf{v}_r) \cdot \ldots \cdot (\exp \varepsilon_1\mathbf{v}_1) \cdot x$$

define un grupo local de transformaciones.

1.3. Álgebras de Lie de Campos Vectoriales

Sea M una variedad suave y sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ campos vectoriales definidos en M que forman un álgebra de Lie. Demostraremos que existe un grupo de Lie local que actúa en M tal que lo campos vectoriales asociados a su acción son justamente $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$. Definamos

$$\begin{aligned} \psi : U \subset \mathbb{R}^r \times M &\longrightarrow M \\ ((t_1, \ldots, t_r), x) &\mapsto (\Gamma^r_{t_r} \circ \ldots \circ \Gamma^1_{t_1})(x) \end{aligned}$$

donde Γ^i es el flujo integral de $\mathbf{v}_i$ y

$$U = \{(t, x) \in \mathbb{R}^r \times M \mid (\Gamma^r_{t_r} \circ \ldots \circ \Gamma^1_{t_1})(x) \text{ está definido}\}.$$

Como los flujos integrales son continuos, U es abierto. Observemos que, como Γ^i es el flujo integral de $\mathbf{v}_i$,

$$\frac{d}{dt}\Gamma^{i*}_t = \Gamma^{i*}_t \circ \mathbf{v}_i.$$

Sea $V = \pi_1(U)$ donde π_1 es la proyección en la primera coordenada de $\mathbb{R}^r \times M$. Queremos darle a V una estructura de grupo de Lie local de manera que ψ defina un grupo de transformaciones en M y tal que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ sean los campos vectoriales asociados a esta acción.

Definamos

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} : TV \times M &\longrightarrow TM \\ \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\bigg|_{(s_1,\ldots,s_r)}, x\right) &\mapsto \frac{d}{dt_i}\bigg|_{t_i=0} (\Gamma^{1*}_{s_1} \circ \ldots \circ \Gamma^{i*}_{s_i+t_i} \circ \ldots \circ \Gamma^{r*}_{s_r})\big|_x . \end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{d}{dt_i}\bigg|_{t_i=0} (\Gamma^{1*}_{s_1} \circ \ldots \circ \Gamma^{i*}_{s_i+t_i} \circ \ldots \circ \Gamma^{n*}_{s_n}) = \Gamma^{1*}_{s_1} \circ \ldots \circ \Gamma^{i*}_{s_i} \circ \mathbf{v}_1 \circ \ldots \circ \Gamma^{r*}_{s_r}. \quad (1.17)$$

Antes de continuar con nuestra construcción necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.11 *Sea M una variedad diferenciable y sea $\mathfrak{g} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ un álgebra de Lie de campos vectoriales con constantes de estructura C^k_{ij}. Si definimos*

$$\begin{aligned} T_j : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \mathbf{v}_i &\mapsto \sum_{k=1}^{r} C^k_{ij}\mathbf{v}_k, \end{aligned}$$

para $j = 1, \ldots, r$. Entonces

$$\mathbf{v}_i \circ \exp(\varepsilon \mathbf{v}_j) = \exp(\varepsilon \mathbf{v}_j) \circ (e^{\varepsilon T_j}\mathbf{v}_i) \quad (1.18)$$

Observemos que el lema es equivalente a decir que

$$\mathrm{Ad}\,(\exp \varepsilon \mathbf{v}_j)(\mathbf{v}_i) = \exp\,(\mathrm{ad}\,(\varepsilon \mathbf{v}_j))(\mathbf{v}_i)$$

Dem. Primero probaremos la siguiente fórmula

$$\mathbf{v}_i \circ \mathbf{v}_j^l = \sum_{n=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ n \end{pmatrix} \mathbf{v}_j^n \circ (T_j^{l-n} \mathbf{v}_i)$$

Para probar esta fórmula procederemos por inducción. Para $l = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i \circ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_j \circ \mathbf{v}_i + \sum_{k=0}^{r} C_{ij}^k \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{n=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \mathbf{v}_j^n \circ T_j^{1-n} \mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto la fórmula es válida cuando $l = 1$. Ahora supongamos que la fórmula es válida hasta algún entero l, entonces se tiene que

$$\mathbf{v}_i \circ \mathbf{v}_j^{l+1} = \mathbf{v}_i \circ \mathbf{v}_j^l \circ \mathbf{v}_j = \sum_{n=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ n \end{pmatrix} x_j^n \circ (T_j^{l-n} \mathbf{v}_i) \circ \mathbf{v}_j. \tag{1.19}$$

Sean C_{ij}^{kn} constantes tales que $T_j^{l-n} \mathbf{v}_i = \sum_{k=0}^{r} C_{ij}^{kn} \mathbf{v}_k$. Entonces de (1.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i \circ \mathbf{v}_j^{l+1} &= \sum_{n=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ n \end{pmatrix} \left(\sum_{k=0}^{r} C_{ij}^{kn} \right) [\mathbf{v}_j^n \circ \mathbf{v}_k \circ \mathbf{v}_j] \\ &= \sum_{n=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ n \end{pmatrix} [\mathbf{v}_j^{n+1} \circ \left(\sum_{k=0}^{r} C_{ij}^{kn} \mathbf{v}_k \right) + \mathbf{v}_j^n \circ T_j \left(\sum_{k=0}^{r} C_{ij}^{kn} \mathbf{v}_k \right)] \\ &= \sum_{n=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ n \end{pmatrix} [\mathbf{v}_j^{n+1} \circ T_j^{l-n} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j^n \circ T_j^{l+1-n} \mathbf{v}_i] \\ &= \sum_{n=0}^{l+1} \begin{pmatrix} l+1 \\ n \end{pmatrix} \mathbf{v}_j^n \circ T_j^{l+1-n} \mathbf{v}_i \end{aligned}$$

lo cual completa el paso de inducción y por lo tanto la fórmula (1.18) es válida para toda l. Ahora ya con esta fórmula en mano podemo calcular

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i \circ \exp\,(t\mathbf{v}_j) &= \mathbf{v}_i \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{v}_j)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{v}_i \circ \mathbf{v}_j^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [\sum_{l=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} \mathbf{v}_j^l \circ T_j^{n-l} \mathbf{v}_i] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\left(\frac{t^l\mathbf{v}_j^l}{l!}\right)\circ\left(\frac{t^{n-l}T_j^{n-l}}{(n-l)!}\right)\mathbf{v}_i \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^l\mathbf{v}_j^l}{l!}\circ\frac{t^kT_j^k\mathbf{v}_i}{k!} \\
&= \exp\left(t\mathbf{v}_j\right)\circ \mathrm{e}^{tT_j}\mathbf{v}_i
\end{aligned}
$$

es decir

$$\mathbf{v}_i\circ\exp\left(\varepsilon\mathbf{v}_j\right) = \exp\left(\varepsilon\mathbf{v}_j\right)\circ \mathrm{e}^{\varepsilon T_j}\mathbf{v}_i$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Al usar este lema en (1.17) obtenemos

$$\left.\frac{d}{dt_i}\right|_{t_i=0}(\Gamma_{s_1}^{1*}\circ\ldots\circ\Gamma_{s_i+t_i}^{i*}\circ\ldots\circ\Gamma_{s_r}^{r*}) = \Gamma_{s_1}^{1*}\circ\ldots\circ\Gamma_{s_r}^{r*}\circ(\mathrm{e}^{s_rT_r}\circ\ldots\circ\mathrm{e}^{s_{i+1}T_{i+1}})\mathbf{v}_i. \tag{1.20}$$

Sea $A(s_1,\ldots,s_r)$ una transformación lineal tal que

$$A(s_1,\ldots,s_r)\mathbf{v}_i = \mathrm{e}^{s_rT_r}\circ\ldots\circ\mathrm{e}^{s_{i+1}T_{i+1}}\mathbf{v}_i.$$

Como $A(0,\ldots,0)=\mathbf{id}$ y el conjunto de las transformaciones lineales invertibles es abierto en el conjuntos de las transformaciones lineales, existe $\overline{V}\subset V$ vecindad del origen tal que si $(s_1,\ldots,s_r)\in\overline{V}$ entonces $A(s_1,\ldots,s_r)$ es invertible.

Sean $a_{ij}(s_1,\ldots,s_r)$ funciones suaves tales que

$$A(s_1,\ldots,s_r)\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{r}a_{ij}(s_1,\ldots,s_r)\mathbf{v}_i$$

y sean $\tilde{a}_{ij}(s_1,\ldots,s_r)$ tales que

$$(A(s_1,\ldots,s_r))^{-1}\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{r}\tilde{a}_{ij}(s_1,\ldots,s_r)\mathbf{v}_i.$$

Definamos

$$
\begin{aligned}
R(s_1,\ldots,s_r):\mathfrak{X}(\overline{V}) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\overline{V}) \\
\frac{\partial}{\partial t_j} &\mapsto \sum_{i=1}^{r}\tilde{a}_{ij}\frac{\partial}{\partial t_i}
\end{aligned}
$$

y sean $\mathbf{u}_i = R(\frac{\partial}{\partial t_i})\in\mathfrak{X}(\overline{V})$. Entonces de la ecuación (1.20), y por como se definieron las $\mathbf{u}_i$'s, tenemos que

$$\widetilde{\psi}(\left.\mathbf{u}_i\right|_{(s_1,\ldots,s_r)},x) = \Gamma_{s_1}^{1*}\circ\ldots\circ\Gamma_{s_r}^{r*}\left.\mathbf{v}_i\right|_x = \left.\mathbf{v}_i\right|_{(\Gamma_{s_r}^{r}\circ\ldots\circ\Gamma_{s_1}^{1})(x)}$$

De esta última ecuación concluímos que los $\mathbf{u}_i$'s son linealmente independientes para todo $(s_1,\ldots,s_n)\in\overline{V}$.

Sean $\phi^1, \ldots, \phi^r$ los flujos integrales de los $\mathbf{u}_i$'s. Si definimos $\alpha_t^1(x) = \psi(\phi_t^1(0), x)$, entonces

$$\frac{d}{dt}\alpha_t^{1*} = \alpha_t^{1*} \circ \mathbf{v}_1, \qquad \alpha_0^1(x) = x.$$

Por lo tanto a_t^1 y $\Gamma_t^1(x)$ satisfacen la misma ecuación diferencial con condición inicial, por lo tanto $\alpha_t^1(x) = \Gamma_t^1(x)$. Procediendo inductivamente podemos definir

$$\alpha_{t_1,\ldots,t_k}^k(x) = \psi(\phi_{t_k}^k \circ \ldots \circ \phi_{t_1}^1(0), x).$$

Si suponemos que para toda $j \leq k$, $\alpha_{t_1,\ldots,t_j}^j(x) = (\Gamma_{t_j}^j \circ \ldots \circ \Gamma_{t_1}^1)(x)$ entonces

$$\frac{d}{dt}\alpha_{t_1,\ldots,t_{k-1},t}^{k*} = \alpha_{t_1,\ldots,t_{k-1},t}^{k*} \circ \mathbf{v}_k, \qquad \alpha_{t_1,\ldots,t_{k-1},0}^k(x) = (\Gamma_{t_{k-1}}^k \circ \ldots \circ \Gamma_{t_1}^1)(x).$$

Por lo tanto $\alpha_{t_1,\ldots,t_{k-1},t}^{k*}$ y $\Gamma_t^k \circ \ldots \circ \Gamma_{t_1}^1(x)$ satisfacen la misma ecuación diferencial con condición inicial y por tanto son iguales. De todo esto podemos concluír que

$$\psi(\phi_{t_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{t_1}^1(0), x) = \Gamma_{t_r}^r \circ \ldots \circ \Gamma_{t_1}^1(x) \tag{1.21}$$

para todo $(t_1, \ldots, t_r) \in V$. De la ecuación (1.21) observamos que

$$(\phi_{t_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{t_1}^1)(0) = (t_1, \ldots, t_r).$$

Sea $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ una vecindad del cero donde la función

$$\begin{aligned} \exp : \widetilde{V} &\longrightarrow V \\ \mathbf{v} = (a_1, \ldots, a_r) &\mapsto \Gamma_1^{\mathbf{v}}(0), \end{aligned}$$

con $\Gamma_t^{\mathbf{v}*} = \exp t(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r)$, esté definida. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_0 \exp : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (a_1, \ldots, a_r) &\mapsto (a_1, \ldots, a_r) \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Por lo tanto, por el teorema de la función inversa, existen V_0, $\widetilde{V}_0 \subset \overline{V} \cap \widetilde{V}$ tales que

$$\exp : \widetilde{V}_0 \longrightarrow V_0$$

es un difeomorfismo.

Definamos una multiplicación en V_0 de la siguiente manera

$$(\phi_{t_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{t_1}^1)(0) \cdot (\phi_{s_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{s_1}^1)(0) = (\phi_{s_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{s_1}^1 \circ \phi_{t_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{t_1}^1)(0).$$

De lo que acabamos de ver, si $(\phi_{t_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{t_1}^1)(0) \in V_0$, entonces existe $\mathbf{u} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ tal que

$$(\phi_{t_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{t_1}^1)(0) = \Gamma_1^{\mathbf{u}}(0).$$

como exp es un difeomorfismo local, existe $(s_1, \ldots, s_r) \in V_0$ tales que

$$\Gamma_1^{-\mathbf{u}}(0) = (\phi_{s_r}^r \circ \ldots \circ \phi_{s_1}^1)(0)$$

y por lo tanto

$$(\phi^n_{s_n} \circ \ldots \circ \phi^1_{s_1})(0) \cdot (\phi^n_{t_n} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1})(0) = 0,$$

es decir todo elemento en V_0 tiene un inverso.

