TRABAJO MONOGRÁFICO

Simetrías de tres dimensiones homológicas

María Eugenia Sarazola

Orientador: Prof. Marcelo Lanzilotta, IMERL

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República, Uruguay

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar tres dimensiones homológicas en el contexto de álgebras de Artin: la dimensión global, la dimensión finitista y la ϕ dimensión. Luego de introducir estas dimensiones, procedemos a analizar si cada una de ellas es simétrica, es decir, si su valor es igual al considerar las categorías de A-módulos a izquierda y a derecha.

Primero vemos, siguiendo [Aus55], que la dimensión global a izquierda y a derecha coinciden aún en el contexto más general de anillos noetherianos. A continuación, ilustramos con un ejemplo que la dimensión finitista no presenta esta simetría. Finalmente, mostramos un resultado parcial respecto a la simetría de la ϕ dimensión, a saber, que la ϕ dimensión es simétrica para el caso de las álgebras de Artin Gorenstein.

Abstract

The aim of this work is to study three homological dimensions in the context of Artin algebras: the global dimension, the finitistic dimension and the ϕ dimension. After introducing these dimensions, we proceed to analyze whether each of them is symmetric, that is, if their value is the same when we consider the categories of left A-modules and right A-modules.

Firstly, we show as in [Aus55] that the left and right global dimensions match even in the more general context of noetherian rings. Next, we provide an example to illustrate that the finitistic dimension does not present this type of symmetry. Lastly, we show a partial result regarding the ϕ dimension, namely, that the ϕ dimension in symmetric for the case of Artin Gorenstein algebras.

Contenidos

Introducción

A pesar de que el comienzo del desarrollo del álgebra homológica se atribuye a la década de 1950, la dimensión global de un anillo estaba ya presente en el artículo de Hilbert de 1890, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, en el que muestra a partir de un laborioso cálculo de sizigias que $\operatorname{gl.dim} \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] = n$ para todo cuerpo $\Bbbk$. Sin embargo, es a mediados del siglo XX cuando estos conceptos verdaderamente comienzan a tomar fuerza.

En 1960, Bass publica su artículo *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings* en el que plantea la conjetura finitista, la cual postula que la dimensión finitista de toda álgebra de Artin es cero. La conjetura de Bass aumentó en gran manera la atención dedicada a esta dimensión homológica, y varias herramientas interesantes han resultado del intento de resolverla. Una de ellas es la ϕ dimensión de un álgebra de Artin, dimensión homológica que nace en el artículo *On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras* debido a Igusa y Todorov.

A partir de las definiciones, es fácil ver que al restringirnos al contexto de las álgebras de Artin las tres dimensiones homológicas mencionadas se relacionan mediante las desigualdades

$$\operatorname{fin.dim} A \leq \phi \dim A \leq \operatorname{gl.dim} A$$

Además, es un resultado conocido de Auslander que las dimensiones globales a izquierda y derecha coinciden en este contexto (más en general, en anillos noetherianos), mientras que por otro lado no es difícil ver que esto no es cierto para la dimensión finitista. Tiene sentido entonces preguntarse qué sucede con la ϕ dimensión, comprendida entre las dos más clásicas.

El objetivo de este trabajo monográfico es presentar el resultado mencionado de Auslander, que prueba que la dimensión global presenta una simetría a izquierda y a derecha, junto con un ejemplo en el que la dimensión finitista difiere a izquierda y a derecha. Finalmente, se pretende estudiar la pregunta aún abierta que refiere a la posible simetría de la ϕ dimensión, y mostrar como resultado parcial que la respuesta es afirmativa para el caso de álgebras de Artin Gorenstein.

Presentamos a continuación un breve resumen de la forma en que está dispuesto este trabajo.

Los tres primeros capítulos se dedican a cubrir los preliminares necesarios para el desarrollo del trabajo. En el primer capítulo se introducen las nociones básicas de sucesiones exactas, complejos de módulos y functores exactos, y se construyen los functores de homología y cohomología. Luego se definen los módulos proyectivos, inyectivos y planos, y se procede a mostrar algunas caracterizaciones y propiedades útiles. Finalmente, se introducen las resoluciones proyectivas, inyectivas y planas, y con ellas se definen los functores Ext y Tor.

El segundo capítulo se centra mayormente en las álgebras de Artin y sus categorías de módulos. Se definen las nociones de envolvente inyectiva y cubierta proyectiva, y se menciona que si A es un álgebra de Artin, entonces todo A-módulo admite una envolvente inyectiva y una cubierta proyectiva, únicas a menos de isomorfismo. A continuación, se ven algunas dualidades presentes en las álgebras de Artin, y se enuncia la fórmula de Auslander-Reiten. Por último enunciamos el teorema de Krull-Schmidt, que permite obtener descomposiciones en submódulos indescomponibles que además resultan únicas a menos de isomorfismos, y se indica la relación entre los módulos simples, proyectivos e inyectivos indescomponibles y ciertos elementos idempotentes del álgebra en cuestión.

El tercer capítulo presenta las nociones básicas de las álgebras de caminos. Se menciona que si $\Bbbk Q$ es un álgebra de caminos e I un ideal admisible, el estudio de la categoría de $\Bbbk Q/I$-módulos finitamente generados es equivalente al de la categoría de representaciones finitas del quiver con relaciones (Q, I), teniendo éstas últimas la ventaja de ser más "visibles" e ilustrativas. Luego, se comenta quiénes son las representaciones correspondientes a los módulos simples, proyectivos e inyectivos indescomponibles, y se ven algunos casos particulares a modo de ejemplo.

El cuarto capítulo se ocupa de introducir las dimensiones homológicas que nos conciernen. En primer lugar, se definen la dimensión proyectiva e inyectiva de un módulo a partir de las resoluciones proyectivas e inyectivas respectivamente. Se presenta el teorema de décalage, y luego se muestran caracterizaciones de las dimensiones proyectiva y inyectiva de un módulo mediante las sizigias de sus resoluciones, así como a través de los functores Ext. A continuación se define la ϕ dimensión de un módulo, se prueban algunas propiedades básicas, y se desarrolla el cálculo explícito en un ejemplo. Se presenta luego el concepto de d-división, junto con una caracterización de la ϕ dimensión de un módulo mediante los functores Ext extraída de [FLM14]. Finalmente, definimos las versiones a izquierda y derecha de la dimensión global y la dimensión finitista de un anillo cualquiera, así como de la ϕ dimensión de un álgebra de Artin, a partir de las dimensiones proyectiva, inyectiva, y de la ϕ dimensión (respectivamente) en sus categorías de módulos a izquierda y a derecha.

El último capítulo se ocupa de analizar por separado cada una de las dimensiones homológicas y las simetrías presentes para el caso de álgebras de Artin. Comenzamos probando (como en [Aus55]) que la dimensión global a izquierda y a derecha coinciden para el caso más general de anillos noetherianos. Para ello se muestra que la dimensión global puede calcularse utilizando únicamente los módulos finitamente generados (más aún, los cíclicos), y se introduce como herramienta una nueva dimensión homológica: la dimensión plana de un módulo, que dará lugar a la dimensión global débil de un anillo. Luego de esto nos concentramos en la dimensión finitista, y mostramos con un ejemplo (haciendo uso de las nociones mencionadas de álgebras de caminos y sus representaciones) que las dimensiones finitistas a izquierda y a derecha pueden no coincidir. Este ejemplo, tomado de [Hap91], hace uso de una sencilla adaptación de un resultado presente en [Bas60].

Finalmente, pasamos al estudio de las simetrías en la ϕ dimensión. A pesar de que aún se desconoce si la ϕ dimensión de un álgebra de Artin cualquiera es simétrica, se sabe que la respuesta es afirmativa para el caso de las álgebras de Artin Gorenstein, como mostramos en esta sección. El capítulo culmina con un intento de generalizar el concepto de d-división presentado anteriormente, con el objetivo de definir la ϕ dimensión a partir de los functores Tor y Ext. Luego de plantear las definiciones, mostramos cómo se relacionan estos nuevos conceptos entre sí. Esta sección final es fruto de discusiones llevadas a cabo en el segundo semestre de 2014 junto con Diego Bravo y Marcelo Lanzilotta.

A pesar de no formar parte de nuestra línea principal de trabajo, presentamos un apéndice que pretende servir a modo de recopilación de aquellas identidades naturales que relacionan a los functores Hom y tensor, así como sus identidades derivadas (es decir, las que relacionan a los functores Ext y Tor) en caso correspondiente. Dicha recopilación toma resultados de [AF92], [EJ00], [Rot09] y [CE56]. Como breve aplicación, mostramos dos teoremas debidos a T. Ishikawa presentes en [Ish65] que vinculan las dimensiones plana e inyectiva de un módulo a izquierda M y el módulo a derecha $\mathrm{Hom}_R(M, E)$, donde E es un cogenerador inyectivo.

Capítulo 1

Preliminares homológicos (en R-Mod)

Se asumirá desde el comienzo que el lector posee un conocimiento equivalente al de un curso introductorio de anillos y módulos, y que está familiarizado con la construcción y propiedades básicas del producto tensorial, así como con algunas nociones básicas de teoría de categorías como ser las definiciones de categoría, functor y transformación natural entre functores.

En adelante, si R es un anillo, llamaremos R-Mod a la categoría que tiene por objetos a los R-módulos a izquierda y por flechas a los morfismos de R-módulos, con la composición de funciones. Denotaremos R-mod a la categoría cuyos objetos son los R-módulos a izquierda finitamente generados y cuyas flechas son los morfismos de R-módulos. De manera análoga denotamos por Mod-R, mod-R a las versiones para R-módulos a derecha.

Si S es otro anillo, llamaremos R-Mod-S a la categoría que tiene por objetos a los $R-S$-bimódulos (es decir, a los grupos abelianos M tales que $M \in$ R-Mod, $M \in$ Mod-S y $(rm)s = r(ms)$ para todo $r \in R,\ s \in S,\ m \in M$) y cuyas flechas son los morfismos de bimódulos.

Presentamos en esta sección algunas definiciones, resultados y construcciones del álgebra homológica claves para los temas que nos interesa tratar. A pesar de que las siguientes nociones tienen sentido en el contexto más general de las categorías abelianas, por un tema de simplicidad trabajaremos únicamente en categorías de módulos. En algunas ocasiones hablaremos de la categoría R-Mod, aunque las definiciones y resultados son en general válidas (con leves y evidentes modificaciones) para Mod-R.

1.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 1.1.1. Sea I un conjunto dirigido, y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia en R-Mod tal que para cada $i, j \in I$ con $i \leq j$ existe un morfismo $f_{ji} : M_i \to M_j$ de manera que se verifican las siguientes:

- $f_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}$ para todo $i \in I$,
- si $i \leq j \leq k$ entonces $f_{kj} f_{ji} = f_{ki}$.

Decimos en este caso que la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ junto con los morfismos f_{ji} forman un sistema directo, y lo notamos $((M_i), (f_{ji}))$.

Definición 1.1.2. El límite directo de un sistema directo $((M_i), (f_{ji}))$ es un par $(M, \{g_i\}_{i\in I})$ donde M es un R-módulo y los g_i son morfismos $g_i : M_i \to M$, de manera que el siguiente diagrama es conmutativo siempre que $i \leq j$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "f_{ji}"] \arrow[dr, "g_i"'] & & M_j \arrow[dl, "g_j"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

y se verifica la siguiente propiedad universal: si $(N, \{h_i\}_{i\in I})$ es otro tal par, existe un único morfismo $f : M \to N$ tal que para todo $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dd, "f"] \\ M_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[dr, "h_i"'] & \\ & N \end{tikzcd}$$

El límite directo $(M, \{g_i\}_{i\in I})$ se suele denotar $\varinjlim M_i$.

Definición 1.1.3. Si $\mathcal{F} = ((M_i), (f_{ji}))$ y $\mathcal{F}' = ((M_i'), (f_{ji}'))$ son sistemas directos sobre el mismo conjunto de índices, un morfismo $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ es una familia de morfismos de módulos $\tau_i : M_i \to M_i'$ tal que $f_{ji}'\tau_i = \tau_j f_{ji}$ siempre que $i \leq j$.

Observación 1.1.4. Cada morfismo de sistemas directos $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ induce de manera natural un morfismo a nivel de sus límites directos $\tau : \varinjlim M_i \to \varinjlim M_i'$

Denotamos a este morfismo $\varinjlim \tau_i$.

Teorema 1.1.5. *Si* $((M_i), (f_{ji}))$ *es un sistema directo en* R-Mod*, entonces existe su límite directo.*

Demostración. [EJ00, teo. 1.5.3]. $\square$

Observación 1.1.6. Debido a que verifica una propiedad universal, es sencillo mostrar que el límite directo de un sistema directo es único a menos de isomorfismo.

El siguiente resultado nos permite expresar un módulo a través de sus submódulos finitamente generados. Junto con la proposición que le sigue, nos serán de utilidad más adelante pues nos permitirán mostrar que basta probar ciertas afirmaciones sobre el tensor (o sus functores derivados) en los módulos finitamente generados.

Proposición 1.1.7. *Si M es un R-módulo cualquiera, entonces M es el límite directo de sus submódulos finitamente generados.*

Demostración. [EJ00, ejemplo 1.5.5 (2)]. $\square$

Proposición 1.1.8. *Si* $N \in$ R-Mod *entonces el functor* $- \otimes_R N$ *preserva límites directos, es decir, si* $((M_i), (f_{ji}))$ *es un sistema directo en* Mod-R*,*

$$\varinjlim (M_i \otimes_R N) = (\varinjlim M_i) \otimes_R N$$

Demostración. [EJ00, teo. 1.5.7].

□

Definición 1.1.9. Sean $M, M', M'' \in$ R-Mod y $f : M' \to M,\ g : M \to M''$ morfismos de R-módulos. Decimos que la sucesión $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es exacta en M si $\operatorname{Im} f = \ker g$.

Observación 1.1.10. La sucesión $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ es exacta en M' si y solo si $0 = \operatorname{Im} 0 = \ker f$, es decir, si y solo si f es un monomorfismo.

De manera similar, la sucesión $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es exacta en M'' si y solo si g es un epimorfismo.

Definición 1.1.11. Una sucesión finita en R-Mod es exacta si lo es en cada uno de sus términos (exceptuando los extremos).

Observación 1.1.12. Si $f : M' \to M$ es un monomorfismo de R-módulos, es posible completarlo a una sucesión exacta de la siguiente manera: $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} M/\operatorname{Im} f \longrightarrow 0$

Análogamente, si $g : M \to M''$ es un epimorfismo de R-módulos, es posible completarlo a una sucesión exacta de la siguiente manera: $0 \longrightarrow \ker g \hookrightarrow M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$

Proposición 1.1.13. *Los límites directos preservan las sucesiones exactas. Es decir, si* $\mathcal{F} = ((M_i), (f_{ji}))$, $\mathcal{F}' = ((M_i'), (f_{ji}'))$ *y* $\mathcal{F}'' = ((M_i''), (f_{ji}''))$ *son sistemas directos sobre el mismo conjunto de índices, y existen morfismos* $\mathcal{F}' \xrightarrow{\{\sigma_i\}} \mathcal{F} \xrightarrow{\{\tau_i\}} \mathcal{F}''$ *tales que* $0 \longrightarrow M_i' \xrightarrow{\sigma_i} M_i \xrightarrow{\tau_i} M_i'' \longrightarrow 0$ *es exacta para cada* $i \in I$*, entonces la sucesión* $0 \longrightarrow \varinjlim M_i' \xrightarrow{\varinjlim \sigma_i} \varinjlim M_i \xrightarrow{\varinjlim \tau_i} \varinjlim M_i'' \longrightarrow 0$ *también es exacta.*

Demostración. [EJ00, teo. 1.5.6].

□

A continuación presentamos tres resultados que refieren a sucesiones exactas, y cuya prueba consiste de una técnica llamada "diagram chasing", es decir, perseguir elementos a través de los diagramas.

Teorema 1.1.14 (Lema de los cinco)**.** *Consideremos el siguiente diagrama en* R-Mod *conmutativo con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\psi_1"] & N_2 \arrow[r, "\psi_2"] & N_3 \arrow[r, "\psi_3"] & N_4 \arrow[r, "\psi_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

Entonces:

1. *Si f_2 y f_4 son monomorfismos y f_1 es un epimorfismo, f_3 es un monomorfismo.*
2. *Si f_2 y f_4 son epimorfismos y f_5 es un monomorfismo, f_3 es un epimorfismo.*
3. *Si f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, f_3 es un isomorfismo.*

Demostración. [CE56, ch.I, prop. 1.1].

□

Corolario 1.1.15 (Lema de los tres). *Consideremos el siguiente diagrama en* R-Mod *conmutativo con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\varphi'"] & N_2 \arrow[r, "\psi'"] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces:

1. *Si f_1 y f_3 son monomorfismos, f_2 es un monomorfismo.*
2. *Si f_1 y f_3 son epimorfismos, f_2 es un epimorfismo.*
3. *Si f_1 y f_3 son isomorfismos, f_2 es un isomorfismo.*

Demostración. Es inmediato a partir del lema de los cinco.

□

Teorema 1.1.16 (Lema de la serpiente). *Consideremos el siguiente diagrama en* R-Mod *conmutativo con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\varphi'"] & N_2 \arrow[r, "\psi'"] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una sucesión exacta (el morfismo δ se denomina morfismo de conexión*):*

$$\ker f_1 \longrightarrow \ker f_2 \longrightarrow \ker f_3 \xrightarrow{\delta} \frac{N_1}{\operatorname{Im} f_1} \longrightarrow \frac{N_2}{\operatorname{Im} f_2} \longrightarrow \frac{N_3}{\operatorname{Im} f_3}$$

La razón del nombre del lema es el siguiente diagrama que lo resume:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker f_1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker f_2 \arrow[r] \arrow[d] & \ker f_3 \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\delta"] & \\
 & M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & N_2 \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d] & N_3 \arrow[d] & \\
 & \frac{N_1}{\operatorname{Im} f_1} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{N_2}{\operatorname{Im} f_2} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{N_3}{\operatorname{Im} f_3} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. [HS71, ch.III, lema 5.1].

□

Observación 1.1.17. En la situación anterior, si además φ es un monomorfismo y ψ' un epimorfismo, es decir, si tenemos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\varphi'"] & N_2 \arrow[r, "\psi'"] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker f_1 \longrightarrow \ker f_2 \longrightarrow \ker f_3 \xrightarrow{\delta} \frac{N_1}{\operatorname{Im} f_1} \longrightarrow \frac{N_2}{\operatorname{Im} f_2} \longrightarrow \frac{N_3}{\operatorname{Im} f_3} \longrightarrow 0$$

Definición 1.1.18. Decimos que una sucesión exacta $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ se escinde si existe un morfismo $h : M'' \to M$ tal que $gh = \mathrm{id}_{M''}$.

Proposición 1.1.19. *Si la sucesión exacta* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *se escinde, entonces existe un isomorfismo* $M \simeq M' \oplus M''$.

Demostración. [Rot09, prop. 2.28]. □

1.2 Functores de homología y cohomología

Introducimos ahora la categoría de complejos de módulos, sobre la que definiremos los functores de homología y cohomología.

Definición 1.2.1. Sea R un anillo. Un complejo finito de R-módulos es una sucesión de R-módulos $M_1 \xrightarrow{d_1} M_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_n$ en la que $d_{i+1}d_i = 0$.

Análogamente se define un complejo infinito $\cdots \xrightarrow{d_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$.

A los complejos de la forma $\mathbb{M} : \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$ les llamaremos complejos ascendentes, y a los de la forma $\mathbb{M} : \cdots \xrightarrow{d_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$ les llamaremos complejos descendentes.

Definición 1.2.2. Si R es un anillo, la categoría de los complejos ascendentes $\mathcal{C}^\bullet$(R-Mod) es la que tiene por objetos los complejos ascendentes de R-módulos a izquierda

$$\mathbb{M} : \qquad \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

y por morfismos los morfismos de complejos, es decir, familias de morfismos $\mathbf{f} = \{f_i\}$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{M} \arrow[d, "\mathbf{f}"] & \cdots \arrow[r, "d_{n-2}"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \cdots \\ \mathbb{N} & \cdots \arrow[r, "\delta_{n-2}"] & N_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & N_n \arrow[r, "\delta_n"] & N_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Análogamente se define la categoría de complejos descendentes $\mathcal{C}_\bullet$(R-Mod).

Definición 1.2.3. Un complejo infinito de R-módulos es exacto si lo es en cada término.

Definición 1.2.4. Definiremos ahora el enésimo functor de cohomología, $H^n : \mathcal{C}^\bullet(\text{R-Mod}) \longrightarrow \text{R-Mod}$, de la siguiente manera:

- A nivel de objetos, si tenemos un complejo ascendente

$$\mathbb{M} : \cdots \xrightarrow{d_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

  entonces $H^n(\mathbb{M}) = \dfrac{\ker d_n}{\operatorname{Im} d_{n-1}}$. Observar que esto tiene sentido, pues como $d_n d_{n-1} = 0$ sabemos que $\operatorname{Im} d_{n-1} \subset \ker d_n$.

  Llamamos a $H^n(\mathbb{M})$ el enésimo grupo de cohomología de $\mathbb{M}$.

- A nivel de flechas, si tenemos un morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M} \arrow[d, "\mathbf{f}"] & \cdots \arrow[r, "d_{n-2}"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \cdots \\
\mathbb{N} & \cdots \arrow[r, "\delta_{n-2}"] & N_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & N_n \arrow[r, "\delta_n"] & N_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

  entonces $H^n(\mathbf{f}) : \dfrac{\ker d_n}{\operatorname{Im} d_{n-1}} \longrightarrow \dfrac{\ker \delta_n}{\operatorname{Im} \delta_{n-1}}$ se define de la siguiente manera:

  - Consideramos el morfismo $f_n : M_n \to N_n$.
  - Como tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & M_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\
N_n \arrow[r, "\delta_n"] & N_{n+1}
\end{tikzcd}$$

    podemos restringir nuestro morfismo a los núcleos, $f_n : \ker d_n \to \ker \delta_n$.
  - Considerando ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ker d_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & \ker \delta_n \arrow[d] \\
\frac{\ker d_n}{\operatorname{Im} d_{n-1}} & \frac{\ker \delta_n}{\operatorname{Im} \delta_{n-1}}
\end{tikzcd}$$

    y observando que $f_n(\operatorname{Im} d_{n-1}) \subset \operatorname{Im} \delta_{n-1}$ (ya que si $x \in M_n$ es tal que existe $y \in M_{n-1}$ con $d_{n-1}(y) = x$, entonces tenemos que $f_n(x) = f_n d_{n-1}(y) = \delta_{n-1} f_{n-1}(y) \in \operatorname{Im} \delta_{n-1}$), podemos aplicar la propiedad universal del cociente para obtener un morfismo $\overline{f_n} : \dfrac{\ker d_n}{\operatorname{Im} d_{n-1}} \longrightarrow \dfrac{\ker \delta_n}{\operatorname{Im} \delta_{n-1}}$ que hace conmutar el diagrama, al que definimos como $H^n(\mathbf{f})$.

Observar que tanto el restringir a los núcleos como el tomar el morfismo inducido en el cociente son procesos que respetan el morfismo identidad y la composición, y por lo tanto $H^n(\mathbf{id}) = \mathrm{id}_n$ y $H^n(\mathbf{fg}) = H^n(\mathbf{f})H^n(\mathbf{g})$, lo cual implica que H^n es, en efecto, un functor para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, es aditivo pues estos procesos también lo son.

Definición 1.2.5. De manera análoga es posible definir el enésimo functor de homología $H_n : \mathcal{C}_\bullet(\text{R-Mod}) \longrightarrow \text{R-Mod}$, considerando ahora los complejos descendentes.

El siguiente teorema exhibe el comportamiento de los functores de homología en relación a las sucesiones exactas.

Teorema 1.2.6 (Sucesión exacta larga de homología)**.** *Si* $0 \longrightarrow \mathbb{X} \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{Y} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de complejos descendentes, entonces para cada* n *existe un morfismo* δ_n *tal que la sucesión*

$$H_n(\mathbb{X}) \xrightarrow{H_n(\mathbf{f})} H_n(\mathbb{Y}) \xrightarrow{H_n(\mathbf{g})} H_n(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(\mathbb{X}) \xrightarrow{H_{n-1}(\mathbf{f})} H_{n-1}(\mathbb{Y}) \xrightarrow{H_{n-1}(\mathbf{g})} H_{n-1}(\mathbb{Z})$$

es exacta.

Demostración. [Rot09, prop. 6.9], [Rot09, teo. 6.10].

□

Análogamente, obtenemos el siguiente resultado para los functores de cohomología.

Teorema 1.2.7 (Sucesión exacta larga de cohomología)**.** *Si* $0 \longrightarrow \mathbb{X} \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{Y} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de complejos ascendentes, entonces para cada* n *existe un morfismo* δ_n *tal que la sucesión*

$$H^n(\mathbb{X}) \xrightarrow{H^n(\mathbf{f})} H^n(\mathbb{Y}) \xrightarrow{H^n(\mathbf{g})} H^n(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(\mathbb{X}) \xrightarrow{H^{n+1}(\mathbf{f})} H^{n+1}(\mathbb{Y}) \xrightarrow{H^{n+1}(\mathbf{g})} H^{n+1}(\mathbb{Z})$$

es exacta.

1.3 Módulos proyectivos, inyectivos y planos

1.3.1 Definiciones

Definición 1.3.1. Sea R un anillo, y un functor $\mathcal{F}$: R-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod.