Usando estas definiciones observamos que

$$\begin{aligned}(\phi^k_t \circ \ell_g)(a) &= \phi^k_t(ga) = (ga)(\phi^k_t(0))\\ (\ell_g \circ \phi^k_t)(a) &= \ell_g(\phi^k_t(a)) = (ga)(\phi^k_t(0))\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\ell_g : V_0 &\longrightarrow \overline{V}\\ a &\mapsto ga\end{aligned}$$

es la traslación por la izquierda. De esto concluímos que $\phi^k_t \circ \ell_g = \ell_g \circ \phi^k_t$ para todo $g \in V_0$ y para todo $k = 1, \ldots, r$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \ell^*_g \circ \phi^{k*}_t &= \ell^*_g \circ \mathbf{u}_k\\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi^{k*}_t \circ \ell^*_g &= \mathbf{u}_k \circ \ell^*_g\end{aligned}$$

es decir los $\mathbf{u}_k$'s son invariantes por la izquierda, ya que claramente los lados izquierdos de estas ecuaciones son iguales. Finalmente notemos que

$$\begin{aligned}&\psi(\phi^r_{t_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1}(0), \psi(\phi^r_{s_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{s_1}(0), x))\\ &\qquad = \psi(\phi^r_{t_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1}(0), \Gamma^r_{s_r} \circ \ldots \circ \Gamma^1_{s_1}(x))\\ &\qquad = (\Gamma^r_{t_r} \circ \ldots \circ \Gamma^1_{t_1} \circ \Gamma^r_{s_r} \circ \ldots \circ \Gamma^1_{s_1}(x))\\ &\qquad = \psi(\phi^r_{t_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1} \circ \phi^r_{s_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{s_1}(0), x)\\ &\qquad = \psi(\phi^r_{s_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{s_1}(0) \cdot \phi^r_{t_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1}(0), x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $g = \phi^r_{t_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{t_1}(0)$ y $h = \phi^r_{s_r} \circ \ldots \circ \phi^1_{s_1}(0)$, entonces esta ecuación nos dice que

$$\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(hg, x)$$

es decir ψ es una acción derecha. Para obtener una acción izquierda solamente hace falta definir

$$\begin{aligned}\widehat{\psi} : V_0 \times M &\longrightarrow M\\ (g, x) &\mapsto \psi(g^{-1}, x).\end{aligned}$$

Con esta definición $\widehat{\psi}$ es una acción izquierda del grupo de Lie local V_0 en M tal que los campos vectoriales asociados a esta acción son precisamente $\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_r$.

1.4. Completación de Álgebras de Lie

Con frecuencia al estudiar los campos vectoriales definidos en variedades nos encontramos con campos de la forma $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ en los cuales es fácil hallar el flujo integral de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ mas sin embargo es difícil hallar el flujo integral de $\mathbf{v}$. Una alternativa para usar la información de los flujos integrales de $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ es completar $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y usar los flujos integrales de $\mathfrak{g}$ para hallar el flujo integral de $\mathbf{v}$. En general el procedimiento es como se muestra a continuación.

Sea M una variedad de dimensión m, y sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriales linealmente independientes en M. Supongamos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \subset \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie de campos vectoriales de dimensión finita. Entonces podemos completar $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ a una base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l\}$ de $\mathfrak{h}$. Sean

$$\begin{aligned} \Gamma_\varepsilon^{\mathbf{v}_1 *} &= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_1) \\ &\vdots \\ \Gamma_\varepsilon^{\mathbf{v}_l *} &= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_l) \\ \Gamma_\varepsilon^{\mathbf{u}_1 *} &= \exp(\varepsilon \mathbf{u}_1) \\ &\vdots \\ \Gamma_\varepsilon^{\mathbf{u}_n *} &= \exp(\varepsilon \mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

De la sección anterior, sabemos que existe una vecindad del origen $U \subset \mathbb{R}^{r+l}$ tal que si

$$G = \{\Gamma_{s_l}^{\mathbf{u}_l} \circ \ldots \circ \Gamma_{s_1}^{\mathbf{u}_1} \circ \Gamma_{t_r}^{\mathbf{v}_r} \circ \ldots \circ \Gamma_{t_1}^{\mathbf{v}_1} \in \mathrm{Aut}(M) \mid (t_1, \ldots, t_r, s_1, \ldots, s_l) \in U\}$$

entonces podemos definir una multiplicación en G de la manera usual y

$$\begin{aligned} \psi : U &\longrightarrow G \\ (t_1, \ldots, t_r, s_1, \ldots, s_l) &\mapsto \Gamma_{s_l}^{\mathbf{u}_l} \circ \ldots \circ \Gamma_{s_1}^{\mathbf{u}_1} \circ \Gamma_{t_r}^{\mathbf{v}_r} \circ \ldots \circ \Gamma_{s_1}^{\mathbf{u}_1} \end{aligned}$$

es un morfismo de grupo locales definiendo la multiplicación en U mediante

$$\mu(t_1, \ldots, t_r, s_1, \ldots, s_l, t'_1, \ldots, t'_r, s'_1, \ldots, s'_l) = (t''_1, \ldots, t''_r, s''_1, \ldots, s''_l)$$

con

$$\Gamma_{s_l}^{\mathbf{u}_l} \circ \ldots \circ \Gamma_{t_1}^{\mathbf{v}_1} \circ \Gamma_{s'_l}^{\mathbf{u}_l} \circ \ldots \circ \Gamma_{t'_1}^{\mathbf{v}_1} = \Gamma_{s''_l}^{\mathbf{u}_l} \circ \ldots \circ \Gamma_{t''_1}^{\mathbf{v}_1}$$

Sea $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(U) \simeq \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{ \frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_0, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_l}\Big|_0\}$. Sean $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r+l}$ los campos vectoriales invariantes por la izquierda asociados a $\frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_0, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_l}\Big|_0$, es decir $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r+l}$ cumplen que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1|_0 &= \frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{r+l}|_0 &= \frac{\partial}{\partial s_l}\Big|_0 \end{aligned}$$

y son invariantes por la izquierda. Sea $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r$ un campo vectorial en M. Sea $\tilde{\mathbf{v}} = a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_r\mathbf{w}_r$ un campo vectorial invariante por la izquierda en U, y sea Γ_t su flujo integral. Entonces podemos hallar el flujo integral de $\mathbf{v}$ usando el flujo integral de $\tilde{\mathbf{v}}$ y ψ.

Ejemplo 1.12. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y sean $\mathbf{u}_1 = 2t\frac{\partial}{\partial x}$ y $\mathbf{u}_2 = xu\frac{\partial}{\partial u}$. En este caso

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{2t\frac{\partial}{\partial x}, xu\frac{\partial}{\partial u}, -2tu\frac{\partial}{\partial u}\} = \mathfrak{g}$$

y $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie como podemos comprobar fácilmente. Sea $\mathbf{u}_3 = -2tu\frac{\partial}{\partial u}$, y sean H^1, H^2, H^3 los flujos integrales de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} H^1_\varepsilon(x,t,u) &= (x + 2\varepsilon t, t, u) \\ H^2_\varepsilon(x,t,u) &= (x, t, u\mathrm{e}^{-\varepsilon x}) \\ H^3_\varepsilon(x,t,u) &= (x, t, u\mathrm{e}^{-2\varepsilon t}) \end{aligned}$$

Observemos que

$$H^3_{s_3} \circ H^2_{s_2} \circ H^1_{s_1}(x,t,u) = (x + 2s_1 t, t, u\mathrm{e}^{-2t(s_1 s_2 + s_3) - s_2 x}) \tag{1.22}$$

de donde

$$\begin{aligned} H^3_{r_3} \circ \ldots \circ H^1_{s_1}(x,t,u) &= (x + 2(s_1 + r_1)t, t, u\mathrm{e}^{-2t(s_1 s_2 + s_3 + r_1 r_2 + r_3 + r_2 s_1) - x(s_2 + r_2)}) \\ &= H^3_{s_3 + r_3 - s_2 r_1} \circ H^2_{s_2 + r_2} \circ H^1_{s_1 + r_1}(x,t,u). \end{aligned}$$

Sea U una vecindad del cero. Por lo que vimos anteriormente si definimos

$$\begin{aligned} \mu : U \times U &\longrightarrow U \\ (r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3) &\mapsto (r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3 - s_2 r_1) \end{aligned}$$

entonces con esta multiplicación le podemos dar a U una estructura de grupo de Lie local. Sea $\mathfrak{h} = \mathrm{Span}\{\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$. Entonces $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de U. Sea

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

entonces, si definimos,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

encontramos que el flujo integral de $\tilde{\mathbf{v}}$ a través de el origen está dado por

$$\alpha(t) = (t, t, -t^2/2).$$

Usando esto y la ecuación (1.22) concluímos que el flujo integral de $\mathbf{v}$ está dado por

$$\Gamma_\varepsilon(x,t,u) = (x + 2\varepsilon t, t, u\mathrm{e}^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t}).$$

1.5. Subconjuntos Invariantes

En las secciones anteriores estudiamos las propiedades básicas de los grupos de Lie locales. En las secciones restantes nos concentraremos en estudiar las acciones de estos grupos en variedades diferenciables y sus invariantes.

Definición 1.13. Sea G un grupo local de transformaciones que actúa en una variedad M. Un subconjunto $\mathcal{L} \subset M$ se llama *G-invariante*, y G se llama un *grupo de simetría* de $\mathcal{L}$, si para cualquier $x \in \mathcal{L}$, y $g \in G$ tales que $g \cdot x$ está definido, se tiene que $g \cdot x \in \mathcal{L}$.

Ejemplo 1.14. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y sea G el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^2$, es decir si $g_\theta \in G$ entonces

$$g_\theta \cdot (x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$$

y sea $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. $\mathcal{L}$ es una subconjunto G-invariante ya que si $(x, y) \in \mathcal{L}$, entonces $g_\theta \cdot (x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ cumple que

$$\begin{aligned}(x \cos\theta - y \sin\theta)^2 + (x \sin\theta + y \cos\theta)^2 &= x^2 \cos^2\theta - 2xy \cos\theta \sin\theta + y^2 \sin^2\theta \\ &\quad + x^2 \sin^2\theta + 2xy \cos\theta \sin\theta + y^2 \sin^2\theta \\ &= x^2 + y^2 = 1.\end{aligned}$$

En general $\mathcal{L}_c = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c^2\}$ es un conjunto G-invariante para toda c.

Ejemplo 1.15. Sea otra vez $M = \mathbb{R}^2$ y ahora sea G el grupo de traslaciones con respecto al eje x, es decir si $g_\varepsilon \in G$, entonces

$$g_\varepsilon(x, y) = (x + \varepsilon, y).$$

Entonces $\mathcal{L}_c = \{(x, y) \mid y = c\}$ es un subconjunto G-invariante para toda c.

1.6. Funciones Invariantes

Definición 1.16. Sean M, N dos variedades diferenciables y sea G un grupo local de transformaciones que actúa en M. Una función $F : M \to N$, se llama una *función G-invariante* si para toda $x \in M$ y para toda $g \in G$ tales que $g \cdot x$ está definida,

$$F(g \cdot x) = F(x).$$

Una función G-invariante $\zeta : M \to \mathbb{R}$ a los reales se llama simplemente un *invariante* de G. Obsérvese que $F : M \to \mathbb{R}^l$ es G-invariante si cada función componente F^ν de $F = (F^1, \dots, F^l)$ es un invariante de G.

Ejemplo 1.17. Sea G el grupo de rotaciones en el plano. La función $\zeta(x, y) = x^2 + y^2$ es un invariante de G, ya que

$$\zeta(g \cdot (x, y)) = \zeta(x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta) = x^2 + y^2 = \zeta(x, y).$$

Ejemplo 1.18. Sea G el grupo de transformaciones de escala en el plano, es decir, si $g_\lambda \in G$ entonces

$$g_\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

La función $\zeta(x, y) = x/y$ es un invariante de G ya que

$$\zeta(g_\lambda \cdot (x, y)) = \zeta(\lambda x, \lambda y) = \lambda x/\lambda y = x/y = \zeta(x, y).$$

Análogamente, la función $\zeta(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ también es un invariante de G.

Proposición 1.19. *Si G actúa en M, y $F : M \to \mathbb{R}^l$ es una función suave, entonces F es una función G-invariante si y sólo si cada conjunto de nivel $\{x \in M \mid F(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}^l$, es una subvariedad G-invariante de M.*

Dem. Supongamos que F es G-invariante. Sea $x \in F^{-1}(c)$ para algún $c \in \mathbb{R}^l$. Entonces por hipótesis $F(g \cdot x) = F(x) = c$ de donde $g \cdot x \in F^{-1}(c)$ por lo tanto $F^{-1}(c)$ es un subconjunto invariante bajo la acción de G.

Ahora supongamos que $F^{-1}(c)$ es G-invariante $\forall c \in \mathbb{R}^l$. Sea $x \in M$, entonces $F(x) = c$ para algún $c \in \mathbb{R}^l$. Luego $x \in F^{-1}(c)$, de donde $g \cdot x \in F^{-1}(c)$ por ser $F^{-1}(c)$ un subconjunto G-invariante. Por lo tanto, $F(g \cdot x) = F(x)$. □

1.7. Invariancia y Campos Vectoriales

Como ya hemos mencionado anteriormente el cálculo de los invariantes de la acción de un grupo de Lie local se puede reducir a anular los campos vectoriales asociados a la acción, lo cual es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales. En esta sección y en las siguientes veremos como usar este resultado para calcular los invariantes de las acciones de los grupos locales de transformaciones.

Proposición 1.20. *Sea G un grupo conexo de trasformaciones que actúa sobre una variedad M. Una función suave $\zeta : M \to \mathbb{R}$ es una función invariante para G si y sólo si*

$$\mathbf{v}(\zeta) = 0 \qquad \forall x \in M, \tag{1.23}$$

y para todo campo vectorial $\mathbf{v}$ asociado a la acción de G.

Dem. Sabemos que, si $x \in M$.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\zeta(\exp(\varepsilon\mathbf{v}) \cdot x) = \mathbf{v}(\zeta)[\exp(\varepsilon\mathbf{v}) \cdot x]$$

siempre que $\exp(\varepsilon\mathbf{v})\cdot x$ esté definido. Tomando $\varepsilon = 0$ se demuestra la necesidad de (1.23). De la misma manera, si (1.23) se cumple para todo x, entonces

$$\frac{d}{d\varepsilon}\zeta(\exp(\varepsilon\mathbf{v})\cdot x) = 0$$

dondequiera que esté definida. Por lo tanto $\zeta(\exp(\varepsilon\mathbf{v})\cdot x)$ es constante en el subgrupo uniparamétrico local conexo $\{\exp(\varepsilon\mathbf{v})|\varepsilon \in (-\delta,\delta)\}$ de $G_x = \{g \in G \mid g\cdot x$ está definido$\}$. Pero cualquier elemento de G_x puede ser escrito como un producto finito de exponenciales de los campos vectoriales $\mathbf{v}_i$ asociados a la acción de G. Por lo tanto $\zeta(g\cdot x) = \zeta(x)\ \forall g \in G_x$. $\square$

Si $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r$ forman una base para $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de campos vectoriales asociados a la acción de G, entonces la proposición 1.20 nos dice que $\zeta(x)$ es un invariante si y sólo si $\mathbf{v}_k(\zeta) = 0$ para $k = 1,\ldots,r$. En coordenadas locales

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

así que ζ debe ser solución del sistema homogéneo lineal de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} = 0, \qquad k = 1,\ldots,r. \tag{1.24}$$

Teorema 1.21. *Sea G un grupo de Lie local y conexo que actúa en una variedad m-dimensional M. Sea $F : M \to \mathbb{R}^l$, $l \leq m$, que define un sistema de ecuaciones*

$$F^\nu(x) = 0, \qquad \nu = 1,\ldots,l$$

Si el cero es un valor regular de F, entonces la subvariedad $F^{-1}(0)$ es G-invariante si y sólo si

$$\mathbf{v}(F^\nu)(x) = 0, \qquad \nu = 1,\ldots,l \quad \textit{siempre que} \quad F(x) = 0, \tag{1.25}$$

para todo campo vectorial $\mathbf{v}$ asociado a la acción de G.

Dem. Sea $x \in \mathcal{L}_F = \{x \mid F(x) = 0\}$. Si $\mathcal{L}_F$ es G-invariante, entonces $F(\exp(\varepsilon\mathbf{v})\cdot x) = 0$ para todo ε suficientemente pequeño, de donde

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F^\nu(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = 0 = \mathbf{v}(F^\nu)(x) \qquad \nu = 1,\ldots,l.$$

Ahora supongamos que $\mathbf{v}(F^\nu) = 0$ para todo $\mathbf{v}$ y para todo ν. Sea $x_0 \in \mathcal{L}_F$. Usando la condición del rango máximo, podemos elegir coordenadas locales $y = (y_1,\ldots,y_m)$ tales que $y(0) = x_0$ y F tiene la forma $F(y) = (y_1,\ldots,y_l)$. Sea

$$\mathbf{v} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \xi^m \frac{\partial}{\partial y_m}$$

entonces por hipótesis

$$\mathbf{v}(y_i) = \xi^i = 0 \qquad i = 1, \ldots, l \tag{1.26}$$

siempre que $y_1 = \ldots = y_l = 0$. Ahora el flujo $\phi(\varepsilon) = \exp(\varepsilon\mathbf{v}) \cdot x_0$ de $\mathbf{v}$ a través de $x_0 = y(0)$ satisface el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\phi^i}{d\varepsilon} = \xi^i(\phi(\varepsilon)), \qquad \phi^i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

De (1.26) y la unicidad del problema con condición inicial, concluimos que $\phi^i(\varepsilon) = 0$ para $i = 1, \ldots, l$. $\square$

1.8. Invariancia Local

En la sección anterior comprobamos que el problema de encontrar invariantes se puede resolver usando los campos vectoriales definidos por la acción. Estos campos vectoriales solo dependen de datos locales. Es por esto que conviene estudiar los conjuntos y funciones que solo son *localmente invariantes*

Definición 1.22. Sea G un grupo local de transformaciones que actúa en una variedad M. Un subconjunto $\mathcal{L} \subset M$ se dice que es *localmente G-invariante* si para toda $x \in \mathcal{L}$ existe una vecindad $\widetilde{G}_x \subset G_x$ de la indentidad en G tal que $g \cdot x \in \mathcal{L}$ para todo $g \in \widetilde{G}_x$. Una función suave $F : U \to N$, donde U es un abierto de M se llama *localmente G-invariante* si para toda $x \in U$ existe una vecindad $\widetilde{G}_x \subset G_x$ de la identidad en G tal que $F(g \cdot x) = F(x)$ para toda $x \in U$, $g \in G$ tal que $g \cdot x \in U$.

Ejemplo 1.23. Sea G el grupo de traslaciones con respecto al eje x en $\mathbb{R}^2$. Entonces el segmento de recta

$$\{(x, y) \mid y = 0, \, -1 < x < 1\}$$

es localmente G-invariante pero no globalmente G-invariante.

Proposición 1.24. *Sea $N \subset M$ una subvariedad de M. Entonces N es localmente G-invariante si y sólo si para toda $x \in N$, $\mathfrak{g}|_x \subset TN|_x$. En otras palabras, N es localmente G-invariante si y sólo si los campos vectoriales $\mathbf{v}$ asociados a la acción de G son tangentes a N.*

Dem. Sea D la distribución de M inducida por los generadores infinitesimales de G. Como D es involutiva, entonces por el teorema de Frobenius D es completamente integrable. Sea L la variedad integral de D que pasa por $x \in N$. Entonces N es localmente G-invariante si y sólo si $L \subset N$ lo cual se dá si y sólo si $\mathfrak{g}|_x \subset TN|_x$. $\square$

Proposición 1.25. *Sea $F : M \to \mathbb{R}^l$ de rango máximo en la subvariedad $\mathcal{L}_F = \{x \mid F(x) = 0\}$. Entonces una función $f : M \to \mathbb{R}$ se anula en $\mathcal{L}_F$ si y sólo si existen funciones $Q_1(x), \ldots, Q_l(x)$ tales que*

$$f(x) = Q_1(x)F^1(x) + \cdots + Q_l(x)F^l(x), \tag{1.27}$$

para todo $x \in M$.

Dem. Consideremos un punto $x_0 \in \mathcal{L}_F$. Por ser la función F de rango máximo, existe una carta coordenada centrada en x_0 tal que en esta carta coordenada la función F se ve así:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_l).$$

Se escribimos la función f en términos de esta nueva carta coordenada observaremos que $f(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n) = 0$. Por lo tanto si desarrollamos el polinomio de Taylor de f podremos encontrar funciones $Q_1, \ldots, Q_l$ tales que

$$f(x) = x_1 Q_1(x) + \cdots + x_l Q_l(x) = F^1(x)Q_1(x) + \cdots F^l(x)Q_l(x).$$

□

La proposición 1.25 nos dice que podemos remplazar el criterio infinitesimal de invariancia por la condición equivalente

$$\mathbf{v}(F^\nu)(x) = \sum_{\mu=1}^{l} Q_{\nu\mu}(x)F^\mu(x), \qquad \nu = 1, \ldots, l, \quad x \in M,$$

para ciertas funciones $Q_{\nu\mu} : M \to \mathbb{R}$, $\nu, \mu = 1, \ldots, l$.

Las funciones $Q_\nu(x)$ de la proposición 1.25 no son únicas en general, por ejemplo, consideremos las funciones

$$F^1(x, y, z) = x, \qquad F^2(x, y, z) = y,$$

el conjunto solución de este par de ecuaciones es $\mathcal{L} = \{F^1 = F^2 = 0\}$. La función

$$f(x, y, z) = xz + y^2$$

se anula en $\mathcal{L}$, y se puede escribir como

$$f(x, y, z) = zF^1(x, y, z) + yF^2(x, y, z)$$

o como

$$f(x, y, z) = (z - y)F^1(x, y, z) + (x + y)F^2(x, y, z).$$

En general, si

$$f(x) = \sum_\nu Q_\nu(x)F^\nu(x) = \sum_\nu \widetilde{Q}_\nu(x)F^\nu(x),$$

entonces las diferencias $R^\nu(x) = Q_\nu(x) - \widetilde{Q}_\nu(x)$ satisfacen el sistema

$$\sum_{\nu=1}^{l} R^\nu(x)F^\nu(x) = 0 \qquad \forall x \in M.$$

Proposición 1.26. *Sea $F : M \to \mathbb{R}^l$ de rango máximo en la subvariedad $\mathcal{L}_F = \{x \mid F(x) = 0\}$. Supongamos que $R^1(x), \ldots, R^l(x)$ son funciones reales que satisfacen que*

$$\sum_{\nu=0}^{l} R^\nu(x) F^\nu(x) = 0 \tag{1.28}$$

para todo $x \in M$. Entonces $R^\nu(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{L}_F$. Equivalentemente, existen funciones $S^\mu_\nu(x)$, con $\nu, \mu = 1, \ldots, l$, tales que

$$F^\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{l} S^\mu_\nu(x) F^\mu(x) \qquad x \in M. \tag{1.29}$$

Además, los S^μ_ν pueden ser escogidos de manera que sean antisimétricos en sus índices:

$$S^\mu_\nu(x) = -S^\nu_\mu,$$

en cuyo caso (1.29) es necesaria y suficiente para que (1.28) se cumpla en todas partes.

Dem. Usaremos la carta coordenada que usamos en la demostración de la proposición 1.25. Con esta carta coordenada la ecuación (1.28) nos dice que dado $\varepsilon > 0$

$$R^\nu(0, \ldots, \underbrace{\varepsilon}_{\nu}, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n)\varepsilon = 0$$

de donde

$$R^\nu(0, \ldots, \varepsilon, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n) = 0.$$

Como la función R^ν es continua concluímos que

$$R^\nu(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l.$$

Sea $R(x) = (R^1(x), \ldots, R^l(x))$. La ecuación (1.28) nos dice que $R(x) \cdot F(x) = 0$. Sean $v_2(x) = (x_2, -x_1, 0, \ldots, 0)$, $v_3(x) = (x_3, 0, -x_1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $v_l(x) = (x_l, 0, \ldots, 0, -x_1)$, $n-1$ vectores perpendiculares a $(x_1, \ldots, x_l)$. Como $R(x)$ es perpendicular a $F(x) = (x_1, \ldots, x_l)$ concluímos que

$$R(x) = \sum_{k=2}^{l} a_k(x) v_k(x) = \left(\sum_{k=2}^{l} a_k(x) x_k, -a_2(x) x_1, a_3(x) x_1, \ldots, -a_l x_1 \right)$$

para ciertas funciones a_k. Así

$$R^\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{l} S^\mu_\nu(x) F^\mu(x)$$

con

$$S^\mu_\nu = \begin{cases} a_k(x) & \text{si } \mu = k \text{ y } \nu = 1 \\ -a_k(x) & \text{si } \mu = 1 \text{ y } \nu = k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.30}$$

De la ecuación (1.30) observamos que para todos $\mu, \nu = 1, \ldots, l$

$$S^{\mu}_{\nu}(x) = -S^{\nu}_{\mu}(x).$$

Ahora supongamos que $R^1, \ldots, R^l$ son funciones tales que

$$R^{\nu}(x) = \sum_{\mu=1}^{l} S^{\mu}_{\nu}(x) F^{\nu}(x)$$

con $S^{\mu}_{\nu}(x) = -S^{\nu}_{\mu}(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{l} R^{\nu}(x)F^{\nu}(x) &= \sum_{\nu=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{l} S^{\mu}_{\nu}(x)F^{\nu}(x)F^{\mu}(x) = \sum_{\mu=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{l} S^{\mu}_{\nu}(x)F^{\mu}(x)F^{\nu}(x)\\ &= -\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{l} S^{\mu}_{\nu}(x)F^{\nu}(x)F^{\mu}(x) = -\sum_{\nu=1}^{l} R^{\nu}(x)F^{\nu}(x)\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{\nu=1}^{l} R^{\nu}(x)F^{\nu}(x) = 0.$$

□

1.9. Invariantes y Dependencia Funcional

Sea G un grupo local de transformaciones que actúa en una variedad M. De la proposición 1.20 si $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ son k funciones G-invariantes, entonces para todo $\mathbf{v} \in \mathrm{Lie}(G)$

$$\mathbf{v}(\zeta_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Sea $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función cualquiera y sea $\zeta = F(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$. Entonces si $\mathbf{v} = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ es un campo vectorial asociado a la acción de G tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\zeta) &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} F(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi^i \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i}\\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto si queremos encontrar a todas las funciones G-invariantes debemos tener en cuenta a este tipo de funciones. Estas consideraciones motivan la siguiente definición.

Definición 1.27. Sean $\zeta_1(x), \dots, \zeta_k(x)$ funciones suaves reales definidas en una variedad M. Entonces

1. $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ se llaman *funcionalmente dependientes* si para cada $x \in M$ existe una vecindad U de x y una función suave real F, no idénticamente cero en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$, tal que

$$F(\zeta_1(x), \dots, \zeta_k(x)) = 0 \tag{1.31}$$

para todo $x \in U$.

2. $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ se llaman *funcionalmente independientes* si no son funcionalmente dependientes cuando se restringen a cualquier subconjunto abierto $U \subset M$; en otras palabras, si $F(z_1, \dots, z_k)$ es tal que (1.31) se cumple para todo x en algún abierto $U \subset M$, entonces $F(z_1, \dots, z_k) \equiv 0$ para todo z en algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$ (que esté contenido en la imagen de U).

Ejemplo 1.28. Las funciones x/y y $xy/(x^2 + y^2)$ son funcionalmente dependientes en $\{(x, y) \mid y \neq 0\}$ porque

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x/y}{1 + (x/y)^2}.$$

En cambio la funciones x/y y $x + y$ son funcionalmente independientes, porque si $F(x+y, x/y) \equiv 0$ en algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ entonces por el teorema de la función inversa existe un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ en donde $F \equiv 0$.