- $\mathcal{F}$ es exacto a izquierda si la exactitud de una sucesión $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$ implica la exactitud de $0 \longrightarrow \mathcal{F}(M') \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(M'')$.
- $\mathcal{F}$ es exacto a derecha si la exactitud de una sucesión $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ implica la exactitud de $\mathcal{F}(M') \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(M'') \longrightarrow 0$.
- $\mathcal{F}$ es exacto si la exactitud de una sucesión $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ implica la exactitud de $0 \longrightarrow \mathcal{F}(M') \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(M'') \longrightarrow 0$.

Observación 1.3.2. Es inmediato observar que si $\mathcal{F}$: R-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod es exacto a izquierda, y $0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots$ es una sucesión exacta, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(M_0) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi_0)} \mathcal{F}(M_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi_1)} \mathcal{F}(M_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi_2)} \cdots$$

será exacta en $F(M_0)$ y en $F(M_1)$.

Análogamente, si $\mathcal{F}$ es exacto a derecha y $\cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta, entonces la sucesión

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}(M_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi_2)} \mathcal{F}(M_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi_1)} \mathcal{F}(M_0) \longrightarrow 0$$

será exacta en $F(M_0)$ y en $F(M_1)$.

De igual manera que con functores covariantes, tenemos las siguientes definiciones.

Definición 1.3.3. Sea R un anillo, y un functor contravariante $\mathcal{F}$: R-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod.

- $\mathcal{F}$ es exacto a izquierda si la exactitud de una sucesión $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ implica la exactitud de $0 \longrightarrow \mathcal{F}(M'') \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(M')$.
- $\mathcal{F}$ es exacto a derecha si la exactitud de una sucesión $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$ implica la exactitud de $\mathcal{F}(M'') \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(M') \longrightarrow 0$.
- $\mathcal{F}$ es exacto si la exactitud de una sucesión $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ implica la exactitud de $0 \longrightarrow \mathcal{F}(M'') \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(M') \longrightarrow 0$.

Observación 1.3.4. Es posible hacer observaciones análogas a la observación 1.3.2 para el caso de functores contravariantes.

Proposición 1.3.5. *Si* $\mathbb{M}$ *es un complejo de R-módulos y* F : R-Mod $\to$ R-Mod *es un functor aditivo y exacto, entonces* $H_n(F(\mathbb{M})) \simeq F(H_n(\mathbb{M}))$.

Como de costumbre, es válido el resultado análogo para cohomología.

Demostración. [EJ00, ej. 2 sección 1.4]. □

Nos dedicaremos ahora a recordar los functores Hom y tensor, y estudiar sus respectivas exactitudes.

1. (Hom covariante) Si R es un anillo y $M \in$ R-Mod, definimos $\mathrm{Hom}_R(M, -)$: R-Mod $\longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod de la siguiente manera:

- A nivel de objetos, si $N \in$ R-Mod entonces $\mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Hom}(M, N)$ en R-Mod, es decir, el conjunto de los morfismos de R-módulos de M en N.
- A nivel de flechas, si tenemos un morfismo de R-módulos $\varphi : N_1 \to N_2$ entonces definimos $\mathrm{Hom}_R(M, \varphi) = \varphi_* : \mathrm{Hom}_R(M, N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N_2)$ como $\varphi_*(f) = \varphi f$.

Es inmediato verificar que $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ así definido es un functor.

Proposición 1.3.6. *El functor* $\mathrm{Hom}_R(M, -)$: R-Mod $\longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod *es exacto a izquierda.*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} N''$. Nuestro objetivo es probar que la sucesión $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_R(M, N'')$ es exacta.

- φ_* es inyectiva:

  Sea $f \in \ker \varphi_*$, es decir, $f : M \to N'$ tal que $\varphi_*(f) = \varphi f = 0$. Esto implica que $\varphi f(x) = 0$ para todo $x \in M$, y como φ es inyectiva debe ser $f(x) = 0$ para todo $x \in M$, es decir, $f = 0$.
- $\mathrm{Im}\, \varphi_* \subset \ker \psi_*$:

  Esto es directo pues $\psi_* \varphi_*(f) = \psi_*(\varphi f) = \psi \varphi f = 0$ ya que $\psi \varphi = 0$.

- $\ker \psi_* \subset \operatorname{Im} \varphi_*$:

  Sea $g \in \ker \psi_*$, es decir, $g : M \to N$ tal que $\psi_*(g) = \psi g = 0$. Luego $\psi g(x) = 0$ para todo $x \in M$, por lo que $g(x) \in \ker \psi = \operatorname{Im} \varphi$ para todo $x \in M$. Esto implica que para cada $x \in M$ existe un único $n_x \in N'$ (pues φ es inyectiva) tal que $\varphi(n_x) = g(x)$. Por lo tanto la función $f : M \to N'$ dada por $f(x) = n_x$ está bien definida, y es fácil verificar que f es un morfismo de R-módulos.

  Pero $\varphi_*(f)(x) = \varphi f(x) = \varphi(n_x) = g(x)$ para todo $x \in M$ por lo que $\varphi_*(f) = g$, es decir, $g \in \operatorname{Im} \varphi_*$.

$\square$

Observación 1.3.7. El functor $\operatorname{Hom}_R(M, -)$ no es en general exacto a derecha; esto es, incluso si el morfismo $\psi : N \to N''$ en la sucesión exacta original es un epimorfismo, esto no implica que el morfismo $\psi_* : \operatorname{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N'')$ también lo sea.

Consideremos por ejemplo $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_2$ y la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ donde los morfismos considerados son la inclusión y la proyección canónica.

El elemento $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tiene orden 2, por lo que es posible definir un morfismo de grupos $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dado por $f(1 + 2\mathbb{Z}) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Esto nos dice que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$. Sin embargo, $\mathbb{Q}$ no tiene elementos no nulos de orden finito, por lo que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) = 0$.

Concluimos que el mapa $\psi_* : \operatorname{Hom}_Z(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) = 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ no puede ser sobreyectivo.

2. (Hom contravariante) Si R es un anillo y $M \in$ R-Mod, definimos $\operatorname{Hom}_R(-, M) :$ R-Mod $\longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod de la siguiente manera:

- A nivel de objetos, si $N \in$ R-Mod entonces $\operatorname{Hom}_R(N, M) = \operatorname{Hom}(N, M)$ en R-Mod, es decir, el conjunto de los morfismos de R-módulos de N en M.
- A nivel de flechas, si tenemos un morfismo de R-módulos $\varphi : N_1 \to N_2$ entonces definimos $\operatorname{Hom}_R(\varphi, M) = \varphi^* : \operatorname{Hom}_R(N_2, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N_1, M)$ como $\varphi^*(f) = f\varphi$.

Es trivial verificar que $\operatorname{Hom}_R(-, M)$ así definido es un functor contravariante.

Proposición 1.3.8. *El functor contravariante* $\operatorname{Hom}_R(-, M) :$ R-Mod $\longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod *es exacto a izquierda.*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta $N' \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} N'' \longrightarrow 0$. Nuestro objetivo es probar que la sucesión $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N'', M) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Hom}_R(N', M)$ es exacta.

- ψ^* es inyectiva:

  Sea $f \in \ker \psi^*$, es decir, $f : N'' \to M$ tal que $\psi^*(f) = f\psi = 0$. Esto implica que $\operatorname{Im} \psi \subset \ker f$, pero al ser ψ sobreyectiva tenemos que $N'' = \operatorname{Im} \psi$ por lo que debe ser $f = 0$.

- $\operatorname{Im} \psi^* \subset \ker \varphi^*$:

  Observar que $\varphi^* \psi^*(f) = \varphi^*(f\psi) = f\psi\varphi = 0$ pues $\psi\varphi = 0$.

- $\ker \varphi^* \subset \operatorname{Im} \psi^*$:

  Sea $g \in \ker \varphi^*$, es decir, $g : N \to M$ tal que $\varphi^*(g) = g\varphi = 0$. Definimos $f : N'' \to M$ de la siguiente manera: si $n \in N''$ entonces $f(n) = g(x)$, donde $x \in N$ es tal que $\psi(x) = n$ (esto es posible pues ψ es sobreyectiva).

Veamos que f está bien definida: si $y \in N$ es otra preimagen de n por ψ, entonces $\psi(x-y)=0$ por lo que $x-y \in \ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$. Luego existe $z \in N'$ tal que $\varphi(z) = x-y$, y por lo tanto obtenemos que $g(x)-g(y) = g(x-y) = g\varphi(z) = 0$, ya que partimos de $g \in \ker\varphi^*$. Es fácil verificar que f es un morfismo de R-módulos.

Finalmente, $\psi^*(f) = f\psi = g$, ya que si tomamos $x \in N$ y $n = \psi(x)$, entonces por definición $g(x) = f(n) = f\psi(x)$.

□

Observación 1.3.9. El functor $\operatorname{Hom}_R(-,M)$ no es en general exacto a derecha; esto es, incluso si el morfismo $\varphi : N' \to N$ en la sucesión exacta original es un monomorfismo, esto no implica que el morfismo $\varphi^* : \operatorname{Hom}_R(N,M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N',M)$ sea un epimorfismo.

Como ejemplo podemos considerar nuevamente $R=\mathbb{Z}$, la sucesión $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ y $M=\mathbb{Z}$.

Sabemos que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = 0$, y sin embargo $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \neq 0$ pues contiene a $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Por lo tanto, no es posible que el mapa $\varphi^* : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ sea un epimorfismo.

3. Análogamente a los puntos anteriores, si R es un anillo y $M \in$ Mod-R, es posible definir el functor $\operatorname{Hom}_R(M,-)$: Mod-R $\longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod y el functor contravariante $\operatorname{Hom}_R(-,M)$: Mod-R $\longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod, los cuales al igual que sus contrapartidas para módulos a izquierda, son exactos a izquierda y no a derecha.

Observación 1.3.10. En el caso en que $M \in$ R-Mod-S, podemos darle estructura de S-módulo a izquierda al grupo $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ para todo $N \in$ R-Mod, definiendo la acción $(sf)(m) = f(ms)$, y así considerar nuestro functor $\operatorname{Hom}_R(M,-)$ como $\operatorname{Hom}_R(M,-)$: R-Mod $\longrightarrow$ S-Mod

Si en cambio consideramos el functor $\operatorname{Hom}_R(-,M)$, podemos darle estructura de S-módulo a derecha al grupo $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ para todo $N \in$ R-Mod, definiendo la acción $(fs)(n) = f(n)s$. De esta forma podemos considerar nuestro functor $\operatorname{Hom}_R(-,M)$ como $\operatorname{Hom}_R(-,M)$: R-Mod $\longrightarrow$ Mod-S.

De manera similar, si $M \in$ S-Mod-R podemos darle estructura de S-módulo a derecha al grupo $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ para todo $N \in$ Mod-R, definiendo la acción $(fs)(m) = f(sm)$, lo que nos permite considerar nuestro functor $\operatorname{Hom}_R(M,-)$ como $\operatorname{Hom}_R(M,-)$: Mod-R $\longrightarrow$ Mod-S.

Si en este caso consideramos el functor $\operatorname{Hom}_R(-,M)$, podemos darle estructura de S-módulo a izquierda al grupo $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ para todo $N \in$ R-Mod, definiendo la acción $(sf)(n) = sf(n)$. De esta forma podemos considerar nuestro functor $\operatorname{Hom}_R(-,M)$ como $\operatorname{Hom}_R(-,M)$: Mod-R $\longrightarrow$ S-Mod.

4. (Functor $M \otimes_R -$) Si R es un anillo y $M \in$ Mod-R, definimos $M \otimes_R -$: R-Mod $\longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod de la siguiente manera:

- A nivel de objetos, si $N \in$ R-Mod entonces $M \otimes_R N$ es el producto tensorial de módulos usual.
- A nivel de flechas, si tenemos un morfismo de R-módulos $f : N_1 \to N_2$ entonces definimos $M \otimes_R f = \mathrm{id} \otimes_R f : M \otimes_R N_1 \longrightarrow M \otimes_R N_2$, que es un morfismo de grupos.

Es inmediato verificar que $M \otimes_R -$ así definido es un functor.

Proposición 1.3.11. *El functor* $M \otimes_R -$: R-Mod $\longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod *es exacto a derecha.*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta $N' \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} N'' \longrightarrow 0$. Queremos probar que la sucesión $M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \varphi} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \psi} M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$ es exacta.

- $\operatorname{Im} \mathrm{id} \otimes \varphi \subset \ker \mathrm{id} \otimes \psi$:

  Esto es directo, pues $(\mathrm{id} \otimes \psi)(\mathrm{id} \otimes \varphi) = \mathrm{id} \otimes \psi\varphi = \mathrm{id} \otimes 0 = 0$.

- $\ker \mathrm{id} \otimes \psi \subset \operatorname{Im} \mathrm{id} \otimes \varphi$:

  Llamémosle $E = \operatorname{Im} \mathrm{id} \otimes \varphi$. Ya vimos que $E \subset \ker \mathrm{id} \otimes \psi$, por lo que $\mathrm{id} \otimes \psi$ induce un mapa en el cociente $\widehat{\psi} : (M \otimes_R N)/E \longrightarrow M \otimes_R N''$ tal que $\widehat{\psi}\pi = \mathrm{id} \otimes \psi$.

  Basta ver que $\widehat{\psi}$ es un isomorfismo, pues en ese caso tendríamos que $\ker \mathrm{id} \otimes \psi = \ker \widehat{\psi}\pi = \ker \pi = E$ como buscamos.

  Veamos entonces que $\widehat{\psi}$ es un isomorfismo; para esto, construiremos su inversa. Definimos $f : M \times N'' \longrightarrow (M \otimes_R N)/E$ de la siguiente manera: $f(m, n) = m \otimes x + E$, donde $x \in N$ es tal que $\psi(x) = n$ (recordemos que ψ es sobreyectiva). Para ver que f está bien definida, supongamos que $y \in N$ es otra preimagen de n por ψ; entonces $\psi(x - y) = 0$, es decir, $x - y \in \ker \psi = \operatorname{Im} \varphi$, por lo que existe $z \in N'$ tal que $\varphi(z) = x - y$ y por lo tanto $m \otimes (x - y) = m \otimes \varphi(z) \in E$.

  Claramente f es R-bilineal, y por lo tanto induce un morfismo $\widehat{f} : M \otimes_R N'' \longrightarrow (M \otimes_R N)/E$ dado por $\widehat{f}(m \otimes n) = m \otimes x + E$ donde $\psi(x) = n$. Es inmediato verificar que $\widehat{f}$ y $\widehat{\psi}$ son inversas.

- $\mathrm{id} \otimes \psi$ es sobreyectiva:

  Si $\sum m_i \otimes n_i \in M \otimes_R N''$, entonces para cada i existe $x_i \in N$ tal que $\psi(x_i) = n_i$, por ser ψ sobreyectiva. Luego $\mathrm{id} \otimes \psi(\sum m_i \otimes x_i) = \sum m_i \otimes \psi(x_i) = \sum m_i \otimes n_i$.

□

Observación 1.3.12. El functor $M \otimes_R -$ no es en general exacto a izquierda; es decir, incluso si el morfismo $\varphi : N' \to N$ en la sucesión exacta original es un monomorfismo, esto no implica que el morfismo $\mathrm{id} \otimes \varphi : M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$ también lo sea.

Como ejemplo podemos considerar una vez más $R = \mathbb{Z}$, la sucesión $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ y $M = \mathbb{Z}_2$.

Por un lado, sabemos que $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$. Por otro lado, $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ pues si $x \otimes \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ entonces tenemos que $x \otimes \frac{a}{b} = x \otimes \frac{2a}{2b} = 2x \otimes \frac{a}{2b} = 0 \otimes \frac{a}{2b} = 0$.

Concluimos que $\mathrm{id} \otimes \varphi : \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ no puede ser un monomorfismo.

5. (Functor $- \otimes_R M$) De manera análoga al ítem anterior, si $M \in$ R-Mod definimos el functor $- \otimes_R M : \text{Mod-R} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$.

Se puede probar que el functor $- \otimes_R M : \text{Mod-R} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ es también exacto a derecha, y en general no a izquierda.

Observación 1.3.13. Si $M \in$ S-Mod-R y consideramos el functor $M \otimes_R -$, podemos darle estructura de S-módulo a izquierda al grupo $M \otimes_R N$ para todo $N \in$ R-Mod, definiendo la acción $s(m \otimes n) = sm \otimes n$. De esta forma podemos considerar nuestro functor $M \otimes_R -$ como $M \otimes_R - : \text{R-Mod} \longrightarrow \text{S-Mod}$.

Si en cambio tomamos $M \in$ R-Mod-S y consideramos el functor $- \otimes_R M$, podemos darle estructura de S-módulo a derecha al grupo $N \otimes_R M$ para todo $N \in$ Mod-R, definiendo la acción $(n \otimes m)s = n \otimes ms$. De esta forma podemos considerar nuestro functor $- \otimes_R M$ como $- \otimes_R M : \text{Mod-R} \longrightarrow \text{Mod-S}$.

Hemos visto entonces que los functores $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ y $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ son exactos a izquierda, mientras que los functores $M \otimes_R -$ y $- \otimes_R M$ son exactos a derecha. Es natural preguntarse para qué R-módulos M estos functores son exactos. Esta pregunta motiva la definición de los módulos proyectivos, inyectivos y planos con los que trabajaremos a menudo.

Definición 1.3.14. Sea R un anillo, y $M \in$ R-Mod.

- M es proyectivo si el functor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ es exacto.
- M es inyectivo si el functor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ es exacto.
- M es plano si el functor $- \otimes_R M$ es exacto.

De manera similar, si $M \in$ Mod-R se define que M sea proyectivo, inyectivo o plano (para esto último utilizamos el functor $M \otimes_R -$).

Definición 1.3.15. Sea R un anillo, y $F \in$ R-Mod. Decimos que F es fielmente plano si es un módulo plano tal que para todo $M \in$ Mod-R el hecho de que $M \otimes_R F = 0$ implica que $M = 0$.

1.3.2 Algunas caracterizaciones y resultados

Comencemos con algunas caracterizaciones y propiedades de los módulos proyectivos.

Proposición 1.3.16. *Sea R un anillo, y $P \in$ R-Mod. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *P es un módulo proyectivo,*
2. *para todo epimorfismo $g : M \to N$ y todo morfismo de R-módulos $f : P \to N$ existe un morfismo $h : P \to M$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

3. *P es sumando directo de un módulo libre.*
4. *toda sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ se escinde.*

Demostración. $(1 \Leftrightarrow 2)$. Observar que decir que el functor $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ es exacto es lo mismo que decir que lleva epimorfismos en epimorfismos, pues $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ siempre es exacto a izquierda. Con esto en mente veamos la equivalencia.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(P,-) \text{ es exacto } &\iff \mathrm{Hom}_R(P,-) \text{ lleva epimorfismos en epimorfismos}\\
&\iff \text{para todo epimorfismo } g: M \to N,\ g_*: \mathrm{Hom}_R(P,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,N)\\
&\qquad \text{es un epimorfismo}\\
&\iff \text{para todo epimorfismo } g: M \to N \text{ y todo } f \in \mathrm{Hom}_R(P,N) \text{ existe algún}\\
&\qquad h \in \mathrm{Hom}_R(P,M) \text{ tal que } g_*(h) = f\\
&\iff \text{para todo epimorfismo } g: M \to N \text{ y todo morfismo } f: P \to N \text{ existe un}\\
&\qquad \text{morfismo } h: P \to M \text{ tal que } gh = f
\end{aligned}
$$

($2 \Leftrightarrow 3$). [Rot09, teo. 3.5(i)].

($4 \Leftrightarrow 1$). [Rot09, prop. 3.3].

□

Observación 1.3.17. Es posible refinar el resultado anterior y probar que P es un módulo proyectivo finitamente generado si y solo si es sumando directo de R^n, es decir, de un módulo libre finitamente generado ([Rot09, teo. 3.5(ii)]).

Utilizando que un módulo es proyectivo si y solo si es sumando directo de un módulo libre, obtenemos de manera inmediata los siguientes resultados.

Corolario 1.3.18. *Sea* $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$*; entonces* P *es proyectivo si y solo si cada* P_i *es proyectivo.*

Veremos ahora cómo se relacionan los módulos proyectivos y los planos.

Proposición 1.3.19. *Todo módulo proyectivo es plano.*

Demostración. Sea R un anillo. Sabemos que $\varphi : R \otimes_R M \to M$ definido como $\varphi(r \otimes m) = rm$ es un isomorfismo, a partir de lo cual es inmediato verificar que R es un R-módulo plano.

Por otro lado, consideremos el isomorfismo $\psi : (\oplus M_j) \otimes_R N \longrightarrow \oplus(M_j \otimes_R N)$ definido como $\psi((\sum m_j) \otimes n) = \sum(m_j \otimes n)$. Si recordamos que, dada una familia de morfismos $\{f_i : A_i \to B_i\}$, tenemos que el morfismo $f : \oplus A_i \to \oplus B_i$ dado por $f(\sum a_i) = \sum f_i(a_i)$ es inyectivo si y solo si cada f_i lo es, no es difícil concluir que el módulo $\oplus M_i$ es plano si y solo si cada sumando M_i lo es.

Ahora, si P es un R-módulo proyectivo, sabemos que P es isomorfo a un sumando directo de $\oplus R$ y por lo tanto los hechos que acabamos de mencionar nos aseguran que P es un R-módulo plano.

□

Observación 1.3.20. El recíproco de la proposición anterior es falso, es decir, no todo módulo plano es proyectivo. Veamos por ejemplo que $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo plano que no es proyectivo.

Si $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo, existe un Z-módulo libre F de base $\{e_i\}_{i \in I}$ tal que $\mathbb{Q}$ es un sumando directo de F, es decir, existe una inclusión $\iota : \mathbb{Q} \to F$ y una proyección $\pi : F \to \mathbb{Q}$ tales que $\pi\iota = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Luego podemos escribir

$$\iota(1) = \sum a_i e_i$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$. Llamemos $n = 1 + \sum |a_j|$. Entonces

$$\sum a_i e_i = \iota(1) = n\iota(1/n) = n \sum b_i e_i$$

para ciertos $b_i \in \mathbb{Z}$, por lo que para cada i debe ser $a_i = nb_i$. Esto implica que n divide a a_i para todo i, y como $n > a_i$ para todo i, debe ser $a_i = 0$. Por lo tanto $\iota(1) = 0$, lo cual es absurdo.

Por otro lado, sabemos que $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo plano pues es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}$, y si A es un anillo conmutativo cualquiera y S un conjunto multiplicativo sabemos que $S^{-1}A$ es un A-módulo plano.

A pesar de que este recíproco es falso, en el apéndice mostramos una prueba (teorema A.2.19) de que sí es cierto si nos restringimos a los módulos planos finitamente presentados.

De manera similar a la proposición 1.3.16, tenemos la siguiente caracterización de los módulos inyectivos.

Proposición 1.3.21. *Si R es un anillo y $E \in$ R-Mod, entonces E es un módulo inyectivo si y solo si para todo monomorfismo $f : M \to N$ y todo morfismo $g : M \to E$ existe un morfismo $h : N \to E$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Corolario 1.3.22. *Si $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ y E es inyectivo, entonces cada E_i es inyectivo.*

Demostración. [Rot09, prop. 3.28(ii)]. □

En el caso de los módulos inyectivos tenemos un útil resultado debido a R. Baer que nos permite caracterizar el concepto dado por la definición de una manera sustancialmente más simple.

Teorema 1.3.23 (Criterio de Baer)**.** *Si $E \in$ R-Mod, entonces E es inyectivo si y solo si todo mapa $f : I \to E$, donde $I \subset R$ es un ideal a izquierda, puede ser extendido a R.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Demostración. [Rot09, teo. 3.30].

□

1.3.3 Resoluciones proyectivas, inyectivas y planas

Es posible probar ([Rot09, teo. 2.35, 3.38]) que la categoría de módulos sobre un anillo tiene suficientes proyectivos e inyectivos. Esto quiere decir que si R es un anillo y $M \in$ R-Mod, entonces existe un módulo proyectivo $P \in$ R-Mod y un epimorfismo $P \to M \to 0$ (decimos que podemos "cubrir" a M con un proyectivo), y de manera dual existe un módulo inyectivo $E \in$ R-Mod y un monomorfismo $0 \to M \to E$ (decimos en este caso que podemos "envolver" a M con un inyectivo). Utilizaremos este hecho para construir resoluciones proyectivas e inyectivas.

Definición 1.3.24. Sea R un anillo y $M \in$ R-Mod. Una resolución proyectiva de M es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\longrightarrow} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \overset{d_2}{\longrightarrow} P_1 \overset{d_1}{\longrightarrow} P_0 \overset{d_0}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$$

donde cada módulo P_i es proyectivo.

Gracias a uno de los resultados mostrados en la sección anterior, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.3.25. *Dado $M \in$ R-Mod, siempre existe una resolución proyectiva de M.*

Demostración. Como la categoría R-Mod tiene suficientes proyectivos, sabemos de la existencia de un R-módulo proyectivo P_0 y un epimorfismo $P_0 \overset{d_0}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$; podemos considerar entonces la sucesión exacta $0 \longrightarrow \ker d_0 \hookrightarrow P_0 \overset{d_0}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$. Pero $\ker d_0 \in$ R-Mod, por lo que existe un proyectivo P_1 y un epimorfismo $P_1 \overset{f}{\longrightarrow} \ker d_0 \longrightarrow 0$.