Teorema 1.29. *Sea G un grupo que actúa semiregularmente en la variedad m-dimensional M con órbitas r-dimensionales. Si $x_0 \in M$, entonces existen exactamente $m - s$ invariantes locales funcionalmente independientes $\zeta_1, \dots, \zeta_{m-r}$ definidos en una vecindad de x_0. Además, cualquier otro invariante local de la acción del grupo definida cerca de x_0 es de la forma*

$$\zeta(x) = F(\zeta_1(x), \dots, \zeta_{m-r}(x)) \tag{1.32}$$

para alguna función suave F. Si la acción de G es regular, entonces los invariantes se pueden escoger de manera que sean invariantes globales en una vecindad de x_0

Dem. Usando el Teorema de Frobenius podemos encontrar coordenadas rectangulares $y = \varphi(x)$ cerca de x_0 para el sistema de campos vectoriales $\mathfrak{g}$ generado por la acción de G, de tal manera que las órbitas de G son las rebanadas $\{y_1 = c_1, \dots, y_{m-r} = c_{m-r}\}$. Entonces las nuevas coordenadas $y_1 = \zeta_1(x), \dots, y_{m-r} = \zeta_{m-r}(x)$ son invariantes locales de G, siendo constantes en cada rebanada. Además cualquier otro invariante de G debe ser constante en esas rebanadas, y por lo tanto función de $y_1, \dots, y_{m-r}$ solamente. Finalmente, si G actúa regularmente, podemos escoger nuestras coordenadas rectangulares de tal manera que cada órbita se intersecta con a lo más una rebanada. En este caso $y_q, \ldots, y_{m-r}$ son invariantes globales. $\square$

A los invariantes construidos en el teorema anterior se les llama un *conjunto completo de invariantes funcionalmente independientes.*

Proposición 1.30. *Sea G un grupo local que actúa semi-regularmente en M y sean $\zeta_1(x), \ldots, \zeta_{m-r}(x)$ un conjunto completo de invariantes funcionalmente independientes definidos en un subconjunto abierto $W \subset M$. Si una subvariedad $\mathcal{L}_F = \{x \mid F(x) = 0\}$ es G-invariante, entonces para cada $x_0 \in \mathcal{L}_F$ existe una vecindad $\widetilde{W} \subset W$ de x_0, y una función G-invariante "equivalente" $\widehat{F}(x) = \widetilde{F}(\zeta_1(x), \ldots, \zeta_{m-s}(x))$ cuyo conjunto solución coincide con el de F en $\widetilde{W}$:*

$$\mathcal{L}_F \cap \widetilde{W} = \mathcal{L}_{\widetilde{F}} \cap \widetilde{W} = \{x \in \widetilde{W} \mid \widetilde{F}(\zeta_1(x), \ldots, \zeta_{m-r}(x)) = 0\}.$$

Dem. Óbservese que podemos completar el conjunto de invariantes funcionalmente independientes $y_1 = \zeta_1(x), \ldots, y_{m-s} = \zeta_{m-s}(x)$ para obtener coordenadas $y = (y_1, \ldots, y_m)$ para G cerca de x_0. De hecho, las coordenadas restantes $\hat{y} = (y_{m-r+1}, \ldots, y_m)$ se pueden escoger de entre las coordenadas dadas $(x_1, \ldots, x^m)$ de manera que $\hat{y} = \hat{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$. Por ejemplo, si

$$\frac{\partial(\zeta_1(x), \ldots, \zeta_{m-r}(x))}{\partial(x_1, \ldots, x_{m-r})} \neq 0$$

en x_0, entonces podemos tomar $\hat{x} = (x^{m-r+1}, \ldots, x^m)$. Entonces el cambio de coordenadas es de la forma $y = \varphi(x) = (\zeta(x), \hat{x})$, en donde $\zeta(x)$ denota los invariantes y $\hat{x}$ son las *variables paramétricas.* Escribimos $F(x) = F^*(y)$ en términos de estas coordenadas de tal manera que $F^* = F \circ \psi^{-1}$. Definamos

$$\widetilde{F}(\zeta(x)) = F^*(\zeta(x), \hat{x}_0),$$

donde $\hat{x}_0$ es el valor de las variables paramétricas $\hat{x}$ en x_0. Como $\mathcal{L}_F$ es G-invariante, y las órbitas de G en estas coordenadas son las rebanadas $\{\zeta(x) = c\}$ de estos invariantes, entonces tenemos que $F^*(\zeta(x), \hat{x}) = 0$ si y sólo si $F^*(\zeta(x), \hat{x}_0) = 0$ dado que los dos puntos se encuentran en la misma rebanada. $\square$

1.10. Cálculo de Invariantes

De la proposición 1.20 y el teorema 1.29 encontrar los invariantes de una acción de un grupo local de transformaciones G en una variedad M es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales. En esta sección estudiaremos como resolver estas ecuaciones y así encontrar los invariantes de la acción.

Sea G un grupo uniparamétrico que actúa en una variedad M cuyo campo vectorial asociado es

$$\mathbf{v} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x_m}. \tag{1.33}$$

Queremos encontrar los invariantes de la acción del grupo generado por $\mathbf{v}$; como ya hemos dicho esto es equivalente a hallar funciones $\zeta : M \to \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{v}(\zeta) = 0. \tag{1.34}$$

Sea $x_0 \in M$. Si $\mathbf{v}|_{x_0} \neq 0$ entonces existe ξ^i tal que $\xi^i(x_0) \neq 0$. Sean $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \Omega(M)$ tales que en coordenadas locales

$$\omega_j = \xi^i dx_j - \xi^j dx_i \qquad j \neq i. \tag{1.35}$$

Como $\xi^i(x_0) \neq 0$, las formas diferenciales $\omega_1, \ldots, \omega_m$ son linealmente independientes. Además si $\omega_j = df_j$ para alguna función $f_j : M \to \mathbb{R}$ entonces $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = -\xi^j$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \xi^i$ y $\mathbf{v}(f_j) = df_j(\mathbf{v}) = \xi^i\xi^j - \xi^j\xi^i = 0$. Por lo tanto las f_j son los $m-1$ invariantes funcionalmente independientes garantizados por el teorema 1.29.

Ahora sea $\alpha : \mathbb{R} \to M$ la curva integral de $\mathbf{v}$. Entonces como las f_j's son invariantes $f_j \circ \alpha = c$. Consideremos ahora el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "d\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & TM \arrow[r, "df_j"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "f_j"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}. \tag{1.36}$$

Como $(f_j \circ \alpha) = c$, entonces $d(f_j \circ \alpha) = 0 = df_j \circ d\alpha$. Sin embargo $df_j = \xi^i dx_j - \xi^j dx_j$ de donde

$$0 = d(f_j \circ \alpha) = (\xi^i dx_j - \xi^j dx_i) d\alpha = (\xi^i \circ \alpha) dx_j \circ d\alpha - (\xi^j \circ \alpha) dx_i \circ d\alpha$$

lo que finalmente nos lleva a que

$$\frac{dx_j \circ d\alpha}{\xi^j \circ \alpha} = \frac{dx_i \circ d\alpha}{\xi^i \circ \alpha} \qquad i, j = 1, \ldots, m. \tag{1.37}$$

En la práctica la ecuación (1.37) nos dice que para hallar los invariantes $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1}$ hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{\xi^1} = \ldots = \frac{dx_m}{\xi^m} \tag{1.38}$$

Ejemplo 1.31. Consideremos el grupo de rotaciones SO(2). Su campo vectorial asociado es

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Por lo tanto de la ecuación (1.38) para hallar sus invariantes hay que resolver la ecuación

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}.$$

Esta ecuación diferencial la podemos resolver fácilmente, sus soluciones son $x^2 + y^2 = c$ donde c es una constante arbitraria.

Ejemplo 1.32. Consideremos el campo vectorial

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

definido en $\mathbb{R}^3$. Como $\mathbf{v}$ no se anula en ningún lado deben existir dos invariantes funcionalmente independientes de la acción del grupo generado por $\mathbf{v}$. Del ejemplo anterior uno de estos invariantes es el radio $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Para hallar al otro invariante, obsérvese que r es una constante para cualquier solución del sistema, por lo tanto podemos sustituir x por $\sqrt{r^2-y^2}$. Esto nos da la ecuación

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}} = \frac{dz}{1+z^2},$$

que tiene solución

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{r} = \arctan z + k$$

donde k es una constante arbitraria. Por lo tanto

$$\arctan z - \operatorname{arc\,sen}\frac{y}{r} = \arctan z - \arctan\frac{y}{x}$$

es el segundo invariante de $\mathbf{v}$. Podemos simplificar la expresión anterior al tomar el tangente de este invariante, en este caso

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{xz-y}{yz+x}$$

forman un conjunto completo de invariantes funcionalmente independientes.

Ahora supongamos que los campos vectoriales $\mathbf{v}_k = \sum \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, con $k = 1,\ldots,r$, definidos en una variedad M forman un álgebra de Lie y que el sistema es de rango máximo. Entonces este sistema debe tener $m-r$ invariantes funcionalmente independientes. El método para hallar estos invariantes es el siguiente.

Sean $\zeta_2,\ldots,\zeta_m$ los $m-1$ invariantes funcionalmente independientes de $\mathbf{v}_1$ y sea ζ_1 tal que

$$\mathbf{v}_1(\zeta_1) = 1.$$

Para hallar a ζ_1 basta definir

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \xi_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial y}$$

en este caso el sistema característico es

$$\frac{dx_1}{\xi_1^1} = \ldots = \frac{dx_m}{\xi_1^m} = \frac{dy}{1}$$

Al observar el sistema característico observamos que debe existir una solución de la forma $\chi(x_1,\ldots,x_m) - y = c$. Si tomamos $\zeta_1 = \chi$ obtenemos el resultado deseado.

Observemos que $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ es una reparametrización de la variedad M. Por lo tanto podemos reescribir $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ en términos de $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$. En estas coordenadas $\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial \zeta_1}$. Sea

$$\mathbf{v}_2^1 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = [\frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \sum_{i=1}^{m} \xi_2^i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}] = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi_2^i}{\partial \zeta_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$$

y definamos

$$\mathbf{v}_2^l = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2^{l-1}] = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^l \xi_2^i}{\partial \zeta_1^l} \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$$

Como los campos vectoriales $\mathbf{v}_k$ generan un álgebra de Lie, existe un $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{v}_2^s = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \mathbf{v}_2^j + \lambda \mathbf{v}_1 \qquad \text{donde } \mathbf{v}_2^0 = \mathbf{v}_2$$

y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_2^{s-1}$ son linealmente independientes. La última ecuación nos dice que

$$\frac{\partial^s \xi_2^i}{\partial \zeta_1^s} = \sum_{j=0}^{s-1} \lambda_j \frac{\partial^j \xi_2^i}{\partial \zeta_1^j} \qquad \text{si } i \neq 1 \tag{1.39}$$

y

$$\frac{\partial^s \xi_2^1}{\partial \zeta_1^s} = \sum_{j=0}^{s-1} \lambda_j \frac{\partial^j \xi_2^1}{\partial \zeta_1^j} + \lambda. \tag{1.40}$$

Sean $\psi_1, \ldots, \psi_s$ las s soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal (1.39). Entonces existen funciones f_i^j tales que

$$\xi_2^i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \sum_{j=1}^{s} \psi_j(\zeta_1) f_i^j(\zeta_2, \ldots, \zeta_n) \qquad \text{si } i \neq 1$$

y

$$\xi_2^1(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \sum_{j=1}^{s} \psi_j(\zeta_1) f_1^j(\zeta_2, \ldots, \zeta_n) + \psi(\zeta_1)$$

donde ψ es una solución de la ecuación no homogénea (1.40). Estas ecuaciones nos dicen que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 = (&\sum_{j=1}^{s} \psi_j f_1^j + \psi) \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ &+ (\sum_{j=1}^{s} \psi_j f_2^j) \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ &+ \qquad \cdots \\ &+ (\sum_{j=1}^{s} \psi_j f_n^j) \frac{\partial}{\partial \zeta_n}. \end{aligned}$$

Sea N la variedad integral de la distribución generada por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sea

$$H = \{(\hat{\zeta}_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \mid \hat{\zeta}_1 \text{ está fijo}\}.$$

Entonces como N y H se intersectan transversalmente, debido a que H no tiene componente en la dirección de ζ_1, $N' = N \cap H$ es una variedad y además $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_2^{s-1}$ son linealmente independientes en cualquier punto $p \in N'$ y sus proyeciones sobre T_pN' generan a todo T_pN'. Por lo tanto los campo vectoriales

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{v}}_2 &= \sum_{i=2}^{m}(\sum_{j=1}^{s} \psi_j(\hat{\zeta}_1) f_1^j)\frac{\partial}{\partial \zeta_i} = \sum_{j=1}^{s} \psi_j(\hat{\zeta}_1)(\sum_{i=2}^{m} f_i^j \frac{\partial}{\partial \zeta_i}) \\
\hat{\mathbf{v}}_2^1 &= \sum_{i=2}^{m}(\sum_{j=1}^{s} \psi_j'(\hat{\zeta}_1) f_1^j)\frac{\partial}{\partial \zeta_i} = \sum_{j=1}^{s} \psi_j'(\hat{\zeta}_1)(\sum_{i=2}^{m} f_i^j \frac{\partial}{\partial \zeta_i}) \\
\vdots \quad & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\hat{\mathbf{v}}_2^{s-1} &= \sum_{i=2}^{m}(\sum_{j=1}^{s} \psi_j^{s-1}(\hat{\zeta}_1) f_1^j)\frac{\partial}{\partial \zeta_i} = \sum_{j=1}^{s} \psi_j^{s-1}(\hat{\zeta}_1)(\sum_{i=2}^{m} f_i^j \frac{\partial}{\partial \zeta_i})
\end{aligned}$$

generan una distribución completamente integrable, cuya variedad integral es N' y por lo tanto esta distribución es involutiva. Sean

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=2}^{m} f_i^j \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$$

Como $\hat{\mathbf{v}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_2^{s-1}$ son linealmente independientes podemos escribir las $\mathbf{u}_k$'s en términos de los $\hat{\mathbf{v}}_2^k$'s, por lo tanto las $\hat{\mathbf{v}}_2^k$'s y las u_k generan el mismo espacio de donde concluímos que los invariantes simultáneos de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_2^{s-1}$ son invariantes simultáneos de $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_2^{s-1}$ continuando con este proceso podemos hallar los invariantes simultáneos de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$.

Capítulo 2

Grupos de Lie y Ecuaciones Diferenciales

El grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales es el grupo mas grande que actúa en el espacio de las variables dependientes e independientes con la propiedad de que manda soluciones del sistema en soluciones del sistema. La manera en que este grupo actúa sobre las funciones es actuando sobre sus gráficas.

En el capítulo anterior vimos como encontrar los invariantes de la acción de un grupo local de transformaciones. Para hallar el grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales debemos proceder al reves: dado el sistema de ecuaciones diferenciales debemos hallar el grupo mas grande que preserva al sistema.

Para lograr esto necesitaremos saber como *prolongar* la acción del grupo para que actúe no solo en las variables independientes y dependientes sino también en las derivadas de estas. Una vez que se conoce como *prolongar* la acción del grupo y sus campos vectoriales asociados podemos usar esta información para calcular el grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales.

2.1. Acción de Grupos Locales sobre Funciones

Sean $X = \mathbb{R}^p$ con coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $U = \mathbb{R}^q$ con coordenadas $u = (u^1, \ldots, u^q)$ y G un grupo local de transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$. Para definir la acción de G sobre una función $f : \Omega \subset X \to U$ nos fijamos primero en la gráfica de f, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\} \subset X \times U$, donde Ω es el dominio de definición de f. Si M_g es el dominio de definición de $g \in G$ y $\Gamma_f \subset M_g$ podemos definir la transfomación $g \cdot \Gamma_f$ de Γ_f por g mediante,

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) \mid (x, u) \in \Gamma_f\}.$$

El conjunto $g \cdot \Gamma_f$ no es necesariamente la gráfica de otra función univaluada, sin embargo, como G actúa de manera suave y $e \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$, entonces, por el teorema de la función implícita, existe una vecindad $\widetilde{G}_e$ de la identidad tal que $\forall g \in \widetilde{G}_e$ existe una función $\tilde{f}$ tal que $g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$. Escribimos $\tilde{f} = g \cdot f$ y llamamos a la función $\tilde{f}$ la transformada de f por g.

Sea $\tilde{f} = g \cdot f$ y supongamos que la trasformación g está dada en coordenadas locales por

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Psi_g(x, u), \Phi_g(x, u))$$

con Ψ_g, Φ_g funciones suaves. Entonces la gráfica $\Gamma_{\tilde{f}} = g \cdot \Gamma_f$ de $g \cdot f$ está dada paramétricamente por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (\Psi_g \circ (\mathbf{id} \times f))(x) \\ \tilde{u} &= (\Phi_g \circ (\mathbf{id} \times f))(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pero sabemos que $\Psi_e \circ (\mathbf{id} \times f) = \mathbf{id}$, por lo tanto si g está suficientemente cerca de la identidad la función $\Psi_g \circ (\mathbf{id} \times f)$ es invertible, de donde

$$x = [\Psi_g \circ (\mathbf{id} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

Usando esto en el sistema de ecuaciones (2.1) nos queda

$$g \cdot f = [\Phi_g \circ (\mathbf{id} \times f)] \circ [\Psi_g \circ (\mathbf{id} \times f)]^{-1}. \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.1. Consideremos la ecuación de la recta $f(x) = mx + b$ y consideremos la acción de G sobre esta función cuando

1. G es el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^2$. En este caso

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \Psi_\theta(x, f(x)) = x\cos\theta + (mx + b)\operatorname{sen}\theta = x(cos\theta + m\operatorname{sen}\theta) + b\operatorname{sen}\theta \\ \tilde{y} &= \Phi_\theta(x, f(x) = -x\operatorname{sen}\theta + (mx + b)\cos\theta = x(m\cos\theta - sen\theta) + b\cos\theta \end{aligned}$$

$\Psi_\theta \circ (\mathbf{id} \times f)$ es invertible excepto cuando $\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta = 0$; es decir, cuando $m = -\cos\theta/\operatorname{sen}\theta = \tan(\pi/2 - \theta)$, o sea cuando la acción del grupo transforma a la gráfica de f en una recta vertical. En los demás casos

$$\Psi_\theta \circ (\mathbf{id} \times f)^{-1}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x} - b\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta}$$

de donde

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \Phi_\theta \circ (\mathbf{id} \times f) \circ [\Psi_\theta \circ (\mathbf{id} \times f)]^{-1}(\tilde{x}) \\ &= \frac{(\tilde{x} - b\operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta)}(m\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) + b\cos\theta \\ &= \frac{(m\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta)}\tilde{x} + b\cos\theta\frac{(\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta)} - b\operatorname{sen}\theta\frac{(m\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta)} \\ &= \frac{(m\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta)}\tilde{x} + \frac{b}{\cos\theta + m\operatorname{sen}\theta}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La ecuación (2.3) es nuevamente la ecuación de una recta, es decir, G transforma rectas en rectas.

2. G es el grupo de transformaciones de escala en $\mathbb{R}^2$. En este caso

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \Psi_\lambda(x, f(x)) = \lambda x\\ \tilde{y} &= \Phi_\lambda(x, f(x)) = \lambda(mx + b),\end{aligned}$$

por lo tanto, $\Psi_\lambda \circ (\mathbf{id} \times f)$ es invertible excepto cuando $\lambda = 0$. Por tanto si $\lambda \neq 0$

$$[\Psi_\lambda \circ (\mathbf{id} \times f)]^{-1}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{x}}{\lambda}$$

de donde

$$\tilde{y} = \Phi_\lambda \circ (\mathbf{id} \times f) \circ [\Psi_\lambda \circ (\mathbf{id} \times f)]^{-1}(\tilde{x}) = \lambda(m\frac{\tilde{x}}{\lambda} + b) = m\tilde{x} + \lambda b$$

lo que nos dice que en este caso G también transforma rectas en rectas.

3. G es el grupo de traslaciones con respecto al eje x. En este caso

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + c\\ \tilde{y} &= mx + b.\end{aligned}$$

De estas ecuaciones podemos concluír inmediatamente que

$$\tilde{y} = m(\tilde{x} - c) + b = m\tilde{x} + b - mc,$$

que nuevamente es la ecuación de una recta.

4. G es el grupo de traslaciones con respecto al eje y. Al igual que en el caso anterior, es fácil ver que la función transformada está dada por

$$\tilde{y} = m\tilde{x} + b + c$$

que es la ecuación de una recta.

Ya con estos conceptos podemos dar una definición formal de lo que es un grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.2. Sea $\mathcal{L}$ un sistema de ecuaciones diferenciales. Un grupo de simetría del sistema $\mathcal{L}$ es un grupo local de transformaciones G que actúa en un conjunto abierto M del espacio de variables independientes y dependientes del sistema con la propiedad de que siempre que $u = f(x)$ es una solución de $\mathcal{L}$, y siempre que $g \cdot f$ esté definida para $g \in G$, entonces $u = (g \cdot f)(x)$ también es una solución del sistema.

En el resto del capítulo estudiaremos como encontrar el grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales dado.

2.2. Prolongación

Para calcular el grupo de simetría de una ecuación diferencial necesitaremos saber como *prolongar* la acción de un grupo local de transformaciones que actúa en el espacio de las variables independientes y dependientes para que también actue sobre las derivadas de estas. El espacio de las variables independientes, dependientes y sus derivadas se conoce como el *espacio jet* y su estudio es sumamente importante para entender a las ecuaciones diferenciales desde un punto de vista geométrico.

Dada una función suave $f(x) = f(x_1, \ldots, x_p)$ con valores en $\mathbb{R}$ de p variables independientes, denotaremos por

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial_k f(x)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$$

a las

$$p_k := \binom{p+k-1}{k}$$

derivadas parciales de orden k de f, donde $J = (j_1, \ldots, j_k)$ es una k-tupla de enteros donde no importa el orden, con entradas $1 \leq j_l \leq p$ que indican cuales derivadas estan siendo tomadas. El orden del multi-índice se define por $\#J := k$ e indica cuantas derivadas estamos tomando.

Ahora, si $f : X \to U$ es una función suave de $X \simeq \mathbb{R}^p$ a $U \simeq \mathbb{R}^q$, y $u = f(x) = (f^1(x), \ldots, f^q(x))$, denotaremos por

$$u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$$

a las qp_k derivadas de orden k de las componentes de f en el punto x. Sea $U_k := \mathbb{R}^{qp_k}$ el espacio euclideano con coordenadas U_j^α, $\alpha = 1, \ldots q$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leq j_l \leq k$ y sea $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$. Entonces la dimensión de $U^{(n)}$ está dada por:

$$q + qp_1 + \cdots + qp_n = q\binom{p+n}{n} = qp^{(n)}$$

donde

$$\binom{p+n}{n} = p^{(n)}.$$

Un punto en $U^{(n)}$ se denotará por $u^{(n)}$, así que $u^{(n)}$ tendrá $qp^{(n)}$ componentes distintas u_J^α.

Dada una función suave $u = f(x)$, $f : X \to U$, existe una función inducida $u^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x)$, llamada la n-ésima prolongación de f que se define por las ecuaciones

$$u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x).$$

Así $\mathrm{pr}^{(n)} f$ es una función de X al espacio $U^{(n)}$, y para cada $x \in X$, $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$ es un vector cuyas $qp^{(n)}$ entradas representan los valores de f y todas sus derivadas hasta orden n en el punto x.

El espacio $X \times U^{(n)}$ es llamado el *espacio jet* de orden n del espacio base $X \times U$. Si $M \subset X \times U$ es un subconjunto abierto denotaremos por

$$M^{(n)} := M \times U_1 \times \cdots \times U_n$$

al n-ésimo espacio jet de M. Si $u = f(x)$ es una función cuya gráfica está contenida en M, entonces la gráfica de $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$ cae en $M^{(n)}$.

2.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Dado un sistema $\mathcal{L}$ de ecuaciones diferenciales de orden n, con p variables independientes y q variables dependientes lo podemos representar como un sistema de ecuaciones

$$\Delta_\nu(x, u^n) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

del n-ésimo espacio jet a $\mathbb{R}^l$. Si las funciones

$$\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \ldots, \Delta_l(x, u^{(n)}))$$

son suaves, entonces Δ se puede ver como una función suave del espacio jet $X \times U^{(n)}$ a $\mathbb{R}^l$

$$\Delta : X \times U^{(n)} \to \mathbb{R}^l.$$

Si el cero es un valor regular de esta función entonces el conjunto

$$\mathcal{L}_\Delta\{(x, u^{(n)}) \mid \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}.$$

es una subvariedad en el espacio jet. Bajo este punto de vista, una solución del sistema de ecuaciones diferenciales dado es una función suave $u = f(x)$ tal que

$$\Delta_\nu(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x)) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

siempre que x esté en el dominio de f, esto es equivalente a que la gráfica de la prolongación $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$ esté completamente contenida en la subvariedad $\mathcal{L}_\Delta$ determinada por el sistema, es decir.

$$\Gamma_f^{(n)} = \{(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x))\} \subset \mathcal{L}_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}) = 0\}.$$

De esta manera le hemos asociado a un sistema $\mathcal{L}$ de ecuaciones diferenciales una variedad $\mathcal{L}_\Delta$ contenida en el espacio jet. Una vez que ya contamos con esta variedad podemos usar las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior para encontrar el grupo que preserva a esta variedad. Este grupo será muy importante mas adelante, ya que nos ayudará a encontrar el grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales dado.

2.4. Prolongación de Acciones de Grupos

Sea G un grupo local de transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$ del espacio de variables independientes y dependientes. Podemos definir una acción local de G en el n-ésimo espacio jet $M^{(n)}$, llamada la *n-ésima prolongación de G,* de la sig. manera: Dado un punto $(x_0, u_0^{(n)})$ en $M^{(n)}$ tomamos una función $U = f(x)$ tal que

$$u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0) \qquad \text{i.e.} \quad u_{J0}^{\alpha} = \partial_J f^{\alpha}(x_0).$$

Esta función siempre existe, por ejemplo la función

$$f^{\alpha}(x) = \sum_J \frac{u_{J0}^{\alpha}}{\tilde{J}!}(x - x_0)^J, \qquad \alpha = 1, \dots, q, \tag{2.4}$$

donde $(x - x_0)^J = (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \cdots (x^{j_k} - x_0^{j_k})$ y $\tilde{J} = (\tilde{\jmath}_1, \dots, \tilde{\jmath}_p)$, donde $\tilde{\jmath}_i$ es el número de j_k's iguales a i, cumple las condiciones pedidas. Si $g \in G$ se encuentra suficientemente cerca de la identidad, entonces la función transformada $g \cdot f$ está definida en una vecindad del punto correspondiente $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = g \cdot (x_0, u_0)$. Definimos ahora la acción local de G en $M^{(n)}$ de la sig. manera:

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)})$$

donde

$$\tilde{u}_0^{(n)} := \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0). \tag{2.5}$$

Es claro de esta definición que la proyección natural $\pi_k^n : M^{(n)} \to M^{(k)}$, donde $\pi_k^n(x, u^{(n)}) = (x, u^{(k)})$, cumple que

$$\pi_k^n \circ \mathrm{pr}^{(n)} g = \mathrm{pr}^{(k)} g, \qquad k \leq n. \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.3. Vamos a calcular la segunda prolongación a las siguientes acciones de grupo:

1. El grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^2$. Sea $(x_0, y_0, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^2)^{(2)} \simeq \mathbb{R}^4$. La función
$$f(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + y_2 \frac{(x - x_0)^2}{2}$$
cumple que
$$f(x_0) = y_0, \qquad f'(x_0) = y_1, \qquad f''(x_0) = y_2.$$
Si tomamos $g_\theta \in G$ suficientemente cerca de la identidad podemos definir una función $\tilde{f} = g \cdot f$. Esta función está dada por
$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= x \cos\theta + (y_0 + y_1(x - x_0) + y_2 \frac{(x - x_0)^2}{2}) \operatorname{sen}\theta \\ \tilde{y} &= -x \operatorname{sen}\theta + (y_0 + y_1(x - x_0) + y_2 \frac{(x - x_0)^2}{2}) \cos\theta. \end{aligned}$$

Para caclular $\tilde{f}'(\tilde{x})$ y $\tilde{f}''(\tilde{x})$ podemos usar la regla de la cadena, en efecto

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \Phi_\theta(\mathbf{id} \times f) \circ [\Psi_\theta(\mathbf{id} \times f)]^{-1}$$

de donde

$$\tilde{f}'(\tilde{x}_0) = \frac{[\Phi_\theta(\mathbf{id} \times f)]'[\Psi_\theta(\mathbf{id} \times f)]^{-1}(\tilde{x}_0)}{[\Psi_\theta(\mathbf{id} \times f)]'(x_0)} = \frac{y_1 \cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{y_1 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

y

$$\begin{aligned}
\tilde{f}''(\tilde{x}_0) &= \frac{[\Phi_\theta(\mathbf{id} \times f)]''(x_0)[\Psi_\theta(\mathbf{id} \times f)]'(x_0)}{([\Psi_\theta(\mathbf{id} \times f)]'(x_0))^3} \\
&= -\frac{[\Phi_\theta(\mathbf{id} \times f)]'(x_0)[\Psi_\theta(\mathbf{id} \times f)]''(x_0)}{([\Psi_\theta(\mathbf{id} \times f)]'(x_0))^3} \\
&= \frac{y_2 \cos\theta(y_1 \cos\theta - \operatorname{sen}\theta) - (y_1 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{(y_1 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^3}
\end{aligned}$$

Si juntamos todos estos resultados obtenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{pr}^{(2)} g_\theta \cdot (x_0, y_0, y_1, y_2) = \big(&x_0 \cos\theta + y_0 \operatorname{sen}\theta, -x_0 \operatorname{sen}\theta + y_0 \cos\theta, \\
&\frac{y_1 \cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{y_1 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}, \frac{y_2(y_1 \cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta)}{(y_1 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^3}\big)
\end{aligned}$$