Tenemos entonces la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, dashed, "d_1=\iota f"] \arrow[dr, "f"'] & & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \ker d_0 \arrow[ur, hook, "\iota"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como f es un epimorfismo, $\operatorname{Im} \iota f = \operatorname{Im} \iota$ y por ser ι el morfismo inclusión tenemos $\operatorname{Im} \iota = \ker d_0$; luego $\operatorname{Im} d_1 = \ker d_0$ y la fila superior en nuestro diagrama es exacta. Iterando este procedimiento construimos una resolución proyectiva de M.

□

Observación 1.3.26. De la prueba de la proposición anterior, junto con la observación 1.3.17, es posible deducir que si R es noetheriano a izquierda y $M \in$ R-Mod es finitamente generado entonces podemos considerar resoluciones proyectivas de M en las que cada módulo P_i sea también finitamente generado.

Esto se debe a que, por la observación 1.3.17, podemos tomar P_0 finitamente generado, y luego por ser R noetheriano a izquierda el submódulo $\ker d_0 \subset P_0$ será también finitamente generado, por lo que podemos cubrirlo con un P_1 finitamente generado, etc.

Definición 1.3.27. Dada una resolución proyectiva en R-Mod

$$\mathbb{P} : \cdots \longrightarrow P_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\longrightarrow} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \overset{d_2}{\longrightarrow} P_1 \overset{d_1}{\longrightarrow} P_0 \overset{d_0}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$$

definimos para todo $n \geq 1$ la enésima sizigia de $\mathbb{P}$, a la que notamos $\Omega^n \mathbb{P}$, como $\ker d_{n-1}$.

De manera similar, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.28. Sea R un anillo y $M \in$ R-Mod. Una resolución inyectiva de M es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \overset{d_0}{\longrightarrow} E_0 \overset{d_1}{\longrightarrow} E_1 \overset{d_2}{\longrightarrow} E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \overset{d_{n+1}}{\longrightarrow} E_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

donde cada módulo E_i es inyectivo.

Proposición 1.3.29. *Dado $M \in$ R-Mod, siempre existe una resolución inyectiva de M.*

Demostración. Como la categoría R-Mod tiene suficientes inyectivos, podemos encontrar un R-módulo inyectivo E_0 y un monomorfismo $0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} E_0$; podemos considerar entonces la sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{\pi} E_0/\operatorname{Im} d_0 \longrightarrow 0$. Pero $E_0/\operatorname{Im} d_0 \in$ R-Mod, por lo que existe un inyectivo E_1 y un monomorfismo $0 \longrightarrow E_0/\operatorname{Im} d_0 \xrightarrow{f} E_1$.

Luego podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 \\
 & & & E_0/\operatorname{Im} d_0 \arrow[ur] \arrow[dr, "f"] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "d_0"] & E_0 \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, dashed, "d_1 = f\pi"'] & & E_1
\end{tikzcd}$$

Como f es un monomorfismo, $\ker f\pi = \ker \pi$ y por ser π la proyección canónica tenemos $\ker \pi = \operatorname{Im} d_0$; luego $\ker d_1 = \operatorname{Im} d_0$ y la fila superior en nuestro diagrama es exacta. Iterando este procedimiento construimos una resolución inyectiva de M.

□

Definición 1.3.30. Dada una resolución inyectiva en R-Mod

$$\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_2} E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \xrightarrow{d_{n+1}} E_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

definimos para cada $n \geq 1$ la enésima cosizigia de $\mathbb{E}$, a la que notamos $\Omega^{-n}\mathbb{E}$, como $E_n/\operatorname{Im} d_{n-1}$.

Al igual que con los módulos proyectivos e inyectivos, definimos el concepto de resoluciones planas.

Definición 1.3.31. Sea R un anillo y $M \in$ R-Mod. Una resolución plana de M es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

donde cada módulo F_i es plano.

Observación 1.3.32. Como todo módulo proyectivo es plano (prop. 1.3.19), sabemos que todo $M \in$ R-Mod admite una resolución plana.

Definición 1.3.33. Si $M \in$ R-Mod y consideramos una resolución plana de M

$$\mathbb{F} : \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

definimos su enésima sizigia como $\Theta^n\mathbb{F} = \ker d_{n-1}$.

A pesar de ser complejos con homología trivial (son exactos), las resoluciones proyectivas, inyectivas y planas son de gran interés pues, por ejemplo, nos permitirán construir los functores Ext y Tor, de los que nos ocuparemos a continuación.

Definición 1.3.34. Si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}'$ son dos resoluciones proyectivas, decimos que $\mathbf{f} : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ es un morfismo de resoluciones si es un morfismo de complejos, al mirar la estructura de complejos de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}'$.

De manera análoga se define el concepto de morfismo de resoluciones inyectivas.

Definición 1.3.35. Sean $M, N \in$ R-Mod, $f : M \to N$ un morfismo de módulos y $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}'$ resoluciones proyectivas de M y N respectivamente. Decimos que $\mathbf{f} : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ es un levantamiento de f si es un morfismo de resoluciones tal que el morfismo de módulos entre M y N es f, es decir, si es de la forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}: \arrow[d, "\mathbf{f}"] & \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\mathbb{P}': & \cdots \arrow[r] & P'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & P'_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "d'_2"] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"] & P'_0 \arrow[r, "d'_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde el diagrama es conmutativo.

De igual manera se definen los levantamientos en las resoluciones inyectivas.

Dado un morfismo de módulos $f : M \to N$ y resoluciones proyectivas de M y N, nos interesa saber si siempre es posible encontrar un levantamiento de f a las resoluciones. Esto viene garantizado por lo siguiente.

Teorema 1.3.36. *Dados $M, N \in$ R-Mod, $f : M \to N$ un morfismo de módulos y $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}'$ resoluciones proyectivas de M y N respectivamente, existe un levantamiento $\mathbf{f} : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ de f.*

Demostración. [Rot09, teo. 6.16]. □

Observación 1.3.37. Dualmente, es posible demostrar la versión de este teorema para resoluciones inyectivas.

1.4 Ext y Tor

Hemos visto que, dada una sucesión exacta $0 \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$, podemos aplicarle los functores $\mathrm{Hom}_R(M, -)$, $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ y $N \otimes_R -$ para obtener las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, T') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, T''),$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T'', M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T', M),$$

$$N \otimes_R T' \longrightarrow N \otimes_R T \longrightarrow N \otimes_R T'' \longrightarrow 0$$

Los functores $\mathrm{Ext}^i_R(M, -)$, $\mathrm{Ext}^i_R(-, M)$ y $\mathrm{Tor}^R_i(N, -)$ son quienes vendrán a "corregir" de alguna manera canónica la falta de exactitud de los functores Hom y tensor, permitiéndonos obtener sucesiones exactas largas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, T') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, T'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, T') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, T'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(M, T') \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(M, T) \longrightarrow \cdots,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T'', M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T', M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(T'', M) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(T, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(T', M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(T'', M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(T, M) \longrightarrow \cdots,$$

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(N,T) \longrightarrow \operatorname{Tor}_2^R(N,T'') \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(N,T') \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(N,T) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(N,T'') \longrightarrow N \otimes_R T' \longrightarrow N \otimes_R T \longrightarrow N \otimes_R T'' \longrightarrow 0$$

Definamos primero los functores $\operatorname{Ext}_R^i(M,-) : \text{R-Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$

- A nivel de objetos, si $N \in$ R-Mod, consideramos una resolución inyectiva de N

$$\mathbb{E}: \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

  y aplicamos el functor $\operatorname{Hom}_R(M,-)$ para obtener el complejo

$$\operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}): \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{d_{0*}} \operatorname{Hom}_R(M,E_0) \xrightarrow{d_{1*}} \operatorname{Hom}_R(M,E_1) \xrightarrow{d_{2*}} \cdots$$

  Como $\operatorname{Hom}_R(M,-)$ es exacto a izquierda, este complejo es exacto en los dos primeros términos, por lo que allí la homología es cero. Para evitar esto, podemos considerar el complejo truncado

$$\operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}^\bullet): \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,E_0) \xrightarrow{d_{1*}} \operatorname{Hom}_R(M,E_1) \xrightarrow{d_{2*}} \operatorname{Hom}_R(M,E_2) \xrightarrow{d_{3*}} \cdots$$

  y definimos entonces $\operatorname{Ext}_R^i(M,N) = H^i(\operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}^\bullet))$.
  Observar que $\operatorname{Ext}_R^0(M,N) = H^0(\operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}^\bullet)) = \ker d_{1*}/\operatorname{Im} 0 \simeq \ker d_{1*} = \operatorname{Im} d_{0*} \simeq \operatorname{Hom}_R(M,N)$.

- A nivel de flechas, si $f: N \to N'$ es un morfismo de R-módulos, consideramos $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}'$ resoluciones inyectivas de N y N' respectivamente y $\mathbf{f}: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ un levantamiento de f

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}: \arrow[d, "\mathbf{f}"] & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & E_0 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_0"] & E_1 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_1"] & E_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & \cdots \\
\mathbb{E}': & 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "d_0'"] & E_0' \arrow[r, "d_1'"] & E_1' \arrow[r, "d_2'"] & E_2' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

  Aplicando el functor $\operatorname{Hom}_R(M,-)$ a este diagrama conmutativo, obtenemos un morfismo $\mathbf{f}_*: \operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}')$ que al truncar las resoluciones nos da un morfismo $\mathbf{f}_{*\bullet}: \operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}_\bullet) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}'_\bullet)$, por lo que al aplicar el functor de cohomología tendremos $H^i(\mathbf{f}_{*\bullet}): H^i(\operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}_\bullet)) \longrightarrow H^i(\operatorname{Hom}_R(M,\mathbb{E}'_\bullet))$. Definimos entonces $\operatorname{Ext}_R^i(M,f) = H^i(\mathbf{f}_{*\bullet})$.

Es posible probar (de manera análoga a [Rot09, teo. 6.20]) que la definición de $\operatorname{Ext}_R^i(M,-)$ es independiente de la elección de resoluciones inyectivas y de levantamientos de los morfismos; es decir, si llamamos $\widetilde{\operatorname{Ext}}_R^i(M,-)$ al functor que se obtiene mediante la construcción anterior eligiendo otras resoluciones inyectivas y levantamientos, entonces los functores $\operatorname{Ext}_R^i(M,-)$ y $\widetilde{\operatorname{Ext}}_R^i(M,-)$ son naturalmente isomorfos.

Los functores $\operatorname{Ext}_R^i(M,-)$ (con $i \geq 0$) son llamados los functores derivados del functor $\operatorname{Hom}_R(M,-)$.

De manera similar definimos los functores $\operatorname{Ext}_R^i(-,M)$, $\operatorname{Tor}_i^R(N,-)$ y $\operatorname{Tor}_i^R(-,M)$, tomando resoluciones proyectivas en lugar de inyectivas en la construcción anterior. Estos serán a su vez los functores derivados de los correspondientes functores.

Es importante remarcar el hecho de que los functores $\operatorname{Tor}_i^R(N,-)$ y $\operatorname{Tor}_i^R(-,M)$ pueden ser calculados a partir de resoluciones planas en lugar de resoluciones proyectivas, como muestra el teorema [Rot09, teo. 7.5].

Observación 1.4.1. A partir de la construcción, es inmediato que los functores $\mathrm{Ext}^i_R(M,-)$ se anulan en los módulos inyectivos para todo $i \geq 1$, pues si E es inyectivo podemos partir de la resolución inyectiva $0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathrm{id}} E \longrightarrow 0$. De manera similar, los functores $\mathrm{Ext}^i_R(-,M)$ se anulan en los módulos proyectivos para todo $i \geq 1$, y los functores $\mathrm{Tor}^R_i(N,-)$ y $\mathrm{Tor}^R_i(-,M)$ se anulan en los módulos planos para todo $i \geq 1$.

Proposición 1.4.2. *Los functores* $\mathrm{Ext}^i_R(M,-), \mathrm{Ext}^i_R(-,M), \mathrm{Tor}^R_i(N,-)$ *y* $\mathrm{Tor}^R_i(-,M)$ *separan sumas directas finitas. Es decir, existen isomorfismos*

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, \bigoplus_{j=1}^k N_j) \simeq \bigoplus_{j=1}^k \mathrm{Ext}^i_R(M, N_j)$$

$$\mathrm{Ext}^i_R(\bigoplus_{j=1}^k N_j, M) \simeq \bigoplus_{j=1}^k \mathrm{Ext}^i_R(N_j, M)$$

$$\mathrm{Tor}^R_i(N, \bigoplus_{j=1}^k M_j) \simeq \bigoplus_{j=1}^k \mathrm{Tor}^R_i(N, M_j)$$

$$\mathrm{Tor}^R_i(\bigoplus_{j=1}^k N_j, M) \simeq \bigoplus_{j=1}^k \mathrm{Tor}^R_i(N_j, M)$$

Demostración. [Rot09, props. 7.6, 7.21, 7.22]. □

Teorema 1.4.3. *Dada una sucesión exacta* $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ *existe para cada* n *un morfismo* δ_n *de manera que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N'') \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Ext}^1_R(M,N') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M,N'') \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Ext}^2_R(M,N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(M,N) \longrightarrow \cdots,$$

es exacta.

Demostración. Análoga a [Rot09, teo. 6.27].

□

Es posible obtener resultados similares para los functores $\mathrm{Ext}^i_R(-,M)$, $\mathrm{Tor}^R_i(N,-)$ y $\mathrm{Tor}^R_i(-,M)$, lo que implica la existencia de las sucesiones exactas largas ilustradas al comienzo de la sección.

Capítulo 2

Preliminares de módulos

En este capítulo recordamos algunos conceptos de teoría de módulos, particularmente en el contexto de las álgebras de Artin.

Definición 2.0.4. Decimos que A es un álgebra de Artin sobre R (o a veces simplemente un álgebra de Artin) si A es un álgebra finitamente generada sobre R, donde R es un anillo conmutativo y artiniano.

2.1 Envolventes inyectivas y cubiertas proyectivas

Ya hemos comentado que para todo módulo M existe un módulo proyectivo P y un epimorfismo $P \to M \to 0$, y un módulo inyectivo E junto con un monomorfismo $0 \to M \to E$. Veremos ahora que podemos tomar esos módulos de manera que sean "minimales", en cierto sentido.

Definición 2.1.1. Decimos que un submódulo $N \subset M$ es esencial en M si el hecho de que $N \cap L = 0$ para algún submódulo $L \subset M$ implica que $L = 0$.

Definición 2.1.2. Si M y E son módulos sobre el mismo anillo, decimos que E es una extensión esencial de M si existe un monomorfismo $\varphi : M \to E$ tal que $\operatorname{Im} \varphi$ es un submódulo esencial en E.

Proposición 2.1.3. *Dados dos módulos M y E con $M \subset E$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *E es una extensión esencial maximal de M,*
2. *E es inyectivo y es una extensión esencial de M,*
3. *E es inyectivo y no existe otro módulo inyectivo E' tal que $M \subset E' \subsetneq E$.*

Demostración. [Rot09, lema 3.44]. □

Definición 2.1.4. Dado un módulo M, decimos que un módulo E es su envolvente inyectiva si $M \subset E$ y se verifican los enunciados equivalentes de la proposición anterior.

Teorema 2.1.5 (Eckmann-Schöpf)**.** *Todo módulo admite una envolvente inyectiva, única a menos de isomorfismos que dejan fijos los puntos de M.*

Demostración. [Rot09, teo. 3.45]. □

Gracias al teorema anterior, en adelante notaremos $E(M)$ a la envolvente inyectiva de M.

Definición 2.1.6. El zócalo de un módulo M es el submódulo $\operatorname{soc} M = \sum S_i$, la suma de todos los submódulos simples de M.

Proposición 2.1.7. *Para cualquier módulo M se cumple que* $\operatorname{soc}(M) = \bigcap\{N \subset M : N$ *es esencial en* $M\}$.

Demostración. [AF92, prop. 9.7]. □

Proposición 2.1.8. *1.* $E(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} E(M_i)$

2. Si R es un anillo artiniano y M un R-módulo, entonces $E(M) = E(\operatorname{soc} M)$

Demostración. 1. [AF92, prop. 18.12(4)].

2. Como sabemos que $E(M)$ es inyectivo, basta ver que la extensión $\operatorname{soc} M \subset E(M)$ es esencial.

   Para esto, supongamos que $N \subset E(M)$ es un submódulo tal que $(\operatorname{soc} M) \cap N = 0$. Tenemos entonces que $M \cap N = 0$, pues de lo contrario podemos considerar un elemento no nulo $x \in M \cap N$ y luego $(x) \subset M \cap N$ es un módulo artiniano, por lo que contiene un submódulo simple $S \subset (x)$. Tendríamos entonces que $S \subset \operatorname{soc} M$, y entonces $S \subset (\operatorname{soc} M) \cap N$, lo cual es absurdo.

   Concluimos que si $N \subset E(M)$ es tal que $(\operatorname{soc} M) \cap N = 0$, entonces $M \cap N = 0$. Pero $M \subset E(M)$ es esencial, por lo que $N = 0$.

□

Definición 2.1.9. Decimos que un submódulo $N \subset M$ es superfluo en M si el hecho de que $N + L = M$ para algún submódulo $L \subset M$ implica que $L = M$.

Definición 2.1.10. Dado un módulo M, decimos que un par (P, π) es una cubierta proyectiva de M si P es un módulo proyectivo y $\pi : P \to M$ un epimorfismo tal que $\ker \pi$ es superfluo en P.

Proposición 2.1.11. *Sea M un módulo y (P, π) una cubierta proyectiva de M. Si $\varphi : P \to P$ es un morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "\pi"'] & M \end{tikzcd}$$

entonces φ debe ser un automorfismo.

Demostración. Como $\ker \pi$ es superfluo en P, para ver que φ es un epimorfismo basta mostrar que $P = \ker \pi + \operatorname{Im} \varphi$. Esto se debe a que todo elemento $p \in P$ puede escribirse como $p = p - \varphi(p) + \varphi(p)$, donde $(p - \varphi(p)) \in \ker \pi$ y $\varphi(p) \in \operatorname{Im} \varphi$.

Veamos ahora que φ es un monomorfismo. Ya sabemos que es sobreyectivo, por lo que podemos considerar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \hookrightarrow P \xrightarrow{\varphi} P \longrightarrow 0$$

Como P es proyectivo, esta sucesión se escinde (proposición 1.3.16) por lo que existe un submódulo $P' \simeq P$ tal que $P = P' \oplus \ker \varphi$ (proposición 1.1.19). Obtenemos entonces las siguientes inclusiones

$$P = P' \oplus \ker \varphi \subset P' \oplus \ker \pi \subset P$$

de lo que concluimos que $P = P' \oplus \ker \pi$, y por lo tanto $P' = P$ y $\ker \varphi = 0$.

□

Debido a esta proposición, tiene sentido hablar de la cubierta proyectiva de un módulo, a la que notaremos $(P(M), \pi_M)$.

A pesar de que la definición de una cubierta proyectiva es dual a la de una envolvente inyectiva, no es cierto que todo módulo admita una cubierta proyectiva. Sin embargo, esto sí sucede en el caso de álgebras de Artin para su categoría de módulos finitamente generados.

Definición 2.1.12. Un anillo R es semiperfecto si todo R-módulo finitamente generado admite una cubierta proyectiva.

Teorema 2.1.13. *Toda álgebra de Artin es un anillo semiperfecto.*

Demostración. Se deduce de [Rot09, teo. 4.66].

□

2.2 Dualidades

Definición 2.2.1. Un functor contravariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una dualidad si al ver $\overline{F} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ como un functor covariante tenemos que es una equivalencia de categorías.

A continuación definimos una dualidad válida para el caso de álgebras de Artin que emplearemos más adelante.

Sea A un álgebra de Artin sobre R. Por ser R un anillo artiniano, tiene un número finito de módulos simples a menos de isomorfismo, digamos $S_1, \ldots, S_n$ (esto se deduce inmediatamente de [AM69, prop. 8.3]). Tomemos $E(S_i)$ la envolvente inyectiva de cada uno de estos módulos simples, y consideremos $J = \bigoplus_{i=1}^{n} E(S_i)$. Claramente J es un R-módulo inyectivo (a izquierda y a derecha, pues R es conmutativo).

Además, es posible probar ([ARS95, teo. 3.1, capítulo II]) que $\mathrm{Hom}_R(M, J)$ será finitamente generado siempre que M lo sea, y que el functor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-, J) : \text{R-mod} \longrightarrow \text{R-mod}$ es una dualidad. Más aún, si $M \in \text{A-mod}$ y dotamos a $\mathrm{Hom}_R(M, J)$ de estructura de A-módulo a derecha mediante $(fa)(m) = f(am)$ para todo $a \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, J)$ y $m \in M$, podemos probar ([ARS95, teo. 3.3, capítulo II]) que la dualidad anterior puede extenderse a una dualidad $\mathrm{Hom}_R(-, J) : \text{A-mod} \longrightarrow \text{mod-A}$. Notaremos $D(-) = \mathrm{Hom}_R(-, J)$.

Además de llevar A-módulos a izquierda en A-módulos a derecha, la dualidad D lleva módulos proyectivos en inyectivos, y viceversa, como muestra la proposición [ARS95, prop. 1.5(b), capítulo II].

Nuestro interés ahora es definir la traslación de Auslander-Reiten. Para ello, introducimos los siguientes conceptos.

Llamaremos $(-)^t$ al functor $\mathrm{Hom}_A(-, A) : \text{A-mod} \longrightarrow \text{mod-A}$. Este functor no es necesariamente una dualidad, pero sí lo es si nos restringimos a la categoría formada por los A-módulos proyectivos (donde las flechas son los morfismos de módulos), es decir, $(-)^t : A\text{-proj} \longrightarrow \text{proj-}A$ es una dualidad ([ARS95, prop. 4.3(c), capítulo II]). Si $M \in$ A-mod, podemos considerar

$$P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_0 \xrightarrow{\pi_0} M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva minimal de M, es decir, una resolución proyectiva tal que $\pi_0 : P_0 \to M$ y $\pi_1 : P_1 \to \ker \pi_0$ son cubiertas proyectivas. Aplicando el functor $(-)^t$ obtenemos una sucesión exacta en mod-A

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{\pi_0^t} P_0^t \xrightarrow{\pi_1^t} P_1^t \longrightarrow \operatorname{coker} \pi_1^t \longrightarrow 0$$

Denotaremos a $\operatorname{coker} \pi_1^t$ mediante $\operatorname{Tr} M$, y le llamaremos la trasposición de M. Dado que las cubiertas proyectivas (y los conúcleos) están determinados a menos de isomorfismo, sabemos que $\operatorname{Tr} M$ es único a menos de isomorfismo para cada módulo M.

Puede probarse ([ASS06, prop. 2.1(c), capítulo IV]) que $\operatorname{Tr} M = 0$ si y solo si M es proyectivo, por lo que la correspondencia $\operatorname{Tr} :$ A-mod $\longrightarrow$ mod-A que a cada módulo le asocia su trasposición no puede dar lugar a una dualidad. Esto motiva las siguientes definiciones.

Para dos A-módulos M, N, definimos $\mathcal{P}(M,N) \subset \operatorname{Hom}_A(M,N)$ (respectivamente $\mathcal{I}(M,N)$) como el subconjunto formado por los morfismos que se factorizan a través de un A-módulo proyectivo (resp. inyectivo).

Es fácil ver que $\mathcal{P}(M,N)$ es un submódulo del R-módulo $\operatorname{Hom}_A(M,N)$, y que además si $f \in \mathcal{P}(M,N)$, $g \in \operatorname{Hom}_A(N,L)$ y $h \in \operatorname{Hom}_A(K,M)$, entonces $gf \in \mathcal{P}(M,L)$ y $fh \in \mathcal{P}(K,N)$, por lo que esto define un ideal $\mathcal{P}$ en A-mod.

Podemos entonces considerar la categoría A-$\underline{\text{mod}}$ = A-mod $/\mathcal{P}$, cuyos objetos son los mismos que en A-mod, y si $M, N \in$ A-mod entonces los morfismos de M a N consisten en los elementos del cociente $\underline{\operatorname{Hom}}_A(M,N) = \operatorname{Hom}_A(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$. A esta categoría le llamamos categoría proyectivamente estable.

Dualmente, podemos definir la categoría inyectivamente estable, a la que notamos A-$\overline{\text{mod}}$, cuyos objetos coinciden con los de A-mod, y si $M, N \in$ A-mod entonces los morfismos de M a N consisten en $\overline{\operatorname{Hom}}_A(M,N) = \operatorname{Hom}_A(M,N)/\mathcal{I}(M,N)$.

Observación 2.2.2. Si un morfismo $f : M \to N$ se factoriza a través de un proyectivo, entonces se factoriza a través de la cubierta proyectiva de N. Esto se debe a que, si tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & N \\ & P \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

debe existir un morfismo $g : P \to P(N)$ de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f_2"] & \\ P(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmute. Luego, combinando la información, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & & N \\
& P \arrow[urr, "f_2"] \arrow[dr, "g"'] & & \\
& & P(N) \arrow[uur, "\pi_N"'] &
\end{tikzcd}$$

por lo que f se factoriza a través de $P(N)$.

Observación 2.2.3. A partir de nuestras definiciones, obtenemos ([ARS95, prop. 1.9(a), capítulo IV]) que la dualidad D : A-mod $\longrightarrow$ mod-A induce una dualidad A-$\underline{\text{mod}}$ $\longrightarrow$ $\overline{\text{mod}}$-A.

Si nos restringimos a estas categorías, obtenemos que Tr : A-$\underline{\text{mod}}$ $\longrightarrow$ $\underline{\text{mod}}$-A induce una dualidad ([ASS06, prop. 2.2, capítulo IV]).

Finalmente estamos en condiciones de presentar la traslación de Auslander-Reiten, la cual se define como la composición $\tau = D\,\text{Tr}$. Es posible probar ([ARS95, prop. 1.9(b), capítulo IV]) que τ : A-$\underline{\text{mod}}$ $\longrightarrow$ $\overline{\text{mod}}$-A es una equivalencia de categorías, con inversa $\tau^{-1} = \text{Tr}\,D$: $\overline{\text{mod}}$-A $\longrightarrow$ A-$\underline{\text{mod}}$.

Por último citamos la fórmula de Auslander-Reiten, que involucra los conceptos anteriormente mencionados.

Teorema 2.2.4. *Si $M, N \in$ A-mod, entonces existen isomorfismos naturales en ambas variables*

$$\text{Ext}^1_A(M,N) \simeq D\underline{\text{Hom}_A}(\tau^{-1}N, M) \simeq D\overline{\text{Hom}_A}(N, \tau M)$$

Demostración. Este resultado fue probado originalmente en [AR75]; además, la prueba presentada en [ASS06, teo. 2.13] es también válida para el caso en que A es un álgebra de Artin. □

2.3 Descomposiciones en indescomponibles

Recordamos la siguiente definición, esencial para nuestro trabajo más adelante.

Definición 2.3.1. Un módulo M es indescomponible si no puede descomponerse en suma directa de dos submódulos propios.

Teorema 2.3.2 (Krull-Schmidt)**.** *Si M es un módulo no nulo de longitud finita, entonces M admite una descomposición finita $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$ donde cada M_i es indescomponible. Además, esta descomposición es única a menos de isomorfismos (o permutaciones de los sumandos).*

Demostración. [AF92, teo. 12.9]. □

Si A es un álgebra de Artin entonces es un anillo artiniano y noetheriano, por ser finitamente generado sobre R (recordemos que por el teorema de Hopkins ([AF92, teo. 15.20]) el hecho de que R sea artiniano implica que también es noetheriano). Luego, si $M \in$ A-mod, entonces M es un módulo artiniano y noetheriano y por lo tanto tiene longitud finita. Esto implica que en la categoría A-mod es válido el teorema de Krull-Schmidt para todo módulo finitamente generado.

En adelante, cuando consideremos una descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i^{\alpha_i}$ en submódulos indescomponibles, asumiremos que $M_i \not\simeq M_j$ siempre que $i \neq j$.

Definición 2.3.3. Un elemento $e \in A$ se dice idempotente si $e^2 = e$. Decimos que un conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de elementos idempotentes es un sistema

- completo si $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$,
- ortogonal si $e_i e_j = 0$ siempre que $i \neq j$,
- primitivo si $e_i = x + y$ con x, y idempotentes ortogonales implica que $x = 0$ o $y = 0$.

Proposición 2.3.4. *Si A es un álgebra de Artin que admite una descomposición $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ en proyectivos indescomponibles, y escribimos $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, entonces $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos.*

Recíprocamente, si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos, entonces $A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ es una descomposición en módulos proyectivos indescomponibles.

Demostración. [ARS95, prop. 4.8, capítulo I]. □

Observación 2.3.5. Si A es un álgebra de Artin que admite una descomposición $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$ en módulos proyectivos indescomponibles, entonces estos son todos los A-módulos proyectivos indescomponibles finitamente generados, a menos de isomorfismo.

Esto se debe a que si $P \in$ A-mod es un proyectivo indescomponible, debe existir un módulo $Q \in$ A-mod y un natural m tal que $P \oplus Q \simeq A^m$. Luego, si descomponemos a Q como suma de submódulos indescomponibles, digamos $Q = \sum_{i=1}^{k} Q_i$, obtenemos que $P \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_k$ y $P_1^m \oplus P_2^m \oplus \cdots \oplus P_n^m$ son dos descomposiciones de A^m en submódulos indescomponibles, por lo que el teorema de Krull-Schmidt nos asegura que $P \simeq P_i$ para algun $i \in \{1, \dots, n\}$.

Corolario 2.3.6. *Si A es un álgebra de Artin y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos, entonces hay exactamente n clases de isomorfismo de los módulos simples en* A-mod.

Demostración. La prueba se deduce de la proposición anterior, junto con [ARS95, teo. 4.4(b), 4.4(c), capítulo I].

□

Aplicando la dualidad D a la proposición anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.7. *Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos, entonces $D(A_A) = D(e_1 A) \oplus D(e_2 A) \oplus \cdots \oplus D(e_n A)$ es una descomposición en módulos inyectivos indescomponibles, y todo otro inyectivo indescomponible $E \in$* A-mod *es isomorfo a algún $D(e_i A)$.*

Capítulo 3

Álgebras de caminos

3.1 Generalidades

Definición 3.1.1. Un quiver Q es un grafo dirigido, es decir, una cuaterna $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ donde Q_0 es el conjunto de puntos (o vértices), Q_1 es el conjunto de flechas (o aristas), y $s, t : Q_1 \to Q_0$ son dos mapas que a cada flecha le asocian su vértice de origen y su vértice final, respectivamente.

Es común denotar por $\alpha : a \to b$ a una flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) = a$ y $t(\alpha) = b$ y decir que α va de a en b, y por (Q_0, Q_1) o simplemente Q al quiver cuando no hay lugar a confusión.

Definición 3.1.2. Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un quiver y $a, b \in Q_0$. Un camino de largo l de a a b es una secuencia $(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l|b)$ donde $\alpha_k \in Q_1$ para todo $k \leq l$, y se cumple que $s(\alpha_1) = a, t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ y $t(\alpha_l) = b$.

Llamaremos Q_l al conjunto de todos los caminos en Q de largo l.

Observación 3.1.3. Dado un punto $a \in Q_0$, siempre es posible asociarle un camino de largo 0, llamado el camino trivial, que consiste de $\tau_a = (a||a)$.

Definición 3.1.4. Dado un quiver Q y un cuerpo $\Bbbk$, definimos el álgebra de caminos $\Bbbk Q$ como la $\Bbbk$-álgebra cuyo $\Bbbk$-espacio vectorial subyacente tiene como base el conjunto de todos los caminos en Q de longitud $l \geq 0$, y donde el producto de dos vectores de la base $(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l|b)$ y $(c|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k|d)$ se define como

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l|b)(c|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_k|d)$$

siendo δ_{bc} la delta de Kronecker.

Se deduce directamente de la definición que $\dim_{\Bbbk} Q = \sum\limits_{l \geq 0} \#Q_l$.

Definición 3.1.5. Una relación en Q con coeficientes en $\Bbbk$ es un elemento en $\Bbbk Q$

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$$

donde los $\lambda_i \in \Bbbk$ no son todos nulos y los $\alpha_i \in Q$ son caminos de largo al menos 2 de manera que $s(\alpha_i) = s(\alpha_j),\ t(\alpha_i) = t(\alpha_j)$, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Asumiremos en adelante que Q es un grafo conexo y finito, es decir, que tanto Q_0 como Q_1 son conjuntos finitos. Llamaremos R_Q al ideal bilátero de $\Bbbk Q$ generado (como ideal) por los caminos de Q.

Definición 3.1.6. Decimos que un ideal I del álgebra de caminos $\Bbbk Q$ es admisible si existe $n \geq 2$ tal que $R_Q^n \subset I \subset R_Q^2$.

Al par (Q, I) se le llama quiver con relaciones.

Ejemplo 3.1.7. Consideremos Q el quiver dado por

$$\begin{tikzcd} 2 & 1 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

e I el ideal de $\Bbbk Q$ generado por las relaciones $\alpha^2,\ \beta\alpha$.

En este caso I es trivialmente admisible, pues $I = R_Q^2$.

Ejemplo 3.1.8. Tomemos ahora Q el quiver dado por

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 4 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 1 \arrow[loop right, "\lambda"] \\ & 3 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

e I el ideal de $\Bbbk Q$ generado por las relaciones $\beta\alpha - \delta\gamma,\ \lambda\beta,\ \lambda^3$. En este caso I también es admisible, pues es fácil ver que $R_Q^4 \subset I \subset R_Q^2$.

La siguiente proposición (que hace uso de la finitud de Q) nos asegura que los cocientes de la forma $\Bbbk Q/I$ con I un ideal admisible son álgebras de Artin sobre $\Bbbk$.

Proposición 3.1.9. *Si I es un ideal admisible de $\Bbbk Q$, entonces $\Bbbk Q/I$ tiene dimensión finita sobre $\Bbbk$.*

Demostración. [CLS82, prop. 2.3.3]. □

3.2 Módulos simples, y proyectivos e inyectivos indescomponibles

Nuestro objetivo en lo que resta del capítulo será presentar de una manera más "visible" quiénes son los módulos simples y los proyectivos e inyectivos indescomponibles en un álgebra del tipo $A = \Bbbk Q/I$. Para esto introducimos la noción de representación de un quiver con relaciones, y su conexión con los módulos del álgebra A.

Definición 3.2.1. Una representación del quiver Q es un par $V = ((V_a), (f_\alpha))$ que cumple lo siguiente:

- A cada vértice $a \in Q_0$ le corresponde un único $\Bbbk$-espacio vectorial V_a.
- A cada flecha $\alpha : a \to b$ en Q_1 le corresponde una única transformación lineal $f_\alpha : V_a \to V_b$.

Definición 3.2.2. Si $V = ((V_a), (f_\alpha))$ y $V' = ((V'_a), (f'_\alpha))$ son representaciones de Q, un morfismo de representaciones $\varphi : V \to V'$ consiste de una familia $\varphi = (\varphi_a) = (\varphi_a : V_a \to V'_a)$ de transformaciones lineales, una por cada vértice de Q, de manera que para cada flecha $\alpha : a \to b$ el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} V_a \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_a"] & V_b \arrow[d, "\varphi_b"] \\ V'_a \arrow[r, "f'_\alpha"] & V'_b \end{tikzcd}$$

Decimos que V es de dimensión finita si cada V_a lo es como $\Bbbk$-espacio vectorial.

Si $V = ((V_a), (f_\alpha))$ es una representación de Q y $\gamma = (a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k|b)$ es un camino no trivial, podemos evaluar V en γ de la siguiente manera:

$$V(\gamma) : V_a \to V_b, \quad V(\gamma) = f_{\alpha_k} \ldots f_{\alpha_2} f_{\alpha_1}$$

Esta definición se extiende naturalmente a las $\Bbbk$-combinaciones lineales de caminos con iguales puntos de partida y llegada, lo cual da lugar a la siguiente definición.

Definición 3.2.3. Sean Q un quiver, V una representación de Q e I un ideal admisible de $\Bbbk Q$. Decimos que V satisface las relaciones en I si $V(\rho) = 0$ para toda relación $\rho \in I$.

En adelante llamaremos $\operatorname{Rep}_\Bbbk(Q, I)$ (respectivamente $\operatorname{rep}_\Bbbk(Q, I)$) a la categoría de representaciones de Q (resp. de dimensión finita) que satisfacen las relaciones en I, es decir, a la categoría de representaciones del quiver con relaciones (Q, I).

La siguiente proposición nos dice cómo hallar el zócalo de una representación dad de (Q, I).

Proposición 3.2.4. *Sea $V = ((V_a), (f_\alpha))$ una representación de (Q, I), donde I es un ideal admisible de $\Bbbk Q$. Entonces $\operatorname{soc} V = W$, donde $W = ((W_a), (g_\alpha))$ se define de la siguiente manera: $g_\alpha = 0$ para toda flecha α, y si a es un vértice del cual no salen morfismos no nulos, entonces $W_a = V_a$; en caso contrario, definimos*

$$W_a = \bigcap_{\alpha : a \to b} \ker(f_a : V_a \to V_b)$$

Demostración. [ASS06, lema 2.2(b), capítulo III]. □

Si I es un ideal admisible de $\Bbbk Q$, es posible considerar la $\Bbbk$-álgebra $A = \Bbbk Q/I$ junto con sus categorías de módulos A-Mod y A-mod, o el quiver con relaciones (Q, I) junto con sus categorías de representaciones $\operatorname{Rep}_\Bbbk(Q, I)$ y $\operatorname{rep}_\Bbbk(Q, I)$. Veremos a continuación cómo se relacionan dichas categorías, lo que nos permitirá comprender el motivo por el cual nos centramos en las representaciones de quivers con relaciones en nuestro intento de visualizar las categorías de módulos del álgebra A.

Teorema 3.2.5. *Las categorías* A-Mod *y* $\operatorname{Rep}_\Bbbk(Q, I)$ *son k-equivalentes.*

Demostración. Nos limitaremos a comentar la definición de la equivalencia $F : \text{A-Mod} \to \operatorname{Rep}_\Bbbk(Q, I)$:

- A nivel de objetos, si M es un A-módulo y a un vértice de Q, definimos $V_a = \overline{\tau}_a M$ donde $\overline{\tau}_a$ es la clase del camino trivial τ_a en $A = \Bbbk Q/I$. Si $\alpha : a \to b$ es una flecha en Q, definimos $f_\alpha : V_a \to V_b$ como la multiplicación por $\overline{\alpha}$, es decir, $f_\alpha(\overline{\tau}_a m) = \overline{\tau}_b \overline{\alpha} \overline{\tau}_a m$.

  De esta manera, definimos $F(M) = ((V_a), (f_\alpha))$.

- A nivel de flechas, si $\varphi : M \to M'$ es un morfismo de módulos, definimos $F(\varphi) : F(M) \to F(M')$ como $F(\varphi) = (\varphi_a)$, donde si a es un vértice de Q entonces $\varphi_a : V_a \to V'_a$ es tal que $\varphi(\overline{\tau}_a m) = \overline{\tau}_a \varphi(m)$.

Las verificaciones de que $F(M)$ es una representación de (Q, I), $F(\varphi)$ es un morfismo de representaciones y que F es un functor, y más aún, una $\Bbbk$-equivalencia de categorías, pueden encontrarse en [CLS82, teo. 4.3.1]. □

Es posible restringir la equivalencia del teorema anterior para obtener el siguiente resultado.

Teorema 3.2.6. *Las categorías* A-mod *y* $\mathrm{rep}_{\Bbbk}(Q, I)$ *son k-equivalentes.*

Demostración. [CLS82, teo. 4.3.2]. □

Para avanzar hacia nuestros resultados principales, que describen las representaciones correspondientes a los módulos simples y proyectivos e inyectivos indescomponibles, haremos uso de los resultados mencionados en el capítulo anterior que relacionan a dichos módulos con ciertos elementos idempotentes del álgebra. Nos interesa, por lo tanto, encontrar un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos para nuestras álgebras en cuestión.

Proposición 3.2.7. *Si* $\Bbbk Q$ *es un álgebra de caminos e* I *un ideal admisible de* $\Bbbk Q$*, entonces* $\{\overline{\tau}_a\}_{a \in Q_0}$ *es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de* $\Bbbk Q/I$.

Demostración. [CLS82, prop. 2.3.1]. □

Finalmente, veamos una descripción de las representaciones correspondientes a los módulos simples y a los proyectivos e inyectivos indescomponibles.

Si a es un vértice de Q, denotaremos por $S(a)$ a la representación $S(a) = ((S(a)_b), (f_\alpha))$ dada por

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq a \\ \Bbbk & \text{si } b = a \end{cases}, \qquad f_\alpha = 0 \text{ para toda flecha } \alpha$$

Claramente $S(a)$ es una representación de (Q, I) para todo ideal admisible I, y al no poseer ninguna subrepresentación propia no trivial, es una representación simple.

Es inmediato observar que si $\#Q_0 = n$ entonces los $S(1), \ldots, S(n)$ son representaciones simples no isomorfas dos a dos. Más aún, los A-módulos correspondientes a las representaciones simples $S(1), \ldots, S(n)$ serán módulos simples y cualquier otro A-módulo simple será isomorfo a uno de ellos, pues el corolario 2.3.6 junto con la proposición 3.2.7 nos aseguran que tendremos exactamente n módulos simples a menos de isomorfismo, uno por cada vértice.

Para encontrar las representaciones correspondientes a los A-módulos proyectivos indescomponibles, recordando las proposiciones 2.3.4 y 3.2.7, basta aplicarle nuestro functor F construido en la equivalencia del teorema 3.2.5 a los módulos de la forma $A\overline{\tau}_a$ para cada vértice a en Q.

Por lo tanto, si a es un vértice de Q y consideramos el A-módulo proyectivo indescomponible $A\overline{\tau}_a$, obtenemos que la representación de (Q, I) asociada a este módulo es $P(a) = ((P(a)_b), (f_\alpha))$, definida de la siguiente manera:

- Por definición del functor F, es

$$P(a)_b = F(A\overline{\tau}_a)_b = \overline{\tau}_b A \overline{\tau}_a = \overline{\tau}_b(\Bbbk Q/I)\overline{\tau}_a = (\tau_b \Bbbk Q \tau_a)/(\tau_b I \tau_a)$$

  Obtenemos entonces que $P(a)_b$ es el $\Bbbk$-espacio vectorial que tiene como base todos los caminos $\overline{\alpha} \in A$ de a en b.

- Si $\alpha : b \to c$ es una flecha entonces $f_\alpha : P(a)_b \to P(a)_c$ está dado por la multiplicación a izquierda por $\overline{\alpha}$.

De manera similar, si $D(\overline{\tau}_a A)$ es un A-módulo inyectivo indescomponible, tenemos que la representación de (Q, I) asociada a este módulo es $E(a) = ((E(a)_b), (f_\alpha))$, donde $E(a)_b$ es el dual del $\Bbbk$-espacio vectorial que tiene como base todos los caminos $\overline{\alpha} \in A$ de b en a, y si $\alpha : b \to c$ es una flecha entonces $f_\alpha : E(a)_b \to E(a)_c$ está dado por el dual de la multiplicación a derecha por $\overline{\alpha}$.

Veamos a modo de ejemplo las representaciones correspondientes a los módulos simples y proyectivos e inyectivos indescomponibles de las álgebras $\Bbbk Q/I$ de los ejemplos 3.1.7 y 3.1.8.

Ejemplo 3.2.8. Recordemos que nuestro primer caso era el del quiver Q dado por

$$\begin{tikzcd} 2 & 1 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

e I el ideal de $\Bbbk Q$ generado por las relaciones $\alpha^2,\ \beta\alpha$.

En este ejemplo, las representaciones correspondientes a los módulos simples serán

$$S(1) : \begin{tikzcd} 0 & \Bbbk \arrow[l, "0"'] \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}, \qquad S(2) : \begin{tikzcd} \Bbbk & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

los proyectivos indescomponibles serán

$$P(1) : \begin{tikzcd} \Bbbk & \Bbbk^2 \arrow[l, "{[0\ 1]}"'] \arrow[loop right, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"] \end{tikzcd}, \qquad P(2) = S(2) : \begin{tikzcd} \Bbbk & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

y los inyectivos indescomponibles

$$E(1) : \begin{tikzcd} 0 & \Bbbk^2 \arrow[l, "0"'] \arrow[loop right, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"] \end{tikzcd}, \qquad E(2) : \begin{tikzcd} \Bbbk & \Bbbk \arrow[l, "1"'] \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.2.9. Veamos qué sucede al considerar el quiver Q dado por

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 4 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 1 \arrow[loop right, "\lambda"] \\ & 3 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

e I el ideal de $\Bbbk Q$ generado por las relaciones $\beta\alpha - \delta\gamma,\ \lambda\beta,\ \lambda^3$.

En este caso, las representaciones correspondientes a los módulos simples serán

$$S(1):\quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \Bbbk \arrow[loop right, "0"] \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}, \qquad S(2):\quad \begin{tikzcd} & \Bbbk \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[loop right, "0"] \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$S(3):\quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[loop right, "0"] \\ & \Bbbk \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}, \qquad S(4):\quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ \Bbbk \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[loop right, "0"] \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

los proyectivos indescomponibles serán

$$P(1):\quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \Bbbk^3 \arrow[loop right, "\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]"] \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}, \qquad P(2):\quad \begin{tikzcd} & \Bbbk \arrow[dr, "1"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \Bbbk \arrow[loop right, "0"] \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$P(3):\quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & \Bbbk^3 \arrow[loop right, "\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]"] \\ & \Bbbk \arrow[ur, "\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]"'] & \end{tikzcd}, \qquad P(4):\quad \begin{tikzcd} & \Bbbk \arrow[dr, "1"] & \\ \Bbbk \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & \Bbbk \arrow[loop right, "0"] \\ & \Bbbk \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}$$

y los inyectivos indescomponibles

$$E(1):\quad \begin{tikzcd} & \Bbbk \arrow[dr, "\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]"] & \\ \Bbbk \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]"'] & & \Bbbk^3 \arrow[loop right, "\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]"] \\ & \Bbbk^3 \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}, \qquad E(2):\quad \begin{tikzcd} & \Bbbk \arrow[dr, "0"] & \\ \Bbbk \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[loop right, "0"] \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$E(3):\quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ \Bbbk \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "1"'] & & 0 \arrow[loop right, "0"] \\ & \Bbbk \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}, \qquad E(4) = S(4):\quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ \Bbbk \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[loop right, "0"] \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Capítulo 4

Dimensiones homológicas

4.1 Dimensiones homológicas en R-Mod

4.1.1 Dimensión proyectiva e inyectiva

Recordemos que si R es un anillo y M un R-módulo, siempre es posible encontrar una resolución proyectiva de M. En el caso en que la resolución sea finita, es decir, de la forma

$$\mathbb{P} : 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

diremos que la resolución es de largo n y lo notamos $\operatorname{length} \mathbb{P} = n$; si es infinita diremos que tiene largo infinito, y notamos $\operatorname{length} \mathbb{P} = \infty$.

De manera análoga hablaremos del largo de una resolución inyectiva de M.

Definición 4.1.1. Si R es un anillo y $M \in$ R-Mod, definimos la dimensión proyectiva de M como

$$\operatorname{l.pd}_R M = \inf\{\operatorname{length} \mathbb{P} : \mathbb{P} \text{ es una resolución proyectiva de } M\}$$

y la dimensión inyectiva de M como

$$\operatorname{l.id}_R M = \inf\{\operatorname{length} \mathbb{E} : \mathbb{E} \text{ es una resolución inyectiva de } M\}$$

donde las resoluciones son tomadas en R-Mod, claramente.

De manera similar tenemos las versiones a derecha, es decir, si $M \in$ Mod-R se definen

$$\operatorname{r.pd}_R M = \inf\{\operatorname{length} \mathbb{P} : \mathbb{P} \text{ es una resolución proyectiva de } M\}$$

$$\operatorname{r.id}_R M = \inf\{\operatorname{length} \mathbb{E} : \mathbb{E} \text{ es una resolución inyectiva de } M\}$$

donde las resoluciones son tomadas en Mod-R.

En algunas ocasiones denotaremos a la dimensión proyectiva de $M \in$ R-Mod simplemente por $\operatorname{l.pd} M$, o incluso $\operatorname{pd} M$ cuando no hay lugar a confusión respecto al contexto en el que estamos trabajando. Haremos lo mismo con la dimensión inyectiva de M.

Observar que en cierto sentido las dimensiones proyectiva e inyectiva de un módulo miden qué tan lejos está el módulo de ser proyectivo o inyectivo, respectivamente. De acuerdo con esta idea, tenemos la siguiente observación trivial.

Observación 4.1.2. Si $M \in$ R-Mod, entonces $\operatorname{pd} M = 0$ si y solo si M es proyectivo. De la misma manera, $\operatorname{id} M = 0$ si y solo si M es inyectivo.

Recordemos (definición 1.3.27) que dada una resolución proyectiva de M

$$\mathbb{P} : 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

se define la enésima sizigia como $\Omega^n \mathbb{P} = \ker d_{n-1}$.

Es claro que las sizigias no solo dependen de M sino también de la resolución proyectiva elegida. Sin embargo, es posible probar (mediante una sencilla generalización del lema de Schanuel, [Rot09, prop. 3.12]) que dadas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}'$ dos resoluciones proyectivas de M y $n \in \mathbb{N}$, $\Omega^n \mathbb{P}$ y $\Omega^n \mathbb{P}'$ son proyectivamente equivalentes, es decir, existen proyectivos Q_1 y Q_2 tales que $\Omega^n \mathbb{P} \oplus Q_1 \simeq \Omega^n \mathbb{P}' \oplus Q_2$.

Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 4.1.3. *Sea $M \in$ R-Mod y $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}'$ dos resoluciones proyectivas de M.*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $N \in$ R-Mod tenemos $\operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P}, N) \simeq \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P}', N)$.*
2. *Para cada $n \geq 1$ y cada $N \in$ R-Mod tenemos $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(M, N) \simeq \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P}, N)$.*

Demostración.