2. El grupo de las transformaciones de escala en $\mathbb{R}^2$. Sea (x_0, y_0, y_1, y_2) y f como en el caso anterior. Si tomamos $g_\lambda \in G$ suficientemente cerca de la identidad podemos definir una función $\tilde{f} = g \cdot f$, esta función está dada por

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} &\tilde{x} = \lambda x = \Psi_\lambda(x, f(x)) \\ &\tilde{y} = \lambda\left(y_0 + y_1(x - x_0) + y_2\frac{(x - x_0)^2}{2}\right) = \Phi_\lambda(x, f(x)) \end{aligned} \tag{2.7}$$

de la ecuacion (2.7) vemos que

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) = \lambda y_0 + y_1(\tilde{x} - \tilde{x}_0) + \frac{y_2}{\lambda}\frac{(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2}{2}$$

de donde

$$\tilde{f}'(\tilde{x}_0) = y_1 \qquad \text{y} \qquad \tilde{f}''(\tilde{x}_0) = \frac{y_2}{\lambda}. \tag{2.8}$$

La escuación (2.8) nos dice que la segunda prolongación de G está dada por

$$\operatorname{pr}^{(2)} g_\lambda \cdot (x_0, y_0, y_1, y_2) = \big(\lambda x_0, \lambda y_0, y_1, \frac{y_2}{\lambda}\big).$$

3. El grupo de traslaciones con respecto al eje x. Sean (x_0, y_0, y_1, y_2) y f como en los casos anteriores. En este caso siempre podemos definir una función $\tilde{f} = g \cdot f$ mediante

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} \tilde{x} = x + c = \Psi_c(x, f(x)) \\ \tilde{y} = y_0 + y_1(x - x_0) + y_2\dfrac{(x - x_0)^2}{2} = \Phi_c(x, f(x)) \end{array}$$

   Fácilmente observamos que

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) = y_0 + y_1(\tilde{x} - \tilde{x}_0) + y_2\frac{(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2}{2}. \tag{2.9}$$

   De la ecuación (2.9) podemos calcular la prolongación de la acción del grupo, esta es:

$$\mathrm{pr}^{(2)}\, g_c \cdot (x_0, y_0, y_1, y_2) = (x_0 + c, y_0, y_1, y_2)$$

4. El grupo de traslaciones con respecto al eje y. Directamente podemos observar que

$$\mathrm{pr}^{(2)}\, g_c \cdot (x_0, y_0, y_1, y_2) = (x_0, y_0 + c, y_1, y_2)$$

2.5. Invariancia de Ecuaciones Diferenciales

Recordemos que, dado un sistema de ecuaciones diferenciales $\mathcal{L}$, le podemos asociar una variedad $\mathcal{L}_\Delta$ que nos representa al sistema y asociado a esta variedad tenemos al grupo que preserva a $\mathcal{L}_\Delta$. En esta sección veremos la relación que hay entre este grupo y el grupo de simetría del sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.4. Sea G un grupo local de transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$ y sea $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ un sistema de ecuaciones diferenciales de grado n definidas sobre M. Se dice que G preserva el sistema de ecuaciones diferenciales si la prolongación de la acción de G deja a $\mathcal{L}_\Delta \subset M^{(n)}$ invariante, es decir, si siempre que $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{L}_\Delta$ y siempre que $\mathrm{pr}^{(n)}\, g \cdot (x, u^{(n)})$ esté definido, se tiene que $\mathrm{pr}^{(n)}\, g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{L}_\Delta$.

Teorema 2.5. *Sea M un subconjunto abierto de $X \times U$ y supongamos que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ es un sistema de ecuaciones diferenciales de grado n definidas en M. Si G es un grupo local de trasformaciones que preserva al sistema de ecuaciones, entonces G es un grupo de simetría del sistema de ecuaciones diferenciales.*

Dem. Supongamos que $u = f(x)$ es una solución local de $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, entonces $\Delta(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x)) = 0$ de donde $\Gamma_f^{(n)} = \{(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x))\} \subset \mathcal{L}_\Delta$. Si $g \in G$ es tal que $g \cdot f$ está bien definida, entonces se tiene que

$$\Gamma_{g\cdot f}^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)}\, g \cdot (\Gamma_f^n).$$

Ahora como $\mathcal{L}_\Delta$ es invariante bajo G, entonces $\Gamma_{g\cdot f}^{(n)} \subset \mathcal{L}_\Delta$ de donde $g \cdot f$ es solución del sistema Δ. $\square$

2.6. Prolongación de Campos Vectoriales

El teorema 2.5 nos dice que para calcular el grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales dado debemos encontrar el grupo que *preserva* al sistema. Para estudiar a este grupo conviene considerar su acción prolongada y los campos vectoriales generados por esta acción prolongada.

En esta sección veremos como *prolongar* un campo vectorial dado y más adelante podremos encontrar la fórmula general para *prolongar* campos vectoriales. Esta fórmula nos permitirá intercambiar el problema de hallar el grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales dado por el problema de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales parciales.

Definición 2.6. Sea $M \subset X \times U$ abierto y sea $\mathbf{v}$ un campo vectorial en M. La n-ésima prolongación de $\mathbf{v}$, denotada por $\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}$ esta definida por:

$$\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}\Big|_{(x,u^{(n)})} := \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathrm{pr}^{(n)}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]\cdot(x,u^{(n)}) \tag{2.10}$$

para todo $(x,u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Es claro de la definición que

$$d\pi_k^n(\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}) = \mathrm{pr}^{(k)}\,\mathbf{v} \qquad k \leq n \tag{2.11}$$

Ejemplo 2.7. Vamos a calcular la segunda prolongación a los campos vectoriales asociados a las siguientes acciones de grupo

1. El grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^2$. En el ejemeplo 2.3 ya habíamos visto que

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(2)}\,g_\theta\cdot(x_0,y_0,y_1,y_2) = \big(&x_0\cos\theta + y_0\operatorname{sen}\theta, -x_0\operatorname{sen}\theta + y_0\cos\theta,\\ &\frac{y_1\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{y_1\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}, \frac{y_2(y_1\cos 2\theta - \operatorname{sen}2\theta)}{(y_1\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^3}\big)\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}|_{(x_0,y_0,y_1,y_2)} &= \frac{d}{d\theta}\Big|_{\theta=0}\mathrm{pr}^{(2)}\,g_\theta\cdot(x_0,y_0,y_1,y_2)\\ &= (y_0, -x_0, -(1+y_1^2), -3y_1y_2)\end{aligned}$$

es decir

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}|_{(x_0,y_0,y_1,y_2)} = y_0\frac{\partial}{\partial x} - x_0\frac{\partial}{\partial y} - (1+y_1^2)\frac{\partial}{\partial y_1} - 3y_1y_2\frac{\partial}{\partial y_2}$$

2. El grupo de transformaciones de escala en $\mathbb{R}^2$. De ejemplo 2.3 sabemos que

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,g_\lambda\cdot(x_0,y_0,y_1,y_2) = \big(\lambda x_0, \lambda y_0, y_1, \frac{y_2}{\lambda}\big)$$

de donde

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}|_{(x_0,y_0,y_1,y_2)} = \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} \mathrm{pr}^{(2)}\,g_\lambda\cdot(x_0,y_0,y_1,y_2) = (x_0,y_0,0,-y_2)$$

es decir

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}|_{(x_0,y_0,y_1,y_2)} = x_0\frac{\partial}{\partial x} + y_0\frac{\partial}{\partial y} - y_2\frac{\partial}{\partial y_2}$$

3. El grupo de traslaciones con respecto al eje x. Otra vez usamos el ejemplo 2.3 para ver que

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,g_c\cdot(x_0,y_0,y_1,y_2) = (x_0+c,y_0,y_1,y_2)$$

de donde

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}|_{(x_0,y_0,y_1,y_2)} = \left.\frac{d}{dc}\right|_{c=0} \mathrm{pr}^{(2)}\,g_c\cdot(x_0,y_0,y_1,y_2) = (1,0,0,0)$$

es decir

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}|_{(x_0,y_0,y_1,y_2)} = \frac{\partial}{\partial x}$$

4. El grupo de traslaciones con respecto al eje y. Basándonos en el caso anterior podemos deducir inmediatamente que

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}|_{(x_0,y_0,y_1,y_2)} = \frac{\partial}{\partial y}$$

2.7. Invariancia y Prolongación de Campos Vectoriales

El siguiente teorema es una versión del teorema 1.21 para el caso en el cual los grupos considerados son grupos de simetría de ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.8. *Supongamos que*

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)}) = 0 \qquad \nu = 1,\dots,l,$$

es un sistema de ecuaciones diferenciales definidas en $M \subset X \times U$ *y sea* G *un grupo local de transformaciones que actúa en* M*. Si el cero es un valor regular de* Δ *y*

$$\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}[\Delta_\nu(x,u^{(n)})] = 0 \qquad \nu = 1,\dots,l, \qquad \textit{siempre que} \quad \Delta(x,u^{(n)}) = 0 \tag{2.12}$$

para todo campo vectorial $\mathbf{v}$ *asociado a la acción de* G*, entonces* G *es un grupo de simetría del sistema.*

Dem. La demostración es inmediata de los teoremas 1.21 y 2.5. □

Usando este teorema observamos que, si encontramos una fórmula general para prolongar campos vectoriales, entonces podemos reducir el problema de encontrar el grupo de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales a resolver el sistema de ecuaciones (2.12).

2.8. Derivadas Totales

Definición 2.9. Sea $P(x, u^{(n)})$ una función suave de x, u y derivadas de u hasta orden n, definidas en un subconjunto abierto $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. La derivada total de P con respecto a x_i es la única función suave $D_i P(x, u^{(n+1)})$ definida en $M^{(n+1)}$ y que depende de las derivadas de u hasta orden $n+1$, con la propiedad de que si $u = f(x)$ es cualquier función suave entonces

$$D_i P(x, \operatorname{pr}^{(n+1)} f(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}[P(x, \operatorname{pr}^{(n)} f(x))].$$

En otras palabras, $D_i P$ se obtiene diferenciando P con respecto a x_i tomando a todas las u^α's y a sus derivadas como funciones de x.

Proposición 2.10. *Dado $P(x, u^{(n)})$, la i-ésima derivada total de P tiene la siguiente forma:*

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} u^\alpha_{J,i} \frac{\partial P}{\partial u^\alpha_J}, \tag{2.13}$$

donde, si $J = (j_1, \ldots, j_k)$,

$$u^\alpha_{J,i} = \frac{\partial u^\alpha_J}{\partial x_i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x_i \partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}. \tag{2.14}$$

En (2.13) la suma se toma sobre todos los J's de orden $0 \leq \#J \leq n$, donde n es la derivada parcial de orden mayor que aparece en P.

Dem. Solamente tenemos que aplicar la regla de la cadena e inducción $\square$

2.9. Fórmula General de Prolongación

En esta sección enunciaremos y probaremos la fórmula general de prolongación.

Teorema 2.11. *Sea*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

un campo vectorial definido en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$. La n-ésima prolongación de $\mathbf{v}$ es el campo vectorial

$$\operatorname{pr}^{(n)} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \phi^J_\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \tag{2.15}$$

definido en el espacio jet correspondiente $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, donde el segundo sumando se toma sobre todos los multi-índices $J = (j_1, \ldots, j_k)$, con $1 \leq j_k \leq p$,

$1 \leq k \leq n$. *Las funciones coeficiente* ϕ_α^J *de* $\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}$ *están dadas por la siguiente fórmula:*

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_j\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha, \tag{2.16}$$

donde $u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}$, *y* $u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x_i}$.

Dem. Primero probaremos la fórmula para las derivadas de primer orden, es decir el caso $n = 1$. Sea $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v})$ el grupo uniparamétrico correspondiente a $\mathbf{v}$ cuyas transformaciones tienen la fórmula

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\Psi_\varepsilon(x, u), \Phi_\varepsilon(x, u)),$$

donde sea que estén definidas. Obsérvemos que

$$\begin{aligned} \xi^i(x, u) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Psi_\varepsilon^i(x, u), \qquad i = 1, \ldots, p, \\ \phi_\alpha(x, u) &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \Phi_\varepsilon^\alpha(x, u), \qquad \alpha = 1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde Ψ_ε^i, Φ_ε^α son las componentes de Ψ_ε, Φ_ε. Dado $(x, u^{(1)}) \in M^{(1)}$, sea $u = f(x)$ cualquier función representante, de manera que $u^{(1)} = \mathrm{pr}^{(1)} f(x)$, o de manera explícita,

$$u^\alpha = f^\alpha(x), \qquad u_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x_i}.$$

De acuerdo con (2.2), dado un ε suficientemente pequeño, la tranformada de f por el elemento del grupo g_ε está bien definida, y está dada por

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\tilde{x}) = [\Phi_\varepsilon \circ (\mathbf{id} \times f)] \circ [\Psi_\varepsilon \circ (\mathbf{id} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

Usando la regla de la cadena, la matriz Jacobiana $\mathbf{J}\tilde{f}_\varepsilon(x) = (\partial \tilde{f}_\varepsilon^\alpha / \partial \tilde{x}^i)$ está dada por:

$$\mathbf{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = \mathbf{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbf{id} \times f)](x) \cdot [\mathbf{J}[\Psi_\varepsilon \circ (\mathbf{id} \times f)](x)]^{-1} \tag{2.18}$$

(donde quiera que la inversa esté definida), donde hemos usado que

$$x = [\Psi_\varepsilon \circ (\mathbf{id} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

Desarrollando las entradas de la matriz $\mathbf{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x})$ obtenemos la fórmula explícita para la primera prolongación $\mathrm{pr}^{(1)}\, g_\varepsilon$.