1. Como $\Omega^n \mathbb{P}$ y $\Omega^n \mathbb{P}'$ son proyectivamente equivalentes, existen proyectivos Q_1 y Q_2 tales que $\Omega^n \mathbb{P} \oplus Q_1 \simeq \Omega^n \mathbb{P}' \oplus Q_2$. Tenemos luego que

$$\operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P} \oplus Q_1, N) \simeq \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P}, N) \oplus \operatorname{Ext}^1_R(Q_1, N) \simeq \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P}, N)$$

recordando que $\operatorname{Ext}^1_R(Q_1, -) = 0$ por ser Q_1 proyectivo, y por lo tanto

$$\operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P}, N) \simeq \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P} \oplus Q_1, N) \simeq \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P}' \oplus Q_2, N) \simeq \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^n \mathbb{P}', N)$$

2. Esto es inmediato si recordamos que el cálculo de Ext^i_R es independiente de la elección en las resoluciones, y observamos que la resolución proyectiva de M

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & \Omega^n \mathbb{P} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

da lugar a una resolución proyectiva de $\Omega^n \mathbb{P}$

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \Omega^n \mathbb{P} \longrightarrow 0$$

□

Mostramos ahora una caracterización de la dimensión proyectiva de un módulo M mediante los functores $\operatorname{Ext}^i_R(M, -)$: generalizando el hecho de que $\operatorname{pd} M = 0$ si y solo si M es proyectivo, y que esto sucede a su vez si y solo si $\operatorname{Ext}^1_R(M, -) = 0$, veremos que $\operatorname{pd} M \leq n$ si y solo si $\operatorname{Ext}^{n+1}_R(M, -) = 0$. Además, veremos qué sucede con las sizigias de las resoluciones proyectivas de un módulo con dimensión proyectiva finita.

Proposición 4.1.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $M \in$ R-Mod.*

1. $\operatorname{pd} M \leq n$,
2. $\operatorname{Ext}_R^k(M,N) = 0$ *para todo* $N \in$ R-Mod *y todo* $k \geq n+1$,
3. $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M,N) = 0$ *para todo* $N \in$ R-Mod,
4. *toda resolución proyectiva de M tiene su enésima sizigia proyectiva,*
5. *existe una resolución proyectiva de M cuya enésima sizigia es proyectiva.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Si $\operatorname{pd} M \leq n$ existe una resolución proyectiva de M

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $P_k = 0$ para todo $k \geq n+1$. Por lo tanto, los mapas $d_k^* : \operatorname{Hom}_R(P_{k-1}, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P_k, N)$ son el mapa nulo para todo $k \geq n+1$, lo que implica que $\operatorname{Ext}_R^k(M,N) = 0$ para todo $k \geq n+1$.

$(2 \Rightarrow 3)$. Es obvio.

$(3 \Rightarrow 4)$. Supongamos que $\mathbb{P}$ es una resolución proyectiva de M, y consideremos su enésima sizigia $\Omega^n\mathbb{P}$. Por la proposición anterior sabemos que $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M,N) \simeq \operatorname{Ext}_R^1(\Omega^n\mathbb{P}, N)$. Empleando la hipótesis obtenemos que $\operatorname{Ext}_R^1(\Omega^n\mathbb{P}, N) = 0$ para todo $N \in$ R-Mod, es decir, que $\Omega^n\mathbb{P}$ es proyectivo.

$(4 \Rightarrow 5)$. Es obvio.

$(5 \Rightarrow 1)$. Consideremos una resolución proyectiva de M

$$\mathbb{P} : \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tal que $\Omega^n\mathbb{P}$ es proyectivo. Tenemos entonces que

$$0 \longrightarrow \Omega^n\mathbb{P} \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de M (la sucesión es exacta por construcción) que tiene largo n, por lo que $\operatorname{pd} M \leq n$.

□

Corolario 4.1.5. *Si* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta en* R-Mod *tal que M es proyectivo y M'' no lo es, entonces* $\operatorname{pd} M'' = 1 + \operatorname{pd} M'$.

Demostración. Si fijamos $N \in$ R-Mod, sabemos por el teorema 1.4.3 que existe para cada $n \in \mathbb{N}$ un morfismo δ_n que hace que la siguiente sucesión sea exacta

$$\operatorname{Ext}_R^n(M,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^n(M',N) \xrightarrow{\delta_n} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M'',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M,N)$$

Pero M es proyectivo, por lo que $\operatorname{Ext}_R^n(M,N) = 0$ para todo $N \in$ R-Mod y todo $n \geq 1$ y luego es

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^n(M',N) \xrightarrow{\delta_n} \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M'',N) \longrightarrow 0$$

Esto implica que δ_n es un isomorfismo, por lo que $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M'',N) \simeq \operatorname{Ext}_R^n(M',N)$, y esto es cierto para todo $N \in$ R-Mod. Como además M'' no es proyectivo sabemos que $\operatorname{Ext}_R^1(M'',-) \neq 0$, por lo que el nivel a partir del cual se hará nulo el functor $\operatorname{Ext}_R^n(M'',-)$ será, debido al isomorfismo, precisamente cuando se anule el functor $\operatorname{Ext}_R^{n-1}(M',-)$. Aplicando la proposición anterior concluimos que $\operatorname{pd} M'' = 1 + \operatorname{pd} M'$.

□

Como de costumbre, las proposiciones anteriores tienen su versión para módulos inyectivos, obteniéndose los siguientes resultados.

Proposición 4.1.6. *Sea $N \in$ R-Mod y $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ dos resoluciones inyectivas de N.*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $M \in$ R-Mod tenemos $\mathrm{Ext}^1_R(M, \Omega^{-n}\mathbb{E}) \simeq \mathrm{Ext}^1_R(M, \Omega^{-n}\mathbb{E}')$.*
2. *Para cada $n \geq 1$ y cada $M \in$ R-Mod tenemos $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) \simeq \mathrm{Ext}^1_R(M, \Omega^{-n}\mathbb{E})$.*

Proposición 4.1.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $N \in$ R-Mod.*

1. $\mathrm{id}\, N \leq n$,
2. $\mathrm{Ext}^k_R(M, N) = 0$ *para todo $M \in$ R-Mod y todo $k \geq n+1$,*
3. $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, N) = 0$ *para todo $M \in$ R-Mod,*
4. *toda resolución inyectiva de N tiene su enésima cosizigia inyectiva,*
5. *existe una resolución inyectiva de N cuya enésima cosizigia es inyectiva.*

Además de esto, el criterio de Baer (1.3.23) nos permite probar el siguiente resultado.

Proposición 4.1.8. *Un módulo $M \in$ R-Mod es inyectivo si y solo si $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, M) = 0$ para todo ideal $I \subset R$.*

Demostración. Si M es inyectivo, sabemos que $\mathrm{Ext}^1_R(N, M) = 0$ para todo $N \in$ R-Mod, por lo que en particular es cierto nuestro enunciado.

Recíprocamente, consideremos $I \subset R$ un ideal, y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \hookrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

la cual da lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/I, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R/I, M) = 0$$

Esto quiere decir que el functor $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ es exacto cuando lo restringimos a las sucesiones exactas del tipo

$$0 \longrightarrow I \hookrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

lo cual implica por el criterio de Baer que M es inyectivo.

□

4.1.2 La ϕ-dimensión de un módulo

Introducimos ahora una nueva dimensión homológica: la ϕ-dimensión, propuesta por K. Igusa y G. Todorov en [IT05].

Si A es un álgebra de Artin, definimos $K(A)$ como el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo $\{[M] : M \in \text{A-mod}\}$ módulo las siguientes relaciones:

- $[N] - [S] - [T]$ si $N \simeq S \oplus T$,

- $[P]$ si P es proyectivo.

Es decir, $K(A)$ es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de A-módulos finitamente generados, indescomponibles y no proyectivos.

Si consideramos $[M] \in K(A)$ y $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ resoluciones proyectivas de M con términos finitamente generados, sabemos que existen proyectivos finitamente generados Q_1 y Q_2 tales que $\Omega^n\mathbb{P} \oplus Q_1 \simeq \Omega^n\mathbb{P}' \oplus Q_2$. Por lo tanto al tomar las clases en $K(A)$ obtenemos

$$[\Omega^n\mathbb{P}] = [\Omega^n\mathbb{P}] + [Q_1] = [\Omega^n\mathbb{P} \oplus Q_1] = [\Omega^n\mathbb{P}' \oplus Q_2] = [\Omega^n\mathbb{P}'] + [Q_2] = [\Omega^n\mathbb{P}']$$

de lo que concluimos que en este contexto las sizigias ya no dependen de la resolución proyectiva elegida, sino únicamente del módulo M. Podemos definir entonces un morfismo de grupos $\Omega : K(A) \longrightarrow K(A)$ dado por $\Omega([M]) = [\Omega M]$, pues Ω respeta las sumas directas y anula los proyectivos.

Denotemos por $[\operatorname{add} M]$ al subgrupo de $K(A)$ generado por los sumandos directos indescomponibles no proyectivos de M (recordar que debido al teorema de Krull-Schmidt, M se descompone en suma directa de finitos submódulos indescomponibles, y que dicha descomposición es única a menos de isomorfismo). Luego, si $[\operatorname{add} M] = \langle [M_1], \ldots, [M_n] \rangle$ tenemos que

$$\Omega([\operatorname{add} M]) = \langle \Omega([M_1]), \ldots, \Omega([M_n]) \rangle = \langle [\Omega M_1], \ldots, [\Omega M_n] \rangle$$

y por lo tanto el rango de $\Omega([\operatorname{add} M])$ será menor o igual al rango de $[\operatorname{add} M]$, que es finito.

Debe existir entonces $n \in \mathbb{N}$ el menor número natural tal que $\Omega : \Omega^m([\operatorname{add} M]) \longrightarrow \Omega^{m+1}([\operatorname{add} M])$ es un isomorfismo para todo $m \geq n$; es decir, si aplicamos sucesivamente el morfismo Ω, entonces el paso n es el primero a partir del cual el rango se mantiene estable.

Definición 4.1.9. Si A es un álgebra de Artin y $M \in$ A-mod, definimos $\phi(M) \in \mathbb{N}$ como el menor número natural tal que $\Omega : \Omega^n([\operatorname{add} M]) \longrightarrow \Omega^{n+1}([\operatorname{add} M])$ es un isomorfismo para todo $n \geq \phi(M)$.

Observación 4.1.10. Es sencillo ver que $[\Omega(\Omega M)] = [\Omega^2 M]$; por lo tanto,

$$\Omega^2([M]) = \Omega(\Omega([M])) = \Omega([\Omega M]) = [\Omega^2 M]$$

Más en general, tenemos que $\Omega^n([M]) = [\Omega^n M]$.

Veamos algunas propiedades de la función ϕ para ejemplificar su comportamiento. Algunas de estas propiedades pueden deducirse inmediatamente a partir de la definición, mientras que otras aparecen en [IT05], y la propiedad 6 puede verse en [HLM08].

Proposición 4.1.11. *Sea A un álgebra de Artin y $M, N \in$ A-mod. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* $\operatorname{pd} M < \infty$ *entonces* $\phi(M) = \operatorname{pd} M$.
2. *Si* $[\operatorname{add} M] = [\operatorname{add} N]$ *entonces* $\phi(M) = \phi(N)$.
3. $\phi(M) = \phi(M \oplus P)$ *para todo* $P \in$ A-mod *proyectivo.*
4. *Si M es indescomponible y* $\operatorname{pd} M = \infty$, *entonces* $\phi(M) = 0$.
5. $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$.

6. $\phi(M) \leq \phi(\Omega M) + 1$.

Demostración. 1. Supongamos que $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i^{\alpha_i}$ donde cada M_i es indescomponible, $M_i \neq M_j$ si $i \neq j$, y que $\operatorname{pd} M = k$. Esto implica que $\sup\{\operatorname{pd} M_i\} = k$, por lo que existe i_0 tal que $\operatorname{pd} M_{i_0} = k$.

Ahora, como $\operatorname{pd} M_i \leq k$ para todo i, por la proposición 4.1.4 sabemos que $\Omega^k M_i$ es proyectivo, por lo que $[\Omega^k M_i] = 0$ para todo i y luego $\phi(M) \leq k$.

Por otro lado, como $\operatorname{pd} M_{i_0} = k$ sabemos que k es el primer natural tal que $\Omega^k M_{i_0}$ es proyectivo, y por lo tanto $[\Omega^{k-1} M_{i_0}] \neq 0$ por lo que $\Omega^{k-1}([\operatorname{add} M])$ tendrá rango al menos uno. Esto implica que $\Omega : \Omega^{k-1}([\operatorname{add} M]) \to \Omega^k([\operatorname{add} M]) = 0$ no puede ser un isomorfismo, de lo que se concluye que $\phi(M) = k$.

2. Es evidente a partir de la definición de la función ϕ, pues esta depende de $[\operatorname{add} M]$ y no del módulo M.

3. Esto se deduce del item anterior, pues $[\operatorname{add} M] = [\operatorname{add} M \oplus P]$:

   Por la unicidad en las descomposiciones, es equivalente descomponer $M \oplus P$ en suma de submódulos indescomponibles, que descomponer M y P y luego sumar las descomposiciones. Si $P = \oplus P_i$, entonces cada P_i es proyectivo (por ser sumando directo de un proyectivo) por lo que $[P_i] = 0$.

4. Como M es indescomponible, $[\operatorname{add} M] = \langle [M] \rangle$ y entonces $\Omega^n([\operatorname{add} M])$ tiene rango cero o uno. Sin embargo, si en algun momento fuese $[\Omega^n M] = 0$ entonces tendríamos que $\Omega^n M$ es proyectivo, por lo que $\operatorname{pd} M \leq n$ llegando así a un absurdo.

5. Es claro que $[\operatorname{add} M]$ es un subgrupo de $[\operatorname{add} M \oplus N]$, y que esto implica que $\Omega^n([\operatorname{add} M])$ es un subgrupo de $\Omega^n([\operatorname{add} M \oplus N])$; por lo tanto, si $\Omega : \Omega^n([\operatorname{add} M \oplus N]) \to \Omega^{n+1}([\operatorname{add} M \oplus N])$ es un isomorfismo, también lo será su restricción $\Omega : \Omega^n([\operatorname{add} M]) \to \Omega^{n+1}([\operatorname{add} M])$.

6. Supongamos que $\phi(\Omega M) = n$, es decir, que n es el primer natural a partir del cual el morfismo $\Omega : \Omega^n([\operatorname{add} \Omega M]) \to \Omega^{n+1}([\operatorname{add} \Omega M])$ es biyectivo.

   Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i^{\alpha_i}$ una descomposición en submódulos indescomponibles. Tenemos entonces que $\Omega M = \bigoplus_{i=1}^{n} (\Omega M_i)^{\alpha_i}$, donde estos sumandos no necesariamente son indescomponibles.

   Esto nos dice que $\Omega([\operatorname{add} M])$ es un subgrupo de $[\operatorname{add} \Omega M]$, de lo que se puede deducir que en general $\Omega^k(\Omega([\operatorname{add} M]))$ es un subgrupo de $\Omega^k([\operatorname{add} \Omega M])$. Luego si $\Omega : \Omega^k([\operatorname{add} \Omega M]) \to \Omega^{k+1}([\operatorname{add} \Omega M])$ es un isomorfismo, también lo será su restricción $\Omega : \Omega^k(\Omega([\operatorname{add} M])) \to \Omega^{k+1}(\Omega([\operatorname{add} M]))$.

   Como $\Omega^k(\Omega([\operatorname{add} M])) = \Omega^{k+1}([\operatorname{add} M])$ y $\phi(\Omega M) = n$, tenemos que $\Omega : \Omega^{k+1}([\operatorname{add} M]) \to \Omega^{k+2}([\operatorname{add} M])$ es un isomorfismo para todo $k \geq n$, es decir, que $\phi(M) \leq n + 1$.

$\square$

Las propiedades anteriores muestran que la ϕ dimensión de un módulo es un buen refinamiento de la dimensión proyectiva. En efecto, en el caso en que la dimensión proyectiva de un módulo es finita estas dos dimensiones coinciden, y además la ϕ dimensión tiene la ventaja de ser siempre un número finito. Ilustramos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.12. Consideremos la $\Bbbk$-álgebra $A = \Bbbk Q/I$ definida por el quiver

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

donde $I = R_Q^2$.

En este caso sabemos que los A-módulos a izquierda proyectivos indescomponibles son

$$\begin{tikzcd} P_1 : \Bbbk \arrow[r, "1"] & \Bbbk \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_2 : 0 \arrow[r, "0"] & \Bbbk \arrow[r, "1"] & \Bbbk \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_3 : 0 \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & \Bbbk^2 \arrow[loop right, "\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]"] \end{tikzcd}$$

por lo que al cubrir los módulos simples S_1 y S_3 obtenemos las resoluciones

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \ldots \arrow[r] & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0 \\ & & S_3 \arrow[ur] & & S_3 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \ldots \arrow[r] & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[r] & S_3 \arrow[r] & 0 \\ & & S_3 \arrow[ur] & & S_3 \arrow[ur] & & S_3 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Consideremos entonces el A-módulo $M = S_1 \oplus S_3$. Como hemos visto, $\operatorname{pd} S_1 = \operatorname{pd} S_2 = \infty$, por lo que $\operatorname{pd} M = \infty$. Ahora, S_1 y S_3 son módulos indescomponibles (por ser simples) y no proyectivos, por lo que $[\operatorname{add} M] = \langle [S_1], [S_3] \rangle$. Si aplicamos el operador Ω, obtenemos

$$\langle [S_1], [S_3] \rangle \xrightarrow{\Omega} \langle [S_2], [S_3] \rangle \xrightarrow{\Omega} \langle [S_3], [S_3] \rangle = \langle [S_3] \rangle \xrightarrow{\Omega} \langle [S_3] \rangle \longrightarrow \ldots$$

de lo que concluimos que $\phi(M) = 2$.

Tal como hicieramos en las proposiciones 4.1.4 y 4.1.7, mostraremos a continuación que también es posible caracterizar la ϕ dimensión de un módulo mediante los bifunctores Ext_A^i. Esta caracterización, tomada de [FLM14], no será tan simple como la que involucra las dimensiones proyectiva e inyectiva; como veremos, requiere de un mayor trabajo y de herramientas no tan elementales.

En adelante notaremos por $\mathcal{C}_A$ a la categoría abeliana de los R-functores F : A-mod $\to$ R-mod (ver [Par70, prop. 1, sección 4.7]), $\underline{\mathcal{C}}_A$ a la categoría abeliana de los R-functores F : A-$\underline{\text{mod}}$ $\to$ R-mod, y $\overline{\mathcal{C}}_A$ a la categoría abeliana de los R-functores F : A-$\overline{\text{mod}}$ $\to$ R-mod.

Teorema 4.1.13. *Sea A un álgebra de Artin sobre R, y $M, N \in$* A-mod*. En esta situación, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathrm{Ext}^1_A(M,-) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(N,-)$ *en* $\mathcal{C}_A$*,*

2. $M \oplus P(N) \simeq N \oplus P(M)$ *en* A-mod*,*

3. $M \simeq N$ *en* A-$\underline{\text{mod}}$*,*

4. $[M] = [N]$ *en* $K(A)$*.*

Demostración. Es inmediato a partir de las definiciones que $(2 \Rightarrow 4)$ y $(4 \Rightarrow 3)$.

$(1 \Leftrightarrow 3)$. Sabemos que $\mathrm{Ext}^1_A(M,-) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(N,-)$ en $\mathcal{C}_A$ si y solo si, utilizando la fórmula de Auslander Reiten, los functores $D\overline{\mathrm{Hom}}_A(-,\tau M)$ y $D\overline{\mathrm{Hom}}_A(-,\tau N)$ son isomorfos en $\overline{\mathcal{C}}_A$. Más aún, esto último sucede si y solo si los functores $\underline{\mathrm{Hom}}_A(-,M)$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_A(-,N)$ son isomorfos en $\underline{\mathcal{C}}_A$, pues la traslación de Auslander-Reiten τ : A-$\underline{\text{mod}} \to$ A-$\overline{\text{mod}}$ es una R-equivalencia de categorías. Finalmente, el hecho de que $\underline{\mathrm{Hom}}_A(-,M) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_A(-,N)$ en $\underline{\mathcal{C}}_A$ es equivalente por el lema de Yoneda a la existencia de un isomorfismo $M \simeq N$ en A-$\underline{\text{mod}}$.

$(3 \Rightarrow 4)$. Supongamos que $M \simeq N$ en A-$\underline{\text{mod}}$; recordando la observación 2.2.2 podemos considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & P(N) \arrow[dr, "\pi_N"] & \\
M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "j_M"'] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, "j_N"] & M \arrow[r, "\alpha"] & N \\
 & P(M) \arrow[ur, "\pi_M"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{id}_M - \beta\alpha = \pi_M j_M$ y $\mathrm{id}_N - \alpha\beta = \pi_N j_N$. Como además π_M y π_N son epimorfismos y $P(M)$, $P(N)$ proyectivos, de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & P(N) \arrow[dl, dashed, "f_N"'] \arrow[d, "\beta\pi_N"] & \\
P(M) \arrow[r, "\pi_M"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & P(M) \arrow[dl, dashed, "f_M"'] \arrow[d, "\alpha\pi_M"] & \\
P(N) \arrow[r, "\pi_N"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

concluimos que existen morfismos f_M, f_N que cumplen $\pi_M f_N = \beta\pi_N$ y $\pi_N f_M = \alpha\pi_M$. Podemos considerar entonces los morfismos

$$M \oplus P(N) \xrightarrow{F} N \oplus P(M) \xrightarrow{G} M \oplus P(N)$$

dados por $F = \begin{pmatrix} \alpha & \pi_N \\ j_M & -f_N \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} \beta & \pi_M \\ j_N & -f_M \end{pmatrix}$. Para probar lo que buscamos, basta ver que FG y GF son isomorfismos.

Probemos entonces que FG es un isomorfismo; la prueba para GF es análoga. Si definimos el morfismo $\mu = j_M\pi_M + f_N f_M \in \mathrm{End}_A(P(M))$, entonces

$$FG = \begin{pmatrix} \alpha & \pi_N \\ j_M & -f_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \pi_M \\ j_N & -f_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta + \pi_N j_N & \alpha\pi_M - \pi_N f_M \\ j_M\beta - f_N j_N & j_M\pi_M + f_N f_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_N & 0 \\ j_M\beta - f_N j_N & \mu \end{pmatrix}$$

Luego, para probar que FG es un isomorfismo alcanza con probar que $\pi_M\mu = \pi_M$, pues si esto sucede entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P(M) \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[d, "\pi_M"] & \\
P(M) \arrow[r, "\pi_M"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta, y por ser $\pi_M : P(M) \to M$ la cubierta proyectiva de M se concluye que μ debe ser un automorfismo. Sin embargo es fácil ver que esto es cierto a partir de la construcción de nuestras funciones, pues

$$\begin{aligned}
\pi_M \mu &= \pi_M j_M \pi_M + \pi_M f_N f_M \\
&= \pi_M j_M \pi_M + \beta \pi_N f_M \\
&= \pi_M j_M \pi_M + \beta \alpha \pi_M \\
&= (\pi_M j_M + \beta \alpha) \pi_M \\
&= \mathrm{id}_M \pi_M \\
&= \pi_M
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.1.14. *Sea A un álgebra de Artin sobre R, y $M, N \in$ A-mod. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $[\Omega^n M] = [\Omega^n N]$ *en $K(A)$,*
2. $\mathrm{Ext}_A^i(M, -) \simeq \mathrm{Ext}_A^i(N, -)$ *en $\mathcal{C}_A$ para todo $i \geq n+1$,*
3. $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, -) \simeq \mathrm{Ext}_A^{n+1}(N, -)$ *en $\mathcal{C}_A$.*

Demostración. La prueba de $(2 \Leftrightarrow 3)$ se encuentra comprendida en la proposición 4.1.4.

$(1 \Leftrightarrow 3)$. Recordemos que el functor $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, -)$ es isomorfo en $\mathcal{C}_A$ al functor $\mathrm{Ext}_A^1(\Omega^n M, -)$. Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, -)$ es isomorfo a $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(N, -)$ en $\mathcal{C}_A$ si y solo si $\mathrm{Ext}_A^1(\Omega^n M, -)$ es isomorfo en $\mathcal{C}_A$ a $\mathrm{Ext}_A^1(\Omega^n N, -)$, y por el teorema anterior esto sucede si y solo si $[\Omega^n M] = [\Omega^n N]$ en $K(A)$.

□

Definimos ahora un concepto central en la caracterización de la ϕ dimensión de un módulo mediante los bifunctores Ext_A^i.

Definición 4.1.15. Sea A un álgebra de Artin sobre R, d un entero positivo y $M \in$ A-mod. Decimos que un par (X, Y) de objetos en $\operatorname{add} M$ es una d-división de M si se verifican las siguientes condiciones:

- $\operatorname{add} X \cap \operatorname{add} Y = 0$,
- $\mathrm{Ext}_A^d(X, -) \not\simeq \mathrm{Ext}_A^d(Y, -)$ en $\mathcal{C}_A$,
- $\mathrm{Ext}_A^{d+1}(X, -) \simeq \mathrm{Ext}_A^{d+1}(Y, -)$ en $\mathcal{C}_A$.

Proposición 4.1.16. *Si $M \in$ A-mod, se cumple que $\phi(M) = 0$ si y solo si para todo par (X, Y) de objetos en $\operatorname{add} M$ tales que al menos uno de ellos no es proyectivo y con $\operatorname{add} X \cap \operatorname{add} Y = 0$, tenemos que $\mathrm{Ext}_A^d(X, -) \not\simeq \mathrm{Ext}_A^d(Y, -)$ en $\mathcal{C}_A$ para todo $d \geq 1$.*

En este caso, el conjunto $\{d \in \mathbb{N} :$ existe una d-división de $M\}$ es vacío.

Demostración. Para comenzar, descompongamos a M en submódulos indescomponibles como $M = \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{m_i}$.