Para encontrar el generador infinitesimal $\mathrm{pr}^{(1)}\,\mathbf{v}$, debemos diferenciar (2.18) con respecto a ε y tomar $\varepsilon = 0$. Recordemos que si $M(\varepsilon)$ es una matriz invertible que depende de ε, entonces

$$\frac{d}{d\varepsilon}[M(\varepsilon)^{-1}] = -M(\varepsilon)^{-1} \frac{dM(\varepsilon)}{d\varepsilon} M(\varepsilon)^{-1}.$$

También hay que notar que cuando $\varepsilon = 0$ se tiene que,

$$\Psi_0(x, f(x)) = x, \qquad \Phi_0(x, f(x)) = f(x). \tag{2.19}$$

Por lo tanto, si $\mathbf{I}$ denota a la matriz identidad de $p \times p$,

$$\mathbf{J}[\Psi_0 \circ (\mathbf{id} \times f)](x) = \mathbf{I} \qquad \mathbf{J}[\Phi_0 \circ (\mathbf{id} \times f)](x) = \mathbf{J}f(x).$$

Ahora diferenciando (2.18) y tomando $\varepsilon = 0$, encontramos, usando la regla de Leibniz, que

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathbf{J}\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathbf{J}[\Phi_\varepsilon \circ (\mathbf{id} \times f)](x) - \mathbf{J}f(x) \cdot \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathbf{J}[\Psi_\varepsilon \circ (\mathbf{id} \times f)](x) \\ &= \mathbf{J}[\phi \circ (\mathbf{id} \times f)](x) - \mathbf{J}f(x) \cdot \mathbf{J}[\xi \circ (\mathbf{id} \times f)](x).\end{aligned}$$

En la segunda igualdad, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^p)^T$, y $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_q)^T$ son vectores columna y se hizo uso de (2.17). Las entradas de la matriz de la última fórmula nos dan las funciones coeficiente ϕ_α^k de $\frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}$ en $\mathrm{pr}^{(1)}\,\mathbf{v}$. Así, la (α, k)-ésima entrada es

$$\phi_\alpha^k(x, \mathrm{pr}^{(1)} f(x)) = \frac{\partial}{\partial x_k}[\phi_\alpha(x, f(x))] - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}[\xi^i(x, f(x))].$$

Entonces por definición de derivada total,

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^k(x, u^{(1)}) &= D_k[\phi_\alpha(x, u)] - \sum_{i=1}^{p} D_k[\xi^i(x, u)]u_i^\alpha \\ &= D_k\left[\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha\right] + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{ki}^\alpha\end{aligned} \tag{2.20}$$

donde $u_{ki}^\alpha = \partial u^a / \partial x_k \partial x_i$. Esto prueba (2.16) para el caso $n = 1$.

Para probar el teorema en general procederemos por inducción. La clave consiste en notar que el $(n+1)$-ésimo espacio jet $M^{(n+1)}$ se puede ver como un subespacio del primer espacio jet $(M^{(n)})^{(1)}$ del n-ésimo espacio jet $M^{(n)}$. Esto se puede ver así porque cada $(n+1)$-ésima derivada parcial u_J^α se puede ver como una derivada de primer orden de una derivada de orden n.

Con este punto de vista, el paso de inducción que se debe seguir para determinar $\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}$ a partir de $\mathrm{pr}^{(n-1)}\,\mathbf{v}$ es el que sigue; consideremos a $\mathrm{pr}^{(n-1)}\,\mathbf{v}$ como un campo vectorial en $M^{(n-1)}$ y haciendo uso de la fórmula para la primera prolongación lo prolongamos a $(M^{(n-1)})^{(1)}$. Luego restringimos el campo vectorial resultante al subespacio $M^{(n)}$ y esto nos dará la n-ésima prolongación $\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}$. Ahora las nuevas "coodenadas de orden n" en $(M^{(n-1)})^{(1)}$ están dadas por $u_{J,k}^\alpha = \partial u_J^\alpha / \partial x_k$, donde $J = (j_1, \ldots, j_{n-1})$, $1 \leq k \leq p$, y $1 \leq \alpha \leq q$. De acuerdo con (2.20), los coeficientes de $\partial / \partial u_{J,k}^\alpha$ de la primera prolongación de $\mathrm{pr}^{(n-1)}\,\mathbf{v}$ son

$$\phi_\alpha^{J,k} = D_k \phi_\alpha^J - \sum_{i=1}^{p} D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha. \tag{2.21}$$

Ahora sólo falta comprobar que la fórmula (2.16) cumple el paso de inducción. Para hacerlo notemos que de acuerdo a (2.21) y la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^{J,k} &= D_k\left[D_j\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha\right] - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha \\ &= D_k D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^p (D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha + \xi^i u_{J,ik}^\alpha) - \sum_{i=1}^p D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha \\ &= D_k D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,ik}^\alpha,\end{aligned}$$

donde $u_{J,ik}^\alpha = \partial^2 u_J^\alpha/\partial x_i \partial x_k$. Observamos que $\phi_\alpha^{J,k}$ es de la forma (2.16), y por tanto el paso de inducción está completo. $\square$

Como una aplicación a la fórmula general de prolongación calcularemos los invariantes de la segunda prolongación de los campos vectoriales generados por los grupos de rotaciones, escalaciones y traslaciones.

Rotaciones. Por el ejemplo 2.7 sabemos que el campo vectorial asociado al grupo de rotaciones es

$$\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1+y_1^2)\frac{\partial}{\partial y} + 3y_1y_2\frac{\partial}{\partial y_2}$$

Como ya sabemos, para encontrar los invariantes hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dy_1}{1+y_1^2} = \frac{dy_2}{3y_1y_2} \tag{2.22}$$

De la igualdad $dx/-y = dy/x$ concluímos que $x^2+y^2=c^2$ por lo tanto

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

es un invariante. Por otro lado $dy/x = dy_1/(1+y_1^2)$ de donde $dy/\sqrt{r^2-y^2} = dy_1/(1+y_1^2)$ lo que nos lleva a que $\operatorname{arc\,sen}(y/r) = \arctan(y_1) - c$ y por lo tanto

$$c = \arctan y_1 - \operatorname{arc\,sen}(\frac{y}{r}) = \arctan y_1 - \arctan(\frac{y}{x}). \tag{2.23}$$

La Ecuación (2.23) se puede simplificar considerablemente usando la relación $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1+\tan a \tan b}$, si tomamos a $\zeta_1 = \tan c$ observamos que

$$\tan c = \zeta_1 = \frac{xy_1 - y}{x - yy_1}$$

es una invariante de $\mathbf{v}$. Finalmente $dy_1/(1+y_1^2) = dy_2/3y_1y_2$ nos dice que $3y_1dy_1/(1+y_1^2) = dy_2/y_2$ lo que nos dice que

$$\zeta_2 = \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2}$$

es el tercer invariante.

Transformaciones de escala. Nuevamente el ejemplo 2.3 nos dice que el campo vectorial que estamos buscando es

$$\mathbf{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - y_2\frac{\partial}{\partial y_2}$$

claramente $\zeta_1 = y_1$ es un invariante y los demás invariantes surgen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{dy_1}{y_1}$$

que $dx/x = dy/y$ nos dice que

$$\zeta_2 = x/y$$

es un invariante. Finalmente la igualdad $dx/x = -dy_2/y_2$ nos dice que

$$\zeta_3 = xy_2$$

es el tercer invariante.

Traslaciones con respecto al eje x. El campo vectorial generado por la segunda prolongación de la acción del grupo de traslaciones con respecto al eje x es

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$$

claramente

$$\zeta_1 = y$$
$$\zeta_2 = y_1$$
$$\zeta_3 = y_2$$

son los invariantes.

Traslaciones con respecto al eje y. Análogamente al ejemplo anterior

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial y}$$

es el campo vectorial generado por la segunda prolongación de la acción del grupo de traslaciones con respecto al eje y y

$$\zeta_1 = x$$
$$\zeta_2 = y_1$$
$$\zeta_3 = y_2$$

son los invariantes.

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo veremos algunas aplicaciones de la teoría que hemos desarrollado. Para empezar veremos que la única ecuación preservada por los grupos de rotaciones, traslaciones y transformaciones de escala de manera simultánea es la ecuación $y'' = 0$ es decir la ecuación de la recta.

Después calcularemos el grupo de simetría de la ecuacion $y'' = 0$. Este grupo sólo estará definido localmente, sin embargo, si extendemos esta acción a $\mathbb{RP}^2$ observaremos que esta acción queda globalmente definida.

Finalmente calcularemos el grupo de simetría de la ecuación del calor y usaremos las técnicas de integración de campos vectoriales vistos en el capítulo 1 para calcular sus flujos integrales.

3.1. Ecuaciones preservadas por el grupo de Rotaciones, Traslaciones y Transformaciones de escala

Sea G el grupo de rotaciones, traslaciones y transformaciones de escala en $\mathbb{R}^2$ y sea $M \subset \mathbb{R}^4$ una subvariedad tal que $\mathrm{pr}^{(2)} G$ actúa semiregularmente en M. Entonces si

$$F(x, y, y_1, y_2) = 0 \tag{3.1}$$

es una ecuación diferencial tal que $\mathrm{pr}^{(2)} G$ deja invariante a la ecuación (3.1), entonces por la proposición 1.30 existe una ecuación diferencial $\tilde{F}(x, y, y_1, y_2) = 0$ equivalente tal que $\tilde{F}$ es $G^{(2)}$ invariante.

Como ya hemos visto anteriormente los campos vectoriales de los grupos de rotaciones,transformaciones de escala y traslaciones son, respectivamente

$$\mathbf{v}_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1 + y_1^2)\frac{\partial}{\partial y_1} + 3y_1y_2\frac{\partial}{\partial y_2} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{v}_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - y_2\frac{\partial}{\partial y_2} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.5}$$

Observemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -y & x \\ 0 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & 1+y_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3y_1y_2 & -y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+y_1^2 & 0 \\ 3y_1y_2 & -y_2 \end{vmatrix} = -y_2(1+y_1^2) \qquad \text{y} \tag{3.6}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1+y_1^2 \end{vmatrix} = (1+y_1^2). \tag{3.7}$$

Por lo tanto $\mathrm{pr}^{(2)}\, G$ tiene órbitas 4-dimensionales si $y_2 \neq 0$ y órbitas 3-dimensionales si $y_2 = 0$.

Ahora si $m = (x_m, y_m, (y_1)_m, (y_2)_m) \in M$ es tal que $(y_2)_m \neq 0$ entonces la única función tal que $f(m) = f(g \cdot m)$ para todo $g \in \mathrm{pr}^{(2)}\, G$ es $f \equiv c$ pero la función $F(x, y, y_1, y_2) \equiv 0$ no define niguna ecuación diferencial, así la única opción que queda es que

$$y_2 = 0 \qquad \text{y}$$

$$H(x, y, y_1) = 0$$

definan ecuaciones diferenciales invariantes bajo la acción de $\mathrm{pr}^{(2)}\, G$. Pero la única función tal que $H(m) = H(g{\cdot}m)$ para toda $g \in \mathrm{pr}^{(2)}\, G$, $M \subset \{(x, y, y_1, 0) \mid x, y, y_1 \in \mathbb{R}\}$ es $H \equiv 0$. Por lo tanto la única opción viable que queda es

$$y_2 = 0. \tag{3.8}$$

El conjunto solución de la ecuación (3.8) es efectivamente invariante bajo la acción de $\mathrm{pr}^{(2)}\, G$. La ecuación definida por (3.8) es la ecuación de la recta.

3.2. La Ecuación $y'' = 0$

Consideremos ahora la ecuación de la recta $y'' = 0$. Sea $\mathbf{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial y}$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$. Entonces, de acuerdo con la fórmula general de prolongación, se debe tener que

$$\mathrm{pr}^{(2)}\, \mathbf{v} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial y} + \psi\frac{\partial}{\partial y_1} + \eta\frac{\partial}{\partial y_2}$$

con

$$\psi = (\phi_x + y_1\phi_y) - y_1(\xi_x + y_1\xi_y),$$
$$\eta = \psi_x + y_1\psi_y + y_2\psi_{y_1} - y_2(\xi_x + y_1\xi_y)$$

Ahora la ecuación $y'' = 0$ se puede indentificar con la subvariedad del segundo espacio jet de $\mathbb{R}^2$ de los puntos que anulan a la ecuación $\Delta(x, y, y_1, y_2) = y_2$. De el teorema 2.8, si $\mathbf{v}$ es un campo vectorial asociado al grupo de simetría de la ecuación $y'' = 0$, entonces

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}(\Delta(x, y, y_1, y_2)) = \psi_x + y_1\psi_y = 0 \qquad \text{siempre que} \quad \Delta(x, y, y_1, y_2) = 0.$$

Usando que $y_2 = 0$ cuando $\Delta(x, y, y_1, y_2) = 0$ obtenemos

$$\phi_{xx} + y_1(2\phi_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\phi_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3\xi_{yy} = 0,$$

de donde,

$$\phi_{xx} = 0, \qquad 2\phi_{xy} - \xi_{xx} = 0, \qquad \phi_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \qquad \xi_{yy} = 0. \tag{3.9}$$

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (3.9) es

$$\xi = (\frac{c_1 x}{2} + c_7)y + c_5x^2 + c_8x + c_9 \tag{3.10}$$

$$\phi = (c_5y + c_6)x + \frac{c_1}{2}y^2 + c_2y + c_3. \tag{3.11}$$

Por lo tanto los campos vectoriales asociados al grupo de simetría de la ecuación $y'' = 0$ son

$$\begin{array}{llll} \mathbf{v}_1 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{v}_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{v}_6 = x\frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{v}_7 = y\frac{\partial}{\partial x}, & \mathbf{v}_8 = x\frac{\partial}{\partial x}. \end{array}$$

Los grupos uniparamétricos generados por estos vectores son

$$G_1(x, y) = (\frac{x}{1 - \varepsilon y}, \frac{y}{1 - \varepsilon y}) \tag{3.12}$$

$$G_2(x, y) = (x, ye^{\varepsilon}) \tag{3.13}$$

$$G_3(x, y) = (x, y + \varepsilon) \tag{3.14}$$

$$G_4(x, y) = (x + \varepsilon, y) \tag{3.15}$$

$$G_5(x, y) = (\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \frac{y}{1 - \varepsilon x}) \tag{3.16}$$

$$G_6(x, y) = (x, y + \varepsilon x) \tag{3.17}$$

$$G_7(x, y) = (x + \varepsilon y, y) \tag{3.18}$$

$$G_8(x, y) = (xe^{\varepsilon}, y) \tag{3.19}$$

Observemos que los grupos G_1 y G_5 no están definidos para cualquier ε. Para obtener un grupo global necesitaremos extender $\mathbb{R}^2$ a una variedad más grande. Específicamente extenderemos $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{RP}^2$ y veremos que en el espacio proyectivo la acción del grupo está bien definida.