Supongamos que existe un par de objetos (X, Y) que cumple las condiciones, con $X = \bigoplus_{i \in I} M_i^{m_i}$ e $Y = \bigoplus_{j \in J} M_j^{m_j}$ donde I y J son disjuntos, pero tal que $\mathrm{Ext}_A^d(X, -) \simeq \mathrm{Ext}_A^d(Y, -)$ para algún $d \geq 1$. Entonces el corolario anterior nos asegura que

$$[\Omega^{d-1} X] = [\Omega^{d-1} Y]$$

es decir, que

$$\sum_{i \in I} m_i [\Omega^{d-1} M_i] = \sum_{j \in J} m_j [\Omega^{d-1} M_j]$$

Tenemos entonces una combinación lineal no trivial en el nivel $d-1$, por lo cual el rango de $\Omega^n([\mathrm{add}\, M])$ debe descender al menos una vez antes de llegar al nivel d. Sin embargo esto es absurdo, pues la hipótesis $\phi(M) = 0$ implica que este rango se mantiene constante en todo momento.

Para probar el recíproco, supongamos que $\phi(M) = k > 0$. Esto implica que existe una combinación lineal no trivial en el nivel k (pues hay un descenso en el rango), es decir, que existen I, J disjuntos y coeficientes m_i, m_j con $i \in I,\ j \in J$ no todos nulos tales que

$$\sum_{i \in I} m_i [\Omega^k M_i] = \sum_{j \in J} m_j [\Omega^k M_j]$$

Esto quiere decir que tenemos la igualdad

$$[\Omega^k \bigoplus_{i \in I} M_i^{m_i}] = [\Omega^k \bigoplus_{j \in J} M_j^{m_j}]$$

Si llamamos ahora $X = \bigoplus_{i \in I} M_i^{m_i}$ e $Y = \bigoplus_{j \in J} M_j^{m_j}$, el corolario anterior nos asegura que

$$\mathrm{Ext}_A^{k+1}(X, -) \simeq \mathrm{Ext}_A^{k+1}(Y, -)$$

Pero esto es absurdo, ya que X e Y son objetos en $\mathrm{add}\, M$, no son ambos proyectivos (pues la combinación lineal era no trivial en $K(A)$) y además $\mathrm{add}\, X \cap \mathrm{add}\, Y = 0$, ya que I y J son disjuntos.

□

Veamos finalmente cómo se caracteriza $\phi(M)$ en término de los bifunctores Ext_A^i.

Teorema 4.1.17. *Sea A un álgebra de Artin sobre R, y $M \in$ A-mod. Entonces*

$$\phi(M) = \text{máx}\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe una } d\text{-división de } M\} \cup \{0\}$$

Demostración. Supongamos que $\phi(M) = n > 0$ y que $M = \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{m_i}$ es una descomposición de M en submódulos indescomponibles. Como n es el primer momento a partir del cual el rango de cada grupo abeliano $\{\Omega^j([\mathrm{add}\, M]) : j \in \mathbb{N}\}$ se mantiene constante, es decir,

$$\phi(M) = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : \mathrm{rk}\, \Omega^j([\mathrm{add}\, M]) = \mathrm{rk}\, \Omega^m([\mathrm{add}\, M]) \text{ para todo } j \geq m\}$$

deben existir naturales no todos nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ y una partición $\{1, 2, \ldots, t\} = I \uplus J$ de manera que

$$\sum_{i \in I} \alpha_i [\Omega^n M_i] = \sum_{j \in J} \alpha_j [\Omega^n M_j]$$

y sin embargo

$$\sum_{i \in I} \alpha_i [\Omega^{n-1} M_i] \neq \sum_{j \in J} \alpha_j [\Omega^{n-1} M_j]$$

(esto se debe a que el rango en el paso n debe bajar al menos en una unidad, por lo que es posible encontrar una combinación lineal en los $[\Omega^n M_i]$ que no estuviese presente en los $[\Omega^{n-1} M_i]$).

Luego por el corolario 4.1.14 tenemos que el par (X, Y) es una n-división de M, donde $X = \bigoplus_{i \in I} M_i^{m_i}$ e $Y = \bigoplus_{j \in J} M_j^{m_j}$, por lo que

$$\phi(M) \leq \max\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe una } d\text{-división de } M\} \cup \{0\}$$

La otra desigualdad es inmediata, pues a partir del paso n tenemos que $\Omega^k([\operatorname{add} M]) \simeq \Omega^{k+1}([\operatorname{add} M])$, por lo que no es posible que exista un par (X, Y) de objetos en $\operatorname{add} M$ tales que $[\Omega^k X] \not\simeq [\Omega^k Y]$ en $K(A)$ pero $[\Omega^{k+1} X] \simeq [\Omega^{k+1} Y]$.

□

4.2 Dimensiones homológicas de un anillo

4.2.1 Dimensión global y finitista

Usando las nociones de dimensión proyectiva e inyectiva de un módulo, definimos algunas dimensiones homológicas en el anillo.

Definición 4.2.1. Si R es un anillo, definimos la dimensión global a izquierda de R como

$$\operatorname{l.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{l.pd}_R M : M \in \text{R-Mod}\}$$

y la dimensión global a derecha de R como

$$\operatorname{r.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{r.pd}_R M : M \in \text{Mod-R}\}$$

De manera similar, definimos la dimensión global inyectiva a izquierda de R como

$$\operatorname{l.inj.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{l.id}_R M : M \in \text{R-Mod}\}$$

y la dimensión global inyectiva a derecha de R como

$$\operatorname{r.inj.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{r.id}_R M : M \in \text{Mod-R}\}$$

Gracias a las caracterizaciones que hemos visto de la dimensión proyectiva e inyectiva de un módulo en las proposiciones 4.1.4 y 4.1.7, es sencillo mostrar que la dimensión global de un anillo está caracterizada por los bifunctores Ext_R^i.

Teorema 4.2.2. *Si R es un anillo, entonces $\operatorname{l.gl.dim} R \leq n$ si y solo si $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$ para todo $M, N \in$ R-Mod.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\operatorname{l.gl.dim} R \leq n &\iff \text{Para todo } M \in \text{R-Mod es } \operatorname{pd} M \leq n \\
&\iff \text{Para todo } M \in \text{R-Mod es } \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0 \text{ para todo } N \in \text{R-Mod} \\
&\iff \text{Para todo } M, N \in \text{R-Mod es } \operatorname{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0
\end{aligned}$$

□

De igual manera, podemos ver que $\operatorname{l.inj.gl.dim} R \leq n$ si y solo si $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(M,N) = 0$ para todo $M, N \in$ R-Mod.

Corolario 4.2.3. *Si R es un anillo, entonces* $\operatorname{l.gl.dim} R = \operatorname{l.inj.gl.dim} R$.

Análogamente, $\operatorname{r.gl.dim} R = \operatorname{r.inj.gl.dim} R$.

Definición 4.2.4. Si R es un anillo, definimos la dimensión finitista a izquierda de R como

$$\operatorname{l.fin.dim} R = \sup\{\operatorname{l.pd}_R M : M \in \text{R-mod} \ \text{ y } \ \operatorname{l.pd}_R M < \infty\}$$

y la dimensión finitista a derecha de R como

$$\operatorname{r.fin.dim} R = \sup\{\operatorname{r.pd}_R M : M \in \text{mod-R} \ \text{ y } \ \operatorname{r.pd}_R M < \infty\}$$

De manera similar, definimos la dimensión finitista inyectiva a izquierda de R como

$$\operatorname{l.inj.fin.dim} R = \sup\{\operatorname{l.id}_R M : M \in \text{R-mod} \ \text{ y } \ \operatorname{l.id}_R M < \infty\}$$

y la dimensión finitista inyectiva a derecha de R como

$$\operatorname{r.inj.fin.dim} R = \sup\{\operatorname{r.id}_R M : M \in \text{mod-R} \ \text{ y } \ \operatorname{r.id}_R M < \infty\}$$

La dimensión finitista ha atraído fuertemente la atención en las últimas décadas principalmente debido a la llamada conjetura finitista, propuesta por H. Bass en 1960 en [Bas60]. En ella, Bass sostiene que la dimensión finitista de un álgebra de Artin debe ser finita. Varias herramientas se han desarrollado con el objetivo de esclarecer esta conjetura; entre ellas se encuentra la función ϕ definida por K. Igusa y G. Todorov presentada en la sección anterior y con la que continuaremos trabajando.

4.2.2 La ϕ-dimensión de un álgebra

Definición 4.2.5. Si A es un álgebra de Artin, definimos su ϕ dimensión a izquierda como

$$\operatorname{l.}\phi\dim A = \sup\{\phi(M) : M \in \text{A-mod}\}$$

y su ϕ dimensión a derecha como

$$\operatorname{r.}\phi\dim A = \sup\{\phi(M) : M \in \text{mod-A}\}$$

Observar que gracias a la caracterización de la ϕ dimensión de un módulo mostrada en 4.1.17, podemos definir la ϕ dimensión del álgebra de manera alternativa como

$$\operatorname{l.}\phi\dim A = \sup\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe } M \in \text{A-mod} \ \text{ tal que } M \text{ admite una } d \text{ división}\}$$

y de igual manera su versión a derecha será

$$\operatorname{r.}\phi\dim A = \sup\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe } M \in \text{mod-A} \ \text{ tal que } M \text{ admite una } d \text{ división}\}$$

Tal como mencionamos, la ϕ dimensión fue desarrollada en [IT05] como una herramienta que ayudaría en el trabajo acerca de la conjetura finitista de Bass. Es inmediato observar, a partir de las definiciones de las dimensiones global y finitista y del item 1 en la proposición 4.1.11, que estas dimensiones se relacionan mediante la desigualdad

$$\mathrm{l.\,fin.\,dim}\, A \leq \mathrm{l.}\,\phi \dim A \leq \mathrm{l.\,gl.\,dim}\, A$$

y de igual manera para sus versiones a derecha (veremos en breve que para calcular la dimensión global de un álgebra de Artin basta considerar A-mod en lugar de A-Mod, y por lo tanto la comparación anterior tiene sentido).

Esto implica en particular que para mostrar la conjetura finitista bastaría ver que la ϕ dimensión de toda álgebra de Artin es finita. A pesar de que este problema permanece abierto, han sido probados algunos resultados parciales en esta dirección. Por ejemplo, se sabe que esto es cierto para álgebras de radical cuadrado cero, para álgebras monomiales (mediante una adaptación del artículo *Predicting syzygies over monomial relations algebras*, B. Zimmermann Huisgen, 1991), así como para álgebras de Gorenstein (resultado que mostraremos en el siguiente capítulo), y más en general para álgebras gentiles (a partir del artículo *Gentle algebras are Gorenstein*, I. Reiten and Ch. Geiss, 2005). También es posible probar este resultado para álgebras biseriales especiales (aplicando las ideas presentes en *Generalized Igusa-Todorov function and finitistic dimension*, D. Xu, 2013).

A pesar de que su creación vino de la mano de la conjetura finitista, la ϕ dimensión ha probado ser una dimensión homológica útil de por sí. Por ejemplo, en [LH13] F. Huard y M. Lanzilotta prueban que un álgebra de Artin es autoinyectiva (es decir, A es inyectiva como A-módulo a izquierda y derecha) si y solo si $\mathrm{l.}\,\phi \dim A = \mathrm{r.}\,\phi \dim A = 0$, caracterización que no es posible realizar utilizando la dimensión global ni la dimensión finitista.

Capítulo 5

Simetría en las dimensiones homológicas

Nuestro objetivo principal será estudiar la simetría presente en las distintas dimensiones homológicas que hemos definido. Para ser más precisos, nos interesa comparar las versiones a izquierda y a derecha de cada una de estas dimensiones homológicas, con la intención de ver si dichas versiones coinciden o no en el contexto de las álgebras de Artin.

Dedicaremos la primera sección a presentar el hecho de que la dimensión global de un álgebra de Artin coincide a izquierda y a derecha, basándonos en un resultado debido a M. Auslander que prueba, más en general, que esto es cierto para cualquier anillo noetheriano.

La segunda sección será dedicada a mostrar que la dimensión finitista no presenta este comportamiento simétrico. Para esto exhibimos un contraejemplo que consiste de un álgebra de Artin definida a partir de un quiver, tomando la idea de un artículo de D. Happel.

Por otro lado, hemos visto que si A es un álgebra de Artin, entonces es válida la desigualdad

$$\operatorname{l.fin.dim} A \leq \operatorname{l.}\phi\operatorname{dim} A \leq \operatorname{l.gl.dim} A$$

así como su versión a derecha, quedando de esta forma vinculadas tres importantes dimensiones homológicas. Una vez que sabemos que la dimensión global es "simétrica" mientras que la dimensión finitista no lo es, es natural preguntarse qué comportamiento tendrá la ϕ dimensión, comprendida entre estas dos.

A pesar de que este problema continúa abierto, la tercera sección comienza con un resultado parcial en esta dirección: la ϕ dimensión es simétrica si nos restringimos al contexto de las álgebras de Gorenstein. Terminamos la sección, y nuestro trabajo, presentando una posible aproximación a este problema por medio de la caracterización de la ϕ dimensión mediante los bifunctores Ext y Tor, y haciendo uso de las identidades naturales y sus identidades derivadas presentadas en el apéndice A.

5.1 Simetría en la dimensión global

Dedicaremos esta sección a mostrar que el comportamiento de la dimensión global de un álgebra de Artin es simétrico, es decir, que la dimensión del álgebra es igual a izquierda que a derecha. Este resultado fue demostrado originalmente por M. Auslander en 1955 en [Aus55] para el contexto más general de anillos noetherianos, y será éste el resultado que presentaremos.

Mostramos primero que para calcular la dimensión global de un anillo cualquiera basta considerar su categoría de módulos finitamente generados; más aún, que basta considerar los módulos cíclicos. Para ello presentaremos la demostración original de Auslander, valiosa no solo por motivos históricos sino también por ser de carácter bastante elemental, y luego una prueba más sintética debida a E. Matlis que se puede encontrar en [Rot09], la cual engloba varios de los conceptos que hemos visto.

Teorema 5.1.1. *Si R es un anillo, entonces*

$$\begin{aligned} \operatorname{l.gl.dim} R &= \sup\{\operatorname{l.pd}_R C : C \in \text{R-Mod} \ \textit{es un módulo cíclico}\} \\ &= \sup\{\operatorname{l.pd}_R R/I : I \subset R \ \textit{es un ideal a izquierda}\} \end{aligned}$$

Demostración. Observar que la segunda igualdad es inmediata, pues R/I es un R-módulo cíclico para todo ideal I, y si $C = Rx$ es un R-módulo cíclico entonces es $C \simeq R/\operatorname{Ann}(x)$.

Por lo tanto, para concluir el teorema basta probar la primera igualdad. Para ello haremos uso de la siguiente afirmación.

Afirmación. Sea M un R-módulo a izquierda, I un conjunto no vacío bien ordenado y $(M_i)_{i\in I}$ una familia de submódulos de M tales que $M_i \subset M_j$ siempre que $i \leq j$, $i, j \in I$. Si $\bigcup_{i\in I} M_i = M$ y $\operatorname{l.pd}_R(M_i/M_{i'}) \leq n$ para todo $i \in I$, donde $M_{i'} = \bigcup_{j<i} M_j$, entonces $\operatorname{l.pd}_R M \leq n$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción en n.

Si $n = 0$ entonces se tiene $\operatorname{l.pd}_R(M_i/M_{i'}) \leq 0$, es decir, $M_i/M_{i'}$ es proyectivo para todo $i \in I$. Esto implica que cada sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M_{i'} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/M_{i'} \longrightarrow 0$$

se escinde, por lo que para cada i existe un submódulo N_i de M_i que cumple

(i) $M_i = M_{i'} \oplus N_i$,

(ii) $N_i \simeq M_i/M_{i'}$ y por lo tanto es proyectivo.

De la condición (i) y la hipótesis de que $\bigcup_{i\in I} M_i = M$ se deduce inmediatamente que $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$. Luego, como la suma directa de módulos proyectivos es un módulo proyectivo, utilizando la condición (ii) obtenemos que M es proyectivo, por lo que $\operatorname{l.pd}_R M = 0$, que es lo que buscábamos.

Supongamos ahora que el resultado es válido para $n - 1$. Sea F el R-módulo libre generado por los elementos de M, y F_i (respectivamente $F_{i'}$) el R-módulo libre generado por los elementos de M_i (respectivamente $M_{i'}$). Si consideramos $K = \ker(F \to M)$ y definimos $K_i = F_i \cap K$, $K_{i'} = F_{i'} \cap K$, es fácil ver que $K_i = \ker(F_i \to M_i)$, $K_{i'} = \ker(F_{i'} \to M_{i'})$ por lo que podemos considerar las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow K_{i'} \longrightarrow F_{i'} \longrightarrow M_{i'} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow F_i \longrightarrow M_i \longrightarrow 0$$

Además por definición es claro que $M_{i'} \subset M_i$, $F_{i'} \subset F_i$, $K_{i'} \subset K_i$, y que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_{i'} & \longrightarrow & F_{i'} & \longrightarrow & M_{i'} & \longrightarrow & 0 \\ & & \hookdownarrow & & \hookdownarrow & & \hookdownarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_i & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & M_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

por lo que el lema de la serpiente (teorema 1.1.16 nos asegura la exactitud de

$$0 \longrightarrow K_i/K_{i'} \longrightarrow F_i/F_{i'} \longrightarrow M_i/M_{i'} \longrightarrow 0$$

Por construcción, cada $F_i/F_{i'}$ es libre y por lo tanto proyectivo; recordando que por hipótesis $\operatorname{l.pd}_R(M_i/M_{i'}) \leq n$, la proposición 4.1.5 nos permite afirmar que $\operatorname{l.pd}_R(K_i/K_{i'}) \leq n-1$ (es claro que esto será cierto cuando $M_i/M_{i'}$ no sea proyectivo, y en el caso en que sí lo sea la sucesión se escinde por lo que $K_i/K_{i'}$ será proyectivo, es decir, $\operatorname{l.pd}_R(K_i/K_{i'}) = 0 \leq n-1$). Como además la familia $(K_i)_{i\in I}$ cumple que $K_i \subset K_j$ siempre que $i \leq j$, $K = \bigcup\limits_{i\in I} K_i$ y $K_{i'} = \bigcup\limits_{j<i} K_j$, por la hipótesis inductiva obtenemos que $\operatorname{l.pd}_R K \leq n-1$.

Finalmente, como la sucesión $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es exacta, aplicando una vez más la proposición 4.1.5 concluimos que $\operatorname{l.pd}_R M \leq 1 + \operatorname{l.pd}_R K \leq n$.

■

Probemos ahora la igualdad en cuestión. Por definición sabemos que

$$\sup\{\operatorname{l.pd}_R C : C \in \text{R-Mod} \text{ es un módulo cíclico}\} \leq \operatorname{l.gl.dim} R$$

por lo que si $\sup\{\operatorname{l.pd}_R C : C \in \text{R-Mod} \text{ es un módulo cíclico}\} = \infty$ se cumple la igualdad. Supongamos pues que $\sup\{\operatorname{l.pd}_R C : C \in \text{R-Mod} \text{ es un módulo cíclico}\} = n$.

Sea M un R-módulo arbitrario. Consideremos un buen orden para los elementos x_i de M, y denotemos por M_i (respectivamente $M_{i'}$) el submódulo de M generado por los elementos x_j con $j \leq i$ (respectivamente $j < i$). Observar que el cociente $M_i/M_{i'}$ es cíclico generado por x_i, o cero, por lo que

$$\operatorname{l.pd}_R(M_i/M_{i'}) \leq \sup\{\operatorname{l.pd}_R C : C \in \text{R-Mod} \text{ es un módulo cíclico}\} = n$$

Como la familia $(M_i)_{i\in I}$ satisface las hipótesis de la afirmación anterior, esto implica que $\operatorname{l.pd}_R M \leq n$.

Dado que este razonamiento es válido para todo R-módulo M, concluimos que $\operatorname{l.gl.dim} R \leq n$. Por otro lado, $n = \sup\{\operatorname{l.pd}_R C : C \in \text{R-Mod} \text{ es un módulo cíclico}\} \leq \operatorname{l.gl.dim} R$, lo cual completa la prueba de nuestro teorema.

□

Tal como dijimos, presentamos ahora otra demostración de este resultado, debida a Matlis.

Teorema 5.1.2. *Si R es un anillo, entonces*

$$\operatorname{l.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{l.pd}_R R/I : I \subset R \textit{ es un ideal a izquierda}\}$$

Demostración. Si $\sup\{\operatorname{l.pd}_R R/I : I \subset R \text{ es un ideal a izquierda}\} = \infty$ entonces no hay nada que probar, pues sabemos por definición que $\sup\{\operatorname{l.pd}_R R/I : I \subset R \text{ es un ideal a izquierda}\} \leq \operatorname{l.gl.dim} R$.

Supongamos entonces que $\sup\{\operatorname{l.pd}_R R/I : I \subset R \text{ es un ideal a izquierda}\} = n$. Esto implica que $\operatorname{l.pd} R/I \leq n$ para todo ideal izquierdo $I \subset R$, o lo que es lo mismo, que $\operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) = 0$ para todo ideal $I \subset R$ y todo $M \in$ R-Mod.

Ahora, ya sabemos que $\operatorname{l.gl.dim} R = \operatorname{l.inj.gl.dim} R$ por el corolario 4.2.3, por lo que basta probar que $\operatorname{l.inj.gl.dim} R \leq n$, es decir, que $\operatorname{l.id} M \leq n$ para todo $M \in$ R-Mod.

Tomemos entonces $M \in$ R-Mod y consideremos una resolución inyectiva de M

$$\mathbb{E} : 0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots$$

con enésima cosizigia $\Omega^{-n}\mathbb{E}$.

Sabemos entonces que $0 = \operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) \simeq \operatorname{Ext}_R^1(R/I, \Omega^{-n}\mathbb{E})$ para todo ideal $I \subset R$ (donde el isomorfismo está dado por la proposición 4.1.6) por lo que $\Omega^{-n}\mathbb{E}$ debe ser inyectivo (proposición 4.1.8) y luego aplicando una vez más la proposición 4.1.6 concluimos que $\operatorname{l.id} M \leq n$, como buscábamos.

□

Corolario 5.1.3. *Si R es un anillo, entonces*

$$\operatorname{l.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{l.pd}_R M : M \in \text{R-mod}\}$$

Demostración. Es inmediato a partir del teorema anterior, pues tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}\operatorname{l.gl.dim} R &= \sup\{\operatorname{l.pd}_R C : C \in \text{R-Mod} \text{ es un módulo cíclico}\}\\ &\leq \sup\{\operatorname{l.pd}_R M : M \in \text{R-mod}\}\\ &\leq \operatorname{l.gl.dim} R\end{aligned}$$

□

Para probar lo que queremos introducimos una nueva dimensión homológica proveniente de las resoluciones planas. Mostraremos de manera sencilla que esta dimensión coincide a izquierda y a derecha, y luego ella actuará como un conector entre la dimensión global a izquierda y a derecha.

Definición 5.1.4. Si $M \in$ R-Mod, se define la dimensión plana de M como

$$\operatorname{l.fd}_R M = \inf\{\operatorname{length} \mathbb{F} : \mathbb{F} \text{ es una resolución plana de } M\}$$

De manera análoga se define $\operatorname{r.fd}_R M$ cuando M es un R-módulo a derecha.

Al igual que con la dimensión proyectiva e inyectiva, simplificaremos la notación a $\operatorname{l.fd} M$ o simplemente $\operatorname{fd} M$ si no hay lugar a confusión.

Observación 5.1.5. Un R-módulo M es plano si y solo si $\operatorname{fd} M = 0$.

Así como caracterizamos (en las proposiciones 4.1.4 y 4.1.7) a la dimensión proyectiva e inyectiva mediante los bifunctores Ext_R^i, veremos que es posible caracterizar la dimensión plana mediante los bifunctores Tor_i^R.

Proposición 5.1.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para* $M \in$ R-Mod*:*

1. $\operatorname{fd} M \leq n$,
2. $\operatorname{Tor}_k^R(N, M) = 0$ *para todo* $N \in$ Mod-R *y* $k \geq n+1$,
3. $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(N, M) = 0$ *para todo* $N \in$ Mod-R,
4. *Toda resolución plana de* M *tiene su enésima sizigia plana.*

Demostración. La demostración es similar a la de la proposición 4.1.4, recordando que $\operatorname{Tor}_i^R(N, M)$ se puede calcular a partir de resoluciones planas.

□

Análogamente se obtiene una caracterización para los R-módulos a derecha.

Al igual que definimos la dimensión global (inyectiva) de un anillo R a partir de la dimensión proyectiva (inyectiva) de los elementos de R-Mod, definimos ahora una dimensión en R basada en la dimensión plana de los R-módulos.

Definición 5.1.7. Definimos la dimensión global débil a izquierda de un anillo R como

$$\operatorname{l.w.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{l.fd}_R M : M \in \text{R-Mod}\}$$

y la dimensión global débil a derecha de R como

$$\operatorname{r.w.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{r.fd}_R M : M \in \text{Mod-R}\}$$

La caracterización presentada en la proposición 5.1.6 nos permite demostrar el siguiente resultado.

Teorema 5.1.8. *Si* R *es un anillo, entonces* $\operatorname{l.w.gl.dim} R \leq n$ *si y solo si* $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(M, N) = 0$ *para todo* $M \in$ Mod-R, $N \in$ R-Mod.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\operatorname{l.w.gl.dim} R \leq n &\iff \text{Para todo } N \in \text{R-Mod es } \operatorname{fd} N \leq n \\
&\iff \text{Para todo } N \in \text{R-Mod es } \operatorname{Tor}_{n+1}^R(M, N) = 0 \text{ para todo } M \in \text{Mod-R} \\
&\iff \text{Para todo } M, N \in \text{R-Mod es } \operatorname{Tor}_{n+1}^R(M, N) = 0
\end{aligned}$$

□

De igual manera, podemos ver que $\operatorname{r.w.gl.dim} R \leq n$ si y solo si $\operatorname{Tor}_{n+1}^R(M, N) = 0$ para todo $M \in$ Mod-R, $N \in$ R-Mod.

A partir de estos resultados podemos concluir que al hablar de la dimensión global débil de un anillo no es necesario hacer distinciones entre "derecha" e "izquierda"; es decir, es válido el siguiente resultado.

Corolario 5.1.9. *Si* R *es un anillo, entonces* $\operatorname{l.w.gl.dim} R = \operatorname{r.w.gl.dim} R$.

En adelante hablaremos simplemente de $\operatorname{w.gl.dim} R$.

Vale la pena destacar que en el caso de la dimensión global, los resultados análogos al teorema 5.1.8 nos permitían concluir que la dimensión global era igual al calcularla con inyectivos y proyectivos, pero no obteníamos conclusiones que relacionaran la dimensión global a derecha y a izquierda. Esta diferencia fundamental se debe a que el bifunctor Ext_R^i trabaja con módulos de igual lado en ambas variables (es decir, tenemos $\operatorname{Ext}_R^i(M, N)$ con $M, N \in$ R-Mod o $M, N \in$ Mod-R), mientras que el bifunctor Tor_i^R relaciona las categorías Mod-R y R-Mod.

Al igual que la dimensión global, veremos que la dimensión global débil también calcularse a partir de los R-módulos finitamente generados.

Proposición 5.1.10. *Si R es un anillo, entonces*

$$\begin{aligned} \operatorname{w.gl.dim} R &= \sup\{\operatorname{l.fd} M : M \in \text{R-mod}\} \\ &= \sup\{\operatorname{r.fd} N : N \in \text{mod-R}\} \end{aligned}$$

Demostración. Es inmediato notando que todo R-módulo puede expresarse como un límite directo de R-módulos finitamente generados (proposición 1.1.7), y recordando que el functor Tor_n^R conmuta con límites directos (proposición 1.1.8).

□

Habiendo establecido algunos resultados básicos acerca de la dimensión global débil, pasamos finalmente a ilustrar la conexión entre esta dimensión y la dimensión global a izquierda y a derecha.

Proposición 5.1.11. *Sea R un anillo y $M \in$ R-Mod. Entonces*

1. $\operatorname{l.fd} M \leq \operatorname{l.pd} M$,
2. *si R es noetheriano a izquierda y M es finitamente generado, se cumple la igualdad en el item anterior.*

De manera similar tenemos el enunciado correspondiente para módulos a derecha.

Demostración.
1. Si $\operatorname{l.pd} M = n$, entonces existe alguna resolución proyectiva de M, llamémosle $\mathbb{P}$, tal que $\operatorname{length} \mathbb{P} = n$. Pero todo módulo proyectivo es plano, por lo que $\mathbb{P}$ es una resolución plana de M de largo n, lo que implica por definición que $\operatorname{l.fd} M \leq n$.
2. Supongamos ahora que $\operatorname{l.fd} M = n$, y consideremos una resolución proyectiva de M

$$\mathbb{P} : \cdots \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

en la que cada P_i es finitamente generado, como en la observación 1.3.26. Como cada módulo proyectivo es plano, esta es una resolución plana y luego por la proposición 5.1.6 sabemos que su $(n-1)$-sizigia $\Omega^{n-1}\mathbb{P}$ es un módulo plano, es decir, que

$$0 \longrightarrow \Omega^{n-1}\mathbb{P} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una resolución plana de M.

Como P_{n-1} es finitamente generado, $\Omega^{n-1}\mathbb{P} \subset P_{n-1}$ y R es noetheriano, tenemos que $\Omega^{n-1}\mathbb{P}$ es un módulo plano finitamente generado y luego el teorema A.2.19 nos dice que $\Omega^{n-1}\mathbb{P}$ es proyectivo. Pero entonces

$$0 \longrightarrow \Omega^{n-1}\mathbb{P} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de M, por lo que $\operatorname{l.pd} M \leq n$.

□

Teorema 5.1.12. *Si R es un anillo noetheriano a izquierda, entonces*

$$\operatorname{l.gl.dim} R = \operatorname{w.gl.dim} R$$

De manera análoga, si R es noetheriano a derecha entonces

$$\operatorname{r.gl.dim} R = \operatorname{w.gl.dim} R$$

Demostración. Lo probaremos en el caso en que R es noetheriano a izquierda; el otro caso es similar.

Por el corolario 5.1.3 tenemos que

$$\operatorname{l.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{l.pd} M : M \in \text{R-mod}\}$$

Como R es noetheriano a izquierda, sabemos por la proposición anterior que

$$\operatorname{l.pd} M = \operatorname{l.fd} M$$

para cada R-módulo finitamente generado M. Debido a la proposición 5.1.10, esto concluye nuestra prueba.

□

Esto demuestra lo que buscábamos, pues se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 5.1.13. *Si R es un anillo noetheriano a izquierda y a derecha, entonces*

$$\operatorname{l.gl.dim} R = \operatorname{w.gl.dim} R = \operatorname{r.gl.dim} R$$

5.2 Posible asimetría en la dimensión finitista

Tal como mencionamos anteriormente, la dimensión finitista carece en general de la simetría que buscamos. Mostraremos esto con el siguiente contraejemplo, extraído de las notas [Hap91] de D. Happel.

Para cada n consideremos la $\Bbbk$-álgebra $A_n = \Bbbk Q_n/I_n$ definida por el quiver

$$\begin{tikzcd} n & n-1 \arrow[l, "\alpha_n"'] & \dots \arrow[l, "\alpha_{n-1}"'] & 2 \arrow[l, "\alpha_3"'] & 1 \arrow[l, "\alpha_2"'] & 0 \arrow[l, "\alpha_1"'] \arrow[loop right, "\alpha_0"] \end{tikzcd}$$

y donde I_n es el ideal generado por las relaciones $\alpha_0^2,\ \alpha_1\alpha_0,\ \alpha_2\alpha_1, \dots,\ \alpha_n\alpha_{n-1}$.

Es trivial verificar que I_n es un ideal admisible de $\Bbbk Q_n$, y por lo tanto la proposición 3.1.9 nos asegura que A_n es un álgebra de Artin sobre $\Bbbk$. Nuestro objetivo será mostrar que $\operatorname{l.fin.dim} A_n \geq n$, mientras que $\operatorname{r.fin.dim} A_n = 0$.

Es fácil observar que la siguiente es una lista completa de los A_n-módulos a izquierda proyectivos indescomponibles:

$$\begin{tikzcd} P_0 : 0 & 0 \arrow[l, "0"'] & \dots \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"'] & \Bbbk \arrow[l, "0"'] & \Bbbk^2 \arrow[l, "{[0\ 1]}"'] \arrow[loop right, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_1 : 0 & 0 \arrow[l, "0"'] & \dots \arrow[l, "0"'] & \Bbbk \arrow[l, "0"'] & \Bbbk \arrow[l, "1"'] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & i+1 & i & & & \\ P_i : 0 & \dots \arrow[l, "0"'] & \Bbbk \arrow[l, "0"'] & \Bbbk \arrow[l, "1"'] & \dots \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_n = S_n : \Bbbk & 0 \arrow[l, "0"'] & \dots \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

Luego, si consideramos el módulo inyectivo indescomponible

$$\begin{tikzcd} E_0 : 0 & 0 \arrow[l, "0"'] & \dots \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"'] & 0 \arrow[l, "0"'] & \Bbbk^2 \arrow[l, "0"'] \arrow[loop right, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"] \end{tikzcd}$$

tenemos que $\operatorname{l.dim}_A E_0 = n$, ya que al cubrir E_0 obtenemos

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & P_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r] & E_0 \arrow[r] & 0 \\ & & S_n \arrow[ur] & & & & S_2 \arrow[ur] & & S_1 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

de lo que concluimos que $\operatorname{l.fin.dim} A \geq n$.[1]

Para probar que $\operatorname{r.fin.dim} A_n = 0$ haremos uso del siguiente teorema, que es una simplificación para el caso de módulos finitamente generados del resultado [Bas60, lema 6.2]. Vale aclarar que esta idea fue tomada de las notas [RS11] de S. Rubinstein-Salzedo.

Teorema 5.2.1. *Si A es un álgebra de Artin tal que para todo A-módulo a derecha simple S existe un A-módulo a derecha inyectivo E y un epimorfismo $E \to S \to 0$, entonces* $\operatorname{r.fin.dim} A = 0$.

Nosotros mostraremos la versión dual, emulando las ideas en la prueba de Bass.

Teorema 5.2.2. *Si A es un álgebra de Artin tal que para todo A-módulo a izquierda simple S existe un A-módulo a izquierda proyectivo P y un monomorfismo $0 \to S \to P$, entonces* $\operatorname{r.fin.dim} A = 0$.

[1] Es posible probar (por ejemplo, calculando el carcaj de Auslander-Reiten) que $\operatorname{l.fin.dim} A = n$.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{r.fin.dim} A = n > 0$, o lo que es equivalente, que $\operatorname{inj.l.fin.dim} A = n > 0$ (debido a que la dualidad D lleva módulos proyectivos en inyectivos y viceversa). Existe entonces un A-módulo a izquierda finitamente generado M tal que $\operatorname{l.inj.dim}_A M = 1$ (ya que existe algún A-módulo a izquierda N finitamente generado tal que $\operatorname{l.inj.dim}_A N = n$, y luego $\operatorname{l.inj.dim}_A \Omega^{-n+1}N = 1$ pues $\operatorname{Ext}^n_A(-, N) \simeq \operatorname{Ext}^1_A(-, \Omega^{-n+1}N)$).

Consideremos ahora la sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow E(M) \longrightarrow E \longrightarrow 0$ donde $E(M)$ es la envolvente inyectiva de M y $E \neq 0$ es inyectivo.

Afirmación. $E(M)$ es finitamente generado.

Demostración. Por la proposición 2.1.8, sabemos que

$$E(M) = E(\operatorname{soc} M) = E(\sum_{i \in I} S_i) = \sum_{i \in I} E(S_i)$$

Además, como M es finitamente generado, el conjunto I debe ser finito. Por lo tanto, para ver que $E(M)$ es finitamente generado basta ver que cada $E(S_i)$ lo es.

Consideremos entonces S un módulo simple, y $E(S)$ su envolvente. Observar primero que $E(S)$ es indescomponible, pues si tuviésemos $E(S) = E_1 \oplus E_2$, por ser S simple sería $S \hookrightarrow E_i$ para $i = 1$ o $i = 2$, con E_i inyectivo ya que es sumando directo de $E(S)$; sin embargo, esto es absurdo pues tendríamos $S \hookrightarrow E_i \subsetneq E(S)$.

Por lo tanto $E(S)$ es un A-módulo a izquierda inyectivo indescomponible, lo cual implica que $E(S)$ es isomorfo a un sumando directo de $D(A_A)$ debido a la proposición 2.3.7. Como $D(A_A)$ es finitamente generado, $E(S)$ también lo será.

■

Utilizando la afirmación, $E(M)$ es finitamente generado y por lo tanto también lo es E. Esto implica que E es un módulo artiniano, por lo que existe un A-módulo simple S tal que $S \subset E$ (si esto no fuese cierto, podríamos encontrar una cadena descendente que no estabiliza).

Por hipótesis, existe un módulo P proyectivo y un monomorfismo $0 \to S \to P$. Ahora, como E es inyectivo, existe un morfismo f_1 que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[dl, dashed, "f_1"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

y por ser P proyectivo tenemos un morfismo f_2 que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f_2"'] \arrow[d, "f_1"] & \\ E(M) \arrow[r] & E \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

por lo que podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & & \\
& & S \arrow[d] \arrow[ddr] & & \\
& & P \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E(M) \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego, como S es simple tenemos que $S \to E(M)$ es un monomorfismo (pues su kernel es un submódulo de S, y ya sabemos que el morfismo no es nulo). Por lo tanto $\operatorname{Im}(S \to E(M)) \simeq S$ y luego $\operatorname{Im}(S \to E(M))$ es simple, lo cual implica que $\operatorname{Im}(S \to E(M)) \subset \operatorname{soc} E(M)$.

Pero $\operatorname{Im}(M \to E(M))$ es esencial en $E(M)$ (por ser $E(M)$ la envolvente inyectiva de M), y como $\operatorname{soc} E(M)$ es la intersección de los submódulos esenciales de $E(M)$ (proposición 2.1.7) tenemos que $\operatorname{soc} E(M) \subset \operatorname{Im}(M \to E(M))$.

Concluimos entonces que $\operatorname{Im}(S \to E(M)) \subset \operatorname{soc} E(M) \subset \operatorname{Im}(M \to E(M)) = \ker(E(M) \to E)$. Luego, por la propiedad universal del kernel, existe un morfismo f_3 que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & & \\
& & S \arrow[d] \arrow[ddr] \arrow[ddl, "f_3"'] & & \\
& & P \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E(M) \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, esto implica que el morfismo $S \to E$ se factoriza a través de $M \to E(M) \to E$ que es el morfismo nulo, lo cual es absurdo.

$\square$

Veamos que la hipótesis de este teorema es equivalente con que todo A-módulo a izquierda simple S tenga una copia en $\operatorname{soc}({}_AA)$:

Sea S un A-módulo a izquierda simple. Si S tiene una copia en $\operatorname{soc}({}_AA)$, entonces existe un monomorfismo $S \hookrightarrow \operatorname{soc}({}_AA) \hookrightarrow A$, con A proyectivo. Por otro lado, si existe un proyectivo P y un monomorfismo $S \hookrightarrow P$, como P es sumando directo de un módulo libre tenemos $S \hookrightarrow P \hookrightarrow \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, y como S es simple debe ser $S \hookrightarrow A$ por lo que S es isomorfo a algún ideal izquierdo de A que claramente será simple. Concluimos entonces que S tiene una copia en $soc({}_AA)$.

Por lo tanto, para probar que $\operatorname{r.fin.dim}(A_n) = 0$ basta ver que todo A_n-módulo a izquierda simple S tiene una copia en $\operatorname{soc}({}_{A_n}A_n)$. Esto es inmediato recordando la lista de A_n-módulos proyectivos indescomponibles presentada anteriormente, ya que como tenemos la descomposición $A_n = P_0 \oplus P_1 \oplus$

$\cdots \oplus P_{n-1} \oplus P_n$ se cumple que

$$\begin{aligned} \operatorname{soc}({}_{A_n}A_n) &= \operatorname{soc}(P_0 \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_{n-1} \oplus P_n) \\ &= \operatorname{soc}(P_0) \oplus \operatorname{soc}(P_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{soc}(P_{n-1}) \oplus \operatorname{soc}(P_n) \\ &= (S_0 \oplus S_1) \oplus (S_2) \oplus \cdots \oplus (S_n) \oplus (S_n) \end{aligned}$$

donde aparece al menos una copia de cada módulo simple.

5.3 Algunas respuestas para la ϕ dimensión

5.3.1 La ϕ en las álgebras de Gorenstein

Las álgebras de Artin Gorenstein surgen en 1991 en el artículo *Applications of Contravariantly Finite Subcategories*, de M. Auslander e I. Reiten, como álgebras de Artin en la que las dimensiones inyectivas de A como A-módulo a izquierda y a derecha son finitas. En esta sección mostraremos que, si nos restringimos a esta clase de álgebras, la ϕ dimensión presenta la simetría buscada.

Definición 5.3.1. Si A es un álgebra de Artin, diremos que A es de Artin Gorenstein si verifica que $\operatorname{l.id} A < \infty$ y $\operatorname{r.id} A < \infty$.

Proposición 5.3.2. *Si A es un álgebra de Artin Gorenstein, entonces* $\operatorname{l.id} A = \operatorname{r.id} A$.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{l.id} A = n$ y $\operatorname{r.id} A = m$. Sabemos además que $\operatorname{r.id} A = \operatorname{l.pd} DA$. Veremos primero que $m \leq n$; la demostración de la otra desigualdad es análoga.

Como $\operatorname{l.pd} DA = m$, podemos considerar una resolución proyectiva de DA de largo m con términos finitamente generados,

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} DA \longrightarrow 0$$

Dado que P_m es un módulo proyectivo finitamente generado, se descompone como suma directa de submódulos proyectivos indescomponibles. Luego, como A puede escribirse como la suma directa de todos sus módulos proyectivos indescomponibles (a menos de isomorfismo), tenemos que existe $t \in \mathbb{N}$ de manera que P_m es un sumando directo de A^t.

Esto implica que $\operatorname{l.id} P_m \leq \operatorname{l.id} A^t = \operatorname{l.id} A = n$, por lo que basta ver que $m \leq \operatorname{l.id} P_m$. Para esto, mostraremos que $\operatorname{Ext}_A^m(DA, P_m) \neq 0$.

Recordemos cómo se define $\operatorname{Ext}_A^m(DA, P_m)$: partimos de una resolución proyectiva cualquiera, por ejemplo

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} DA \longrightarrow 0$$

y aplicamos el functor contravariante $\operatorname{Hom}_A(-, P_m)$ para obtener la sucesión truncada

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(P_0, P_m) \xrightarrow{d_1^*} \operatorname{Hom}_A(P_1, P_m) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(P_{m-1}, P_m) \xrightarrow{d_m^*} \operatorname{Hom}_A(P_m, P_m) \longrightarrow 0$$

Luego, tenemos que $\operatorname{Ext}_A^m(DA, P_m) = \dfrac{\ker 0}{\operatorname{Im} d_n^*} = \dfrac{\operatorname{Hom}_A(P_m, P_m)}{\operatorname{Im} d_m^*}$. Veamos entonces que este cociente es no nulo.

Si fuese $\operatorname{Hom}_A(P_m, P_m) = \operatorname{Im} d_m^*$, entonces el morfismo id_{P_m} tendría una preimagen por d_m^*, es decir, existiría $\varphi : P_{m-1} \to P_m$ tal que $d_m^*(\varphi) = \varphi d_m = \mathrm{id}_{P_m}$. Esto implica que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \longrightarrow \Omega^{m-1} DA \longrightarrow 0$$

se escinde, por lo que $P_{m-1} \simeq P_m \oplus \Omega^{m-1} DA$. Pero entonces $\Omega^{m-1} DA$ es proyectivo, por ser sumando directo de un módulo proyectivo, lo cual es absurdo pues obtendríamos que $\operatorname{l.pd} DA \leq m-1$.

□

Introducimos ahora un último concepto que nos ayudará en nuestro objetivo.

Definición 5.3.3. Si A es un anillo, definimos la categoría perpendicular a izquierda de A como

$$^{\perp}A = \{M \in \text{A-mod} : \operatorname{Ext}_A^i(M, A) = 0 \text{ para todo } i \geq 1\}$$

Haremos uso del siguiente teorema, que enunciaremos sin demostración.

Teorema 5.3.4. *Si A es un anillo, entonces la restricción del functor sizigia $\Omega : {}^{\perp}\text{A-}\underline{\text{mod}} \longrightarrow {}^{\perp}\text{A-}\underline{\text{mod}}$ es fiel y pleno.*

Demostración. Este teorema aparece originalmente en [AB69], aunque una demostración más concisa puede hallarse en [LMS, teo. 3.7]. □

Este resultado nos permite deducir el siguiente teorema, tomado también de [LMS].

Teorema 5.3.5. *Si A es un álgebra de Artin y $M \in {}^{\perp}A$, entonces $\phi(M) = 0$.*

Demostración. Sea $M \in {}^{\perp}A$ y consideremos una descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{\alpha_i}$ en submódulos indescomponibles. Supongamos también, sin pérdida de generalidad, que ninguno de los M_i es proyectivo. Tenemos entonces que $[\operatorname{add} M] = \langle [M_1], \dots, [M_r] \rangle$ por lo que el rango de $[\operatorname{add} M]$ es r.

Supongamos por absurdo que $\phi(M) = t > 0$; luego t es el último paso en el que decrece el rango al aplicar $\Omega : \Omega^{t-1}([\operatorname{add} M]) \longrightarrow \Omega^t([\operatorname{add} M])$, y por lo tanto debe existir una nueva relación (no trivial) $\sum_{i=1}^{k} t_i \Omega^t[M_i] = \sum_{i=1}^{k} r_i \Omega^t[M_i]$ donde $t_i, r_i \geq 0$.

Tenemos entonces que $\Omega(\bigoplus_{i=1}^{k} \Omega^{t-1} M_i^{t_i}) \simeq \Omega(\bigoplus_{i=1}^{k} \Omega^{t-1} M_i^{r_i})$ en A-$\underline{\text{mod}}$. Sin embargo, es inmediato observar que $M_i \in {}^{\perp}A$ para cada i (y por lo tanto $\bigoplus_{i=1}^{k} \Omega^{t-1} M_i^{t_i} \in {}^{\perp}\text{A-}\underline{\text{mod}}$) lo cual implica, recordando el teorema anterior, que existe un isomorfismo $\bigoplus_{i=1}^{k} \Omega^{t-1} M_i^{t_i} \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \Omega^{t-1} M_i^{r_i}$ en A-$\underline{\text{mod}}$. Por lo tanto la relación no trivial que hallamos ya era válida en el grupo $\Omega^{t-1}([\operatorname{add} M])$, lo cual es una contradicción.

□

Haciendo uso de estas herramientas, probemos el resultado que buscamos acerca de la ϕ dimensión.

Teorema 5.3.6. *Si A es un álgebra de Artin Gorenstein, entonces $\operatorname{l.}\phi\dim A = \operatorname{r.}\phi\dim A$.*

Demostración. Como A es de Gorenstein sabemos que $\operatorname{l.id} A = n < \infty$; más aún, la proposición 5.3.2 nos asegura que $\operatorname{l.id} A = n = \operatorname{r.id} A$. Tenemos entonces que $0 = \operatorname{Ext}_A^{n+t}(M, A) \simeq \operatorname{Ext}_A^t(\Omega^n M, A)$ para todo $t \geq 1$, lo que implica que $\Omega^n M \in {}^{\perp}A$ para todo $M \in$ A-mod, y luego $\phi(\Omega^n M) = 0$ para todo $M \in$ A-mod.

Ahora, el item 6 de la proposición 4.1.11 da lugar a la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}\phi(M) \leq& 1 + \phi(\Omega M)\\ \leq& 1 + 1 + \phi(\Omega^2 M)\\ &\vdots\\ \leq& n + \phi(\Omega^n M)\\ \leq& n\end{aligned}$$

a partir de la cual concluimos que $\phi(M) \leq n$. Como esto es válido para todo $M \in$ A-mod, obtenemos que

$$\operatorname{l.}\phi\dim A \leq n = \operatorname{r.id} A = \operatorname{l.pd} DA \leq \operatorname{l.fin.dim} A \leq \operatorname{l.}\phi\dim A$$

por lo que las desigualdades son en realidad igualdades y $\operatorname{l.}\phi\dim A = n$. De manera análoga se prueba que $\operatorname{r.}\phi\dim A = n$, lo que concluye la demostración.

□

5.3.2 Nuevas formas de ϕ

Esta última sección del capítulo refleja el interés por comprender la simetría de las diferentes dimensiones homológicas; en particular, nos dedicaremos a la función ϕ de Igusa y Todorov. Las definiciones y resultados que aparecen surgen de discusiones llevadas adelante en el segundo semestre de 2014, por Diego Bravo, Marcelo Lanzilotta y la autora de esta monografía.

Recordemos que en el capítulo anterior fue definido el concepto de d división de la siguiente manera

Definición 5.3.7. Sea A un álgebra de Artin sobre R, d un entero positivo y $M \in$ A-mod. Decimos que un par (X, Y) de objetos en $\operatorname{add} M$ es una d-división de M si se verifican las siguientes condiciones:

- $\operatorname{add} X \cap \operatorname{add} Y = 0$,
- $\operatorname{Ext}_A^d(X, -) \not\simeq \operatorname{Ext}_A^d(Y, -)$ en $\mathcal{C}_A$,
- $\operatorname{Ext}_A^{d+1}(X, -) \simeq \operatorname{Ext}_A^{d+1}(Y, -)$ en $\mathcal{C}_A$.

Dado que las d divisiones definidas de esta manera contemplan A-módulos a izquierda y se ven caracterizadas por los functores Ext_A^i con su primera variable fija, introducimos la notación ϕ_{E_1}(A-mod) para referirnos a la dimensión del álgebra A definida a través de estas d divisiones, es decir,

$$\phi_{E_1}(\text{A-mod}) = \sup\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe } M \in \text{A-mod tal que } M \text{ admite una } d \text{ división}\}$$

Observar que en nuestra notación, el subíndice E_1 indica que las d divisiones se definen al partir de los functores Ext_A^i con su primera variable fija, y que al escribir A-mod queremos indicar que se considerará la categoría de A-módulos a izquierda (finitamente generados).

Tal como hemos visto en el teorema 4.1.17, $\phi_{E_1}(\text{A-mod}) = \operatorname{l.}\phi\dim A$.