Consideremos el espacio de clases de equivalencia en el grupo $SL_3(\mathbb{R})$ módulo el subgrupo

$$P = \left\{ g = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \beta & \det\alpha \end{array} \right) \middle| \alpha \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ y } \beta^t \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

El subgrupo P es el subgrupo que mantiene fija a la recta $t \mapsto (0,0,t)$. Para describir las clases de equivalencia escribiremos,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R}), \qquad \text{con} \qquad a \in \mathcal{M}at_{2\times 2}(\mathbb{R}); \quad d \in \mathbb{R}; \quad b, c^t \in \mathbb{R}^2.$$

Supondremos que $d \neq 0$ y escribimos

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & (\det\alpha)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta & (\det\alpha)^{-1} b \\ c\alpha + d\beta & (\det\alpha)^{-1} d \end{pmatrix}.$$

Dado que $d \neq 0$, es posible escoger $\alpha \in GL_2(\mathbb{R})$ de tal forma que $\det\alpha = d$. esto determina α hasta un elemento en $SL_2(\mathbb{R})$. También es posible escoger β, de manera que $c\alpha + d\beta$ =0 y entonces es posible ajustar α para conseguir que,

$$a\alpha + b\beta = \frac{1}{\det\alpha}((\det\alpha)a - bc)\alpha = 1.$$

En otras palabras,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d \neq 0.$$

Con las interpretaciones adecuadas (es decir, el 1 que aparece en el primer renglón y la primera columna de la matriz de la derecha es en ralidad la matriz identidad $1 \in SL_2(\mathbb{R})$ y la entrada b/d que aparece en el primer renglón y la segunda columna es el vector $b \in \mathbb{R}^2$ multiplicado por el escalar $d^{-1} = (\det\alpha)^{-1}$). De esta manera parametrizamos las órbitas de los elementos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_3(\mathbb{R})$ tales que $d \neq 0$. La correspondencia es,

$$\mathbb{R}^2 \ni z \quad \longleftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \in SL_3(\mathbb{R}).$$

Queda por saber cuántas clases de equivalencia hay con $d = 0$. Para contestar esta pregunta hay que observar primero que si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R})$, entonces $c^t \neq 0$ y $b \neq 0$ como vectores de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, si escribimos

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & (\det\alpha)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta & b(\det\alpha)^{-1} \\ c\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

entonces podemos elegir α y β de tal manera que

$$c'^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad a' = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & b_1 \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & b_2 \neq 0 \end{cases} \qquad \text{donde} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} * & \lambda b \\ * & 0 \end{pmatrix}\right] \in SL_3(\mathbb{R})/P \quad \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \\ b \in \mathbb{R}^2 - \{0\}. \end{array}$$

Es decir, hay tantas clases de equivalencia distintas como rayos en $\mathbb{R}^2$, esto es, como puntos en la recta proyectiva real $\mathbb{RP}^1$. Esto demuestra la siguiente,

Proposición 3.1. *Existe una correspondencia biyectiva,*

$$SL_3(\mathbb{R})/P \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{RP}^1 \simeq \mathbb{RP}^2.$$

Con esta identificación vemos que la acción natural $\Theta : SL_3(\mathbb{R}) \times SL_3(\mathbb{R})/P \to SL_3(\mathbb{R})/P$ dada por $(g, [g_0]) \mapsto ([gg_0])$ se describe mediante,

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & d \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right) \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{11}x+a_{12}y+b_1}{c_1x+c_2y+d} \\ 0 & 1 & \frac{a_{21}x+a_{22}y+b_2}{c_1x+c_2y+d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

En el subconjunto donde $c_1x + c_2y + d \neq 0$. Cuando $c_1x + c_2y + d = 0$ la asignacion es

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & d \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right) \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ 0 & 1 & a_{21}x + a_{22}y + b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Que se interpreta como un punto en $\mathbb{RP}^1$. De manera análoga se puede definir la acción de $SL_3(\mathbb{R})$ en los puntos que se identifican con $\mathbb{RP}^1$. Al unir estas fórmulas obtenemos un función diferenciable $\Psi : SL_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$.

Ahora sea

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la base usual de $\mathfrak{sl}_3$. Al considerar la acción de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ en el proyectivo y luego restringir nuestra atención a la acción de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ en el abierto que hemos identificado con $\mathbb{R}^2$ observamos que los campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ correspondientes a estas matrices son:

$$\mathbf{v}_{H_1} = x\tfrac{\partial}{\partial x} - y\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{H_2} = x\tfrac{\partial}{\partial x} + 2y\tfrac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathbf{v}_{E_1} = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_{E_2} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{E_3} = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathbf{v}_{F_1} = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{F_2} = -xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{H_1} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y}$$

Observemos que estos campos vectoriales son idénticos a los campos vectoriales generados por la acción del grupo de simetría de la recta en $\mathbb{R}^2$. Esta observación nos permite extender la acción del grupo de simetría de la recta sobre $\mathbb{R}^2$ a una acción de un grupo global sobre todo $\mathbb{RP}^2$ tal como como habíamos prometido.

3.3. La Ecuación del Calor

Consideremos la ecuación de la conducción del calor en una dimensión

$$u_t = u_{xx}. \tag{3.20}$$

En esta ecuación hay dos variables independientes, x y t, y una variable dependiente, u. Esta ecuación es de segundo orden y puede ser identificada con la subvariedad lineal en $X \times U^{(2)}$ de los puntos que anulan a $\Delta(x,t,u^{(2)}) = u_t - u_{xx}$. Sea

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.21}$$

un campo vectorial en $X \times U^{(2)}$. La segunda prolongación de este campo vectorial es

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}. \tag{3.22}$$

De el teorema 2.8, si $\mathbf{v}$ es una campo vectorial asociado al grupo de simetría de la ecuación del calor, entonces

$$\phi^t = \phi^{xx} \qquad \text{siempre que} \quad u_{xx} = u_t.$$

Por la fórmula general de prolongación tenemos que

$$\phi^t = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2$$

si en esta ecuación usamos que $u_t = u_{xx}$ cuando $\Delta(x,t,u^{(2)}) = 0$ nos queda

$$\phi^t = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2. \tag{3.23}$$

La fórmula general de prolongación también nos dice que

$$\begin{aligned}\phi^{xx} = {} & \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 \\ & - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}\end{aligned}$$

usando otra vez que $u_t = u_{xx}$ cuando $\Delta(x,t,u^{(2)}) = 0$ nos queda

$$\begin{aligned}\phi^{xx} &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_{xx} + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_{xx} - \xi_{uu}u_x^3 \\ &\quad - \tau_{uu}u_x^2 u_{xx} + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - 2\tau_u u_x u_{xt} \\ &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\phi_u - 2\xi_x - \tau_{xx})u_{xx} + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\ &\quad - (2\tau_{xu} + 3\xi_u)u_x u_{xx} - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - \tau_u u_{xx}^2 - 2\tau_u u_x u_{xt}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Al igualar $\phi^t = \phi^{xx}$ nos quedan las siguientes igualdades

Monomio	Coeficiente	
$u_x u_{xt}$	$0 = -2\tau_u$	(a)
u_{xt}	$0 = -2\tau_x$	(b)
u_{xx}^2	$-\tau_u = -\tau_u$	(c)
$u_x^2 u_{xx}$	$0 = -\tau_{uu}$	(d)
u_{xx}	$\phi_u - \tau_t = \phi_u - 2\xi_x - \tau_{xx}$	(e)
u_x^3	$0 = -\xi_{uu}$	(f)
u_x^2	$0 = \phi_{uu} - 2\xi_{xu}$	(g)
u_x	$-\xi_t = 2\phi_{xu} - \xi_{xx}$	(h)
1	$\phi_t = \phi_{xx}$	(i)
$u_x u_{xx}$	$-\xi_u = -2\tau_{xu} - 3\xi_u$	(j)

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales parciales dado en la tabla anterior es

$$\xi = 4k_6tx + k_4x + 2k_5t + k_1 \tag{3.25}$$
$$\tau = 4k_6t^2 + 2k_4t + k_2 \tag{3.26}$$
$$\phi = (-2k_6t - k_6x^2 - k_5x + k_3)u + \alpha(x,t) \tag{3.27}$$

donde α es una solución cualquiera de la ecuación del calor. Por lo tanto los campos vectoriales asociados al grupo de simetría de la ecuación del calor son

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{v}_3 = u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$\mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{v}_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u},$$
$$\mathbf{v}_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \mathbf{v}_\alpha = \alpha(x,t)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Lo flujos integrales de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6$ son respectivamente

$$G_1(x,t,u) = (x+\varepsilon, t, u), \tag{3.28}$$
$$G_2(x,t,u) = (x, t+\varepsilon, u), \tag{3.29}$$
$$G_3(x,t,u) = (x, t, e^\varepsilon u), \tag{3.30}$$
$$G_4(x,t,u) = (e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon}t, u), \tag{3.31}$$
$$G_5(x,t,u) = (x+2\varepsilon t, t, u\mathrm{e}^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t}), \tag{3.32}$$
$$G_6(x,t,u) = (\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\,\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}}). \tag{3.33}$$

Observemos que el campo vectorial $\mathbf{v}_5$ ya lo habíamos visto en el ejemplo 1.12. Usando la notación de ese ejemplo $\mathbf{u}_1 = 2t\frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{u}_2 = -xu\frac{\partial}{\partial u}$, $\mathbf{u}_3 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = -2tu\frac{\partial}{\partial u}$, y $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ generan un álgebra de Lie. Recordemos que los grupos generados por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ son $H^1_\varepsilon(x,t,u) = (x+2\varepsilon t, t, u)$, $H^2_\varepsilon(x,t,u) =$

$(x, t, ue^{-\varepsilon x})$ y $H^3_\varepsilon(x, t, u) = (x, t, u\varepsilon^{-2\varepsilon t})$ respectivamente. Del ejemplo 1.12 existen funciones suaves f_1, f_2 y f_3 tales que $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$ y

$$G_5^* = H^{1*}_{f_1(\varepsilon)} \circ H^{2*}_{f_2(\varepsilon)} \circ H^{3*}_{f_3(\varepsilon)}$$

Para encontrar a f_1, f_2 y a f_3 observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}G_5^* &= \frac{d}{d\varepsilon}H^{1*}_{f_1(\varepsilon)} \circ H^{2*}_{f_2(\varepsilon)} \circ H^{3*}_{f_3(\varepsilon)} \\
(u_1 + u_2)G_5^* &= f_1'(\varepsilon)u_1 H^{1*}_{f_1(\varepsilon)} \circ H^{2*}_{f_2(\varepsilon)} \circ H^{3*}_{f_3(\varepsilon)} \\
&\quad + f_2'(\varepsilon)H^{1*}_{f_1(\varepsilon)} \circ (u_2 \circ H^{2*}_{f_2(\varepsilon)}) \circ H^{3*}_{f_3(\varepsilon)} \\
&\quad + f_3'(\varepsilon)H^{1*}_{f_1(\varepsilon)} \circ H^{2*}_{f_2(\varepsilon)} \circ (u_3 \circ H^{3*}_{f_3(\varepsilon)}). \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Al evaluar esta ecuación en x nos queda

$$u_1 G_5^* x + u_2 G_5^* x = f_1'(\varepsilon)u_1(x + 2\varepsilon t)$$

lo cual nos permite obtener la relaciones

$$\begin{aligned}
2t &= f_1'(\varepsilon)2t \\
f_1'(\varepsilon) &= 1 \\
f_1'(\varepsilon) &= \varepsilon + c.
\end{aligned}$$

Pero sabemos que $f_1(0) = 0$ de donde concluímos que $c = 0$. Si ahora evaluamos la ecuación (3.34) en u nos queda

$$\begin{aligned}
(u_1 + u_2)G_5^* u &= f_1(\varepsilon)u_1 G_5^* u + f_2'(\varepsilon)H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}(u_2 H^{2*}_{f_2(\varepsilon)})ue^{-2f_3(\varepsilon)t} \\
&\quad + f_3'(\varepsilon)H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}H^{2*}_{f_2(\varepsilon)}u_3(ue^{-2f_3(\varepsilon)t}) \\
u_2 G_5^* u &= f_2'(\varepsilon)H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}u_2(ue^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x}) \\
&\quad + f_3'(\varepsilon)H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}H^{2*}_{f_2(\varepsilon)}(-2tue^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x}) \\
u_2(ue^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)(x + 2\varepsilon t)}) &= f_2'(\varepsilon)H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}[(-xu)e^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x}] \\
&\quad + f_3'(\varepsilon)H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}(-2tue^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x}) \\
-xue^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)(x + 2\varepsilon t)} &= -(x + 2\varepsilon t)f_2'(\varepsilon)ue^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x} \\
&\quad - 2tuf_3'(\varepsilon)e^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x} \\
xue^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)(x + 2\varepsilon t)} &= xuf_2'(\varepsilon)e^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x} + 2t\varepsilon f_2'(\varepsilon)ue^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x} \\
&\quad + 2tuf_3'(\varepsilon)e^{-2f_3(\varepsilon)t + f_2(\varepsilon)x}
\end{aligned}$$

De esta última ecuación obtenemos que $f_2'(\varepsilon) = 1$ y que $-\varepsilon f_2'(\varepsilon) = f_3'(\varepsilon)$, de estas dos ecuaciones concluímos que $f_2(\varepsilon) = \varepsilon$ y que $f_3(\varepsilon) = -\varepsilon^2/2$. Usando estos resultados llegamos a que

$$\begin{aligned}
G_5^* x &= H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}H^{2*}_{f_2(\varepsilon)}H^{3*}_{f_3(\varepsilon)}x = x + 2\varepsilon t \\
G_5^* t &= H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}H^{2*}_{f_2(\varepsilon)}H^{3*}_{f_3(\varepsilon)}t = t \\
G_5^* u &= H^{1*}_{f_1(\varepsilon)}H^{2*}_{f_2(\varepsilon)}H^{3*}_{f_3(\varepsilon)}u = ue^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t}.
\end{aligned}$$

Lo que finalmente nos lleva a que

$$G_5(x,t,u) = (x + 2\varepsilon t, t, ue^{-\varepsilon t - \varepsilon^2 t}).$$

tal como habíamos observado anteriormente.

Bibliografía

[1] Peter J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Segunda Edición, Springer-Verlag, New York, 1986.

[2] Brian J. Cantwell, *Introduction to Symmetry Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[3] Frank Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[4] Willard Miller, Jr., *Symmetry and Separation of Variables*, Addison-Wesley Publishing Company, Don Mills, Ontario, 1977.

[5] Sigurdur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Pure and Applied Mathematics 81, New York Academic Press, New York, 1978.

[6] Edward Nelson, *Topics in Dynamics I: Flows*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1969.

[7] Adolfo Sánchez Valenzuela y Ricardo Berlanga, *Un Panorama de la Teoría de Grupos de Lie Aplicada a las Ecuaciones Diferenciales de la Geometría y de la Física*.