En adelante nos referiremos a una d-división, tal como se ve en la definición 5.3.7, como una (l, E_1, d)-división, donde l indica que estamos considerando la categoría A-mod de módulos a izquierda, y E_1 que estamos considerando los functores Ext_A^i con su primera variable fija.

De manera similar, podríamos considerar la noción de (r, E_1, d)-divisiones en la categoría mod-A y obtendríamos en este caso la dimensión $\phi_{E_1}(\text{mod-A})$, definida como

$$\phi_{E_1}(\text{mod-A}) = \sup\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe } M \in \text{mod-A} \text{ tal que } M \text{ admite una } (r, E_1, d) \text{ división}\}$$

Análogamente a su versión a izquierda, es posible probar que $\phi_{E_1}(\text{mod-A}) = \text{r.}\,\phi \dim A$.

A la hora de generalizar el concepto de las d-divisiones, es natural introducir además dos nuevas variantes: aquella que utiliza los functores Ext_A^i con su segunda variable fija, y la que utiliza en cambio los functores Tor_i^A. Formalicemos estas ideas. Aclaramos que si bien la categoría $\mathcal{C}_A$ fue definida como aquella formada por los R-functores F : A-mod $\to$ R-mod, nos referiremos también por $\mathcal{C}_A$ a la categoría cuyos functores tienen como codominio a mod-A, pues no hay lugar a confusión una vez que nos hallamos en contexto.

Definición 5.3.8. Sea A un álgebra de Artin sobre R, d un entero positivo y $M \in$ A-mod. Decimos que un par (X, Y) de objetos en $\operatorname{add} M$ es una (l, E_2, d)-división de M si se verifican las siguientes condiciones:

- $\operatorname{add} X \cap \operatorname{add} Y = 0$,
- $\operatorname{Ext}_A^d(-, X) \not\simeq \operatorname{Ext}_A^d(-, Y)$ en $\mathcal{C}_A$,
- $\operatorname{Ext}_A^{d+1}(-, X) \simeq \operatorname{Ext}_A^{d+1}(-, Y)$ en $\mathcal{C}_A$.

Obtenemos de esta manera la dimensión $\phi_{E_2}(\text{A-mod})$, dada por

$$\phi_{E_2}(\text{A-mod}) = \sup\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe } M \in \text{A-mod} \text{ tal que } M \text{ admite una } (l, E_2, d) \text{ división}\}$$

Haciendo un breve repaso de la sección 4.1.2, no es difícil ver que el concepto de (l, E_2, d)-división es el reemplazo natural de las d-divisiones si al definir la función ϕ cambiamos los módulos proyectivos por los inyectivos. De esta manera, $\phi_{E_2}(\text{A-mod})$ coincide con la ϕ dimensión a izquierda de A si utilizamos los módulos inyectivos.

Como es esperable, podemos considerar la versión a derecha de las (l, E_2, d)-divisiones, con lo que definimos la dimensión $\phi_{E_2}(\text{mod-A})$ como sigue

$$\phi_{E_2}(\text{mod-A}) = \sup\{d \in \mathbb{N} : \text{ existe } M \in \text{mod-A} \text{ tal que } M \text{ admite una } (r, E_2, d) \text{ división}\}$$

Finalmente, introducimos el siguiente concepto.

Definición 5.3.9. Sea A un álgebra de Artin sobre R, d un entero positivo y $M \in$ A-mod. Decimos que un par (X, Y) de objetos en $\operatorname{add} M$ es una (l, T, d)-división de M si se verifican las siguientes condiciones:

- $\operatorname{add} X \cap \operatorname{add} Y = 0$,
- $\operatorname{Tor}_d^A(-, X) \not\simeq \operatorname{Tor}_d^A(-, Y)$ en $\mathcal{C}_A$,
- $\operatorname{Tor}_{d+1}^A(-, X) \simeq \operatorname{Tor}_{d+1}^A(-, Y)$ en $\mathcal{C}_A$.

junto con su correspondiente versión a derecha

Definición 5.3.10. Sea A un álgebra de Artin sobre R, d un entero positivo y $M \in$ mod-A. Decimos que un par (X, Y) de objetos en $\operatorname{add} M$ es una (r, T, d)-división de M si se verifican las siguientes condiciones:

- $\operatorname{add} X \cap \operatorname{add} Y = 0$,
- $\operatorname{Tor}_d^A(X, -) \not\simeq \operatorname{Tor}_d^A(Y, -)$ en $\mathcal{C}_A$,
- $\operatorname{Tor}_{d+1}^A(X, -) \simeq \operatorname{Tor}_{d+1}^A(Y, -)$ en $\mathcal{C}_A$.

Observar que no es necesario aclarar si se trata de T_1 o de T_2, pues en cada caso sólo una de ellas tiene sentido.

Llamaremos a la dimensiones definidas a partir de las (l, T, d)-divisiones y las (r, T, d)-divisiones ϕ_{T_2}(A-mod) y ϕ_{T_1}(mod-A), respectivamente.

Tenemos entonces seis dimensiones definidas sobre el álgebra A, a saber,

ϕ_{E_1}(A-mod) $=$ l. $\phi \dim A$, ϕ_{E_1}(mod-A) $=$ r. $\phi \dim A$, ϕ_{E_2}(A-mod), ϕ_{E_2}(mod-A), ϕ_{T_2}(A-mod) y ϕ_{T_1}(mod-A)

Nuestra meta es conectar las dimensiones ϕ_{E_1}(A-mod) y ϕ_{E_1}(mod-A); con esto en mente, nos interesa buscar relaciones entre estas nuevas dimensiones que puedan asistirnos en ese objetivo. Para esto haremos uso de la dualidad D definida anteriormente.

Nos referiremos ahora a algunas de las identidades derivadas demostradas en el apéndice, en concreto,

Teorema A.1.2. *Dados dos anillos R y S y módulos A_R, ${}_RB_S$ y C_S con C inyectivo, existe un isomorfismo*

$$\operatorname{Ext}_R^i(A, \operatorname{Hom}_S(B, C)) \simeq \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}_i^R(A, B), C)$$

para cada $i \geq 0$.

Teorema A.1.11. *Sean R y S dos anillos y módulos ${}_RA$, ${}_RB_S$ y C_S. Si R es noetheriano a izquierda, A finitamente generado y C inyectivo, existe un isomorfismo*

$$\operatorname{Tor}_i^R(\operatorname{Hom}_S(B, C), A) \simeq \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Ext}_R^i(A, B), C)$$

para todo $i \geq 0$.

Adaptemos los teoremas anteriores a nuestro contexto. En este caso, el anillo R será nuestra álgebra A, el anillo S será nuestro anillo artiniano R, y en el lugar de C fijaremos el módulo inyectivo J definido en la sección 2.2. Luego, si nos restringimos a A-módulos finitamente generados, tendremos que

$$\operatorname{Ext}_A^i(M, \operatorname{Hom}_R(N, J)) \simeq \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Tor}_i^A(M, N), J) \text{ para cada } i \geq 0 \text{ y cada } M \in \text{mod-A},\ N \in \text{A-mod}$$

$$\operatorname{Tor}_i^A(\operatorname{Hom}_R(N, J), M) \simeq \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}_A^i(M, N), J) \text{ para cada } i \geq 0 \text{ y cada } M, N \in \text{A-mod}$$

Recordando que $D = \operatorname{Hom}_R(-, J)$, obtenemos

$$\operatorname{Ext}_A^i(M, D(N)) \simeq D(\operatorname{Tor}_i^A(M, N)) \text{ para cada } i \geq 0 \text{ y cada } M \in \text{mod-A},\ N \in \text{A-mod}$$

$$\operatorname{Tor}_i^A(D(N), M) \simeq D(\operatorname{Ext}_A^i(M, N)) \text{ para cada } i \geq 0 \text{ y cada } M, N \in \text{A-mod}$$

Interpretemos estos isomorfismos en relación a las dimensiones que queremos conectar. Si en el primer isomorfismo fijamos el módulo $M \in$ mod-A, obtenemos que $\operatorname{Ext}_A^i(M, D(-)) \simeq D(\operatorname{Tor}_i^A(M, -))$ para cada $i \geq 0$. Debido a que $D :$ A-mod $\longrightarrow$ mod-A es una dualidad, esto implica que

$$\phi_{E_1}(\text{mod-A}) = \phi_{T_1}(\text{mod-A})$$

Fijando en cambio $N \in$ A-mod vemos que $\operatorname{Ext}_A^i(-, D(N)) \simeq D(\operatorname{Tor}_i^A(-, N))$ para cada $i \geq 0$, de lo que se deduce que $\phi_{E_2}(\text{mod-A}) = \phi_{T_2}(\text{A-mod})$.

Si ahora concentramos nuestra atención en el segundo isomorfismo fijando $M \in$ A-mod, tenemos que $\operatorname{Tor}_i^A(D(-), M) \simeq D(\operatorname{Ext}_A^i(M, -))$ para cada $i \geq 0$, por lo que $\phi_{T_2}(\text{A-mod}) = \phi_{E_1}(\text{A-mod})$.

Por otro lado, al fijar el módulo $N \in$ A-mod en este mismo isomorfismo obtenemos que $\operatorname{Tor}_i^A(D(N), -) \simeq D(\operatorname{Ext}_A^i(-, N))$ para cada $i \geq 0$, y luego $\phi_{T_1}(\text{mod-A}) = \phi_{E_2}(\text{A-mod})$.

Recapitulando, hemos probado las siguientes igualdades

$$\phi_{E_2}(\text{mod-A}) = \phi_{T_2}(\text{A-mod}) = \phi_{E_1}(\text{A-mod}) = \text{l.}\,\phi \dim A$$

$$\phi_{E_2}(\text{A-mod}) = \phi_{T_1}(\text{mod-A}) = \phi_{E_1}(\text{mod-A}) = \text{r.}\,\phi \dim A$$

Si bien esto no cumple nuestro objetivo, alcanzaría con encontrar alguna relación que conecte estas dos ramas para mostrar que $\text{l.}\,\phi \dim A = \text{r.}\,\phi \dim A$.

Apéndice A

Identidades naturales

Presentamos en este apéndice algunos isomorfismos naturales entre functores, a los que llamamos identidades naturales, junto con los correspondientes isomorfismos en sus functores derivados. Estos resultados son ampliamente conocidos y se encuentran dispersos entre los libros de texto clásicos, por lo que es nuestro objetivo que este capítulo sirva como una pequeña recopilación. A su vez, presentamos como aplicación de estos isomorfismos dos teoremas debidos a T. Ishikawa que relacionan las dimensiones plana e inyectiva.

A.1. Identidades y sus derivadas

Presentaremos los isomorfismos en el siguiente orden, cuando sea posible: primero mostraremos el isomorfismo entre los functores, luego el correspondiente isomorfismo en los functores derivados (si existe), seguido por la versión "simétrica" (es decir, cambiando los módulos derechos por módulos izquierdos y viceversa) de la identidad y su derivada.

Comenzamos con el siguiente teorema, cuyo enunciado y parte de su demostración se puede encontrar en [Rot09, teo. 2.75].

Teorema A.1.1 (Adjunción del Hom y el tensor 1)**.** *Dados dos anillos R y S y módulos M_R, ${}_RN_S$ y T_S, existe un isomorfismo*

$$\tau_{M,N,T} : \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N, T))$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{M,N,T}(f)(m)(n) = f(m \otimes n)$, donde $f : M \otimes_R N \to T$, $m \in M$ y $n \in N$.

Demostración. Es inmediato observar que la función $\tau = \tau_{M,N,T}$ está bien definida (es decir, que $\tau(f)(m) \in \mathrm{Hom}_S(N,T)$ y $\tau(f) \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,T))$) y que es aditiva.

Veamos entonces que es una biyección. Si $\tau(f) = 0$ entonces $\tau(f)(m)(n) = f(m \otimes n) = 0$ para todo $m \in M$, $n \in N$. Esto implica que $f = 0$ pues los elementos de la forma $m \otimes n$ son generadores de $M \otimes_R N$, por lo que τ es inyectiva.

Para probar la sobreyectividad, consideremos $g \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,T))$ y definamos $\varphi : M \times N \to T$ como $\varphi(m,n) = g(m)(n)$. Es fácil probar que φ es una función R-biaditiva, por lo que la propiedad universal del producto tensorial nos asegura la existencia de un único morfismo de grupos $\widetilde{\varphi} : M \otimes_R N \to T$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & T \\ M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\widehat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego tenemos que $\widetilde{\varphi}((m \otimes n)s) = \widetilde{\varphi}(m \otimes ns) = \varphi(m, ns) = g(m)(ns) = g(m)(n)s = \varphi(m,n)s = \widetilde{\varphi}(m \otimes n)s$ para todo $s \in S,\ m \in M,\ n \in N$, por lo que $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, T)$. Dado que $g = \tau(\widetilde{\varphi})$ concluimos que τ es sobreyectiva.

Veamos ahora la naturalidad de τ en la primera variable. Si $f : M \to M'$ es un morfismo en Mod-R, observando que $\mathrm{Hom}_S(- \otimes_R N, T)$ y $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_S(N,T))$ son functores contravariantes podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_S(M' \otimes_R N, T) \arrow[r, "\tau_{M',N,T}"] \arrow[d, "(f \otimes \mathrm{id}_N)^*"] & \mathrm{Hom}_R(M', \mathrm{Hom}_S(N,T)) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, T) \arrow[r, "\tau_{M,N,T}"] & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,T)) \end{tikzcd}$$

Verifiquemos que este diagrama es conmutativo. Si $g \in \mathrm{Hom}_S(M' \otimes_R N, T),\ m \in M,\ n \in N$, entonces

$(f^* \circ \tau_{M',N,T})(g)(m)(n) = (\tau_{M',N,T}(g) \circ f)(m)(n) = \tau_{M',N,T}(g)(f(m))(n) = g(f(m) \otimes n)$

$(\tau_{M,N,T} \circ (f \otimes \mathrm{id}_N)^*)(g)(m)(n) = \tau_{M,N,T}(g \circ (f \otimes \mathrm{id}_N))(m)(n) = g \circ (f \otimes \mathrm{id}_N)(m \otimes n) = g(f(m) \otimes n)$

Para verificar la naturalidad en la segunda variable, consideremos $f : N \to N'$ un morfismo en R-Mod-S. Dado que los functores $\mathrm{Hom}_S(M \otimes_R -, T)$ y $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(-,T))$ son contravariantes, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N', T) \arrow[r, "\tau_{M,N',T}"] \arrow[d, "(id_M \otimes f)^*"] & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N',T)) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, T) \arrow[r, "\tau_{M,N,T}"] & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,T)) \end{tikzcd}$$

Si tomamos $g \in \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N', T),\ m \in M,\ n \in N$, entonces

$(f^* \circ \tau_{M,N',T})(g)(m)(n) = (\tau_{M,N',T}(g))(m)f(n) = g(m \otimes f(n))$

$(\tau_{M,N,T} \circ (id_M \otimes f)^*)(g)(m)(n) = \tau_{M,N,T}(g \circ (id_M \otimes f))(m)(n) = g \circ (id_M \otimes f)(m \otimes n) = g(m \otimes f(n))$

Finalmente, verifiquemos la naturalidad en la tercera variable. Sea $f : T \to T'$ un morfismo en Mod-S. Como $\mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, -)$ y $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N, -))$ son functores covariantes podemos considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, T) & \xrightarrow{\tau_{M,N,T}} & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,T)) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, T') & \xrightarrow{\tau_{M,N,T'}} & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,T')) \end{array}$$

Veamos que es conmutativo. Si $g \in \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, T)$, $m \in M$, $n \in N$, entonces

$$(f_* \circ \tau_{M,N,T})(g)(m)(n) = f \circ (\tau_{M,N,T}(g))(m)(n) = f(g(m \otimes n))$$

$$(\tau_{M,N,T'} \circ f_*)(g)(m)(n) = \tau_{M,N,T'}(f \circ g)(m)(n) = f \circ g(m \otimes n) = f(g(m \otimes n))$$

□

Probamos a continuación la versión derivada de la identidad anterior. El enunciado de este teorema puede verse en [CE56, prop. 5.1, capítulo XI], aunque la demostración que realizamos es una trivial adaptación de [EJ00, teo. 3.2.1].

Teorema A.1.2. *Dados dos anillos R y S y módulos M_R, ${}_RN_S$ y E_S con E inyectivo, existe un isomorfismo*

$$\sigma_{M,N,E} : \mathrm{Ext}^i_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,E)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tor}^R_i(M,N), E)$$

para cada $i \geq 0$.

Demostración. El caso $i = 0$ es la inversa de la identidad probada en el teorema anterior.

Para $i > 0$ consideremos $\mathbf{P}$ una resolución proyectiva de M. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^i_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,E)) =& H^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, \mathrm{Hom}_S(N,E)) \\ \simeq& H^i(Hom_S(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N, E)) \\ \simeq& \mathrm{Hom}_S(H^i(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N), E) \\ =& \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tor}^R_i(M,N), E) \end{aligned}$$

donde el primer isomorfismo es debido al teorema anterior y el segundo a que, por ser E inyectivo, los functores H^i y $\mathrm{Hom}_S(-, E)$ conmutan (proposición 1.3.5).

□

De manera análoga, es posible probar los siguientes resultados.

Teorema A.1.3 (Adjunción del Hom y el tensor 2)**.** *Dados dos anillos R y S y módulos ${}_RM$, ${}_SN_R$ y ${}_ST$, existe un isomorfismo*

$$\tau_{M,N,T} : \mathrm{Hom}_S(N \otimes_R M, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N,T))$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{M,N,T}(f)(m)(n) = f(n \otimes m)$, donde $f : N \otimes_R M \to T$, $m \in M$ y $n \in N$.

Demostración. [Rot09, teo. 2.76]. □

Teorema A.1.4. *Dados dos anillos R y S y módulos ${}_RM$, ${}_SN_R$ y ${}_SE$ con E inyectivo, existe un isomorfismo*

$$\sigma_{M,N,E} : \operatorname{Ext}^i_R(M, \operatorname{Hom}_S(N,E)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}^R_i(N,M), E)$$

para cada $i \geq 0$.

Demostración. [EJ00, teo. 3.2.1]. □

Continuamos con el siguiente teorema, que se puede encontrar en [AF92, prop. 20.7].

Teorema A.1.5. *Dados dos anillos R y S y módulos ${}_RM$, N_S y ${}_RT_S$, existe un isomorfismo*

$$\tau_{M,N,T} : \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_S(N,T)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(N, \operatorname{Hom}_R(M,T))$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{M,N,T}(f)(n)(m) = f(m)(n)$, donde $m \in M$, $n \in N$ y $f \in \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_S(N,T))$.

Demostración. Nuevamente, es inmediato verificar que τ está bien definida y es aditiva, y la naturalidad se prueba de manera similar a la del teorema A.1.1.

Para probar que $\tau = \tau_{M,N,T}$ es un isomorfismo, definimos una función

$$\eta : \operatorname{Hom}_S(N, \operatorname{Hom}_R(M,T)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_S(N,T))$$

de la siguiente manera: $\eta(f)(m)(n) = f(n)(m)$ donde $m \in M$, $n \in N$ y $f \in \operatorname{Hom}_S(N, \operatorname{Hom}_R(M,T))$.

Es sencillo ver que τ y η son inversas:

$$\tau\eta(f)(n)(m) = \eta(f)(m)(n) = f(n)(m), \qquad \eta\tau(g)(m)(n) = \tau(g)(n)(m) = g(m)(n)$$

siempre que $m \in M$, $n \in N$, $f \in \operatorname{Hom}_S(N, \operatorname{Hom}_R(M,T))$ y $g \in \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_S(N,T))$.

□

El siguiente teorema puede encontrarse enunciado en [AF92, prop. 20.11], aunque la demostración que presentamos es una leve adaptación de la que se encuentra en [CE56, prop. 5.2, capítulo VI].

Teorema A.1.6. *Sean R y S dos anillos y módulos P_R, ${}_SN_R$ y ${}_ST$. Si P es proyectivo y finitamente generado, existe un isomorfismo*

$$\tau_{P,N,T} : P \otimes_R \operatorname{Hom}_S(N,T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(P,N), T)$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{P,N,T}(p \otimes f)(g) = f(g(p))$, donde $p \in P$, $f \in \operatorname{Hom}_S(N,T)$ y $g \in \operatorname{Hom}_R(P,N)$.

Demostración. Es rutinario verificar que $\tau_{P,N,T}$ está bien definida y es aditiva, y la naturalidad en las tres variables es similar a la del teorema A.1.1. Veremos a continuación que $\tau = \tau_{P,N,T}$ es un isomorfismo.

Consideremos primero el caso en que $P = R$. En este caso tenemos isomorfismos dados por

$$R \otimes_R \operatorname{Hom}_S(N,T) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Hom}_S(N,T) \qquad \operatorname{Hom}_S(N,T) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(R,N), T)$$

$$\varphi(r \otimes f)(n) = f(nr) \qquad \psi(f)(g) = f(g(1))$$

Al componerlos obtenemos $\psi\varphi(r \otimes f)(g) = \varphi(r \otimes f)(g(1)) = f(g(1)r) = f(g(r))$, es decir, $\psi\varphi = \tau$ por lo que τ es un isomorfismo.

Dado que los functores involucrados son aditivos, esto claramente implica que τ es un isomorfismo si P es un módulo libre y finitamente generado. Luego, el mismo razonamiento nos permite concluir que τ es un isomorfismo en el caso en que P es proyectivo y finitamente generado, pues será sumando directo de un módulo libre finitamente generado.

□

Mostramos a continuación que el teorema anterior también es válido bajo diferentes hipótesis, como es posible ver en [EJ00, teo. 3.2.11].

Teorema A.1.7. *Sean R y S dos anillos y módulos M_R, ${}_SN_R$ y ${}_SE$. Si M es finitamente presentado y E inyectivo, existe un isomorfismo*

$$\nu_{M,N,E} : M \otimes_R \mathrm{Hom}_S(N,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(M,N),E)$$

natural en las tres variables dado por $\nu_{M,N,E}(m \otimes f)(g) = f(g(m))$, donde $m \in M$, $f \in \mathrm{Hom}_S(N,E)$ y $g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Demostración. Al igual que en el teorema anterior, es rutinario verificar que $\nu_{M,N,E}$ está bien definida y es aditiva y natural en las tres variables, por lo que probaremos simplemente que $\nu = \nu_{M,N,E}$ es un isomorfismo.

Como M es finitamente presentado, existe una sucesión exacta

$$F_1 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

con F_0, F_1 R-módulos finitamente generados y libres.

Por un lado, la exactitud a derecha del functor $- \otimes_R \mathrm{Hom}_S(N,E)$ nos da la sucesión exacta

$$F_1 \otimes_R \mathrm{Hom}_S(N,E) \longrightarrow F_0 \otimes_R \mathrm{Hom}_S(N,E) \longrightarrow M \otimes_R \mathrm{Hom}_S(N,E) \longrightarrow 0$$

Por otro lado, la exactitud a izquierda del functor contravariante $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ nos da la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_1,N)$$

y al aplicarle el functor contravariante $\mathrm{Hom}_S(-,E)$, que es exacto a derecha por ser E inyectivo, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(F_1,N),E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(F_0,N),E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(M,N),E) \longrightarrow 0$$

Consideremos entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_1 \otimes_R \mathrm{Hom}_S(N,E) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{F_1,N,E}"] & F_0 \otimes_R \mathrm{Hom}_S(N,E) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{F_0,N,E}"] & M \otimes_R \mathrm{Hom}_S(N,E) \arrow[r] \arrow[d, "\nu_{M,N,E}"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(F_1,N),E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(F_0,N),E) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(M,N),E) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde los dos primeros mapas verticales son los isomorfismos que obtenemos al aplicar el teorema anterior (pues los F_i son módulos proyectivos y finitamente generados). Por el lema de los tres 1.1.15, basta probar que el diagrama es conmutativo para concluir que ν es un isomorfismo.

La naturalidad de τ en la primera variable nos asegura que el cuadrado de la izquierda en nuestro diagrama conmuta. Para verificar la conmutatividad del cuadrado de la derecha, consideremos $x \in F_0$, $f \in \operatorname{Hom}_S(N,E)$ y $g \in \operatorname{Hom}_R(M,N)$. Recorriendo el diagrama obtenemos

$x \otimes f \mapsto \varphi(x) \otimes f \mapsto \nu(\varphi(x) \otimes f)$, donde $\nu(\varphi(x) \otimes f)(g) = f(g(\varphi(x)))$.

$x \otimes f \mapsto \tau(x \otimes f) \mapsto \varphi^*(\tau(x \otimes f))$, donde $\varphi^*(\tau(x \otimes f))(g) = \tau(x \otimes f)(g\varphi) = f(g\varphi(x))$.

□

Presentamos ahora la derivada de la identidad natural probada en el teorema anterior, análoga a la que se encuentra en [EJ00, teo. 3.2.13].

Teorema A.1.8. *Sean R y S dos anillos y módulos M_R, ${}_SN_R$ y ${}_SE$. Si R es noetheriano a derecha, M finitamente generado y E inyectivo, existe un isomorfismo*

$$\operatorname{Tor}_i^R(M, \operatorname{Hom}_S(N,E)) \simeq \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Ext}_R^i(M,N),E)$$

para todo $i \geq 0$.

Demostración. El caso $i = 0$ es el isomorfismo probado en el teorema anterior.

Como M es finitamente generado y R noetheriano, podemos considerar una resolución proyectiva $\mathbf{P}_\bullet$ de M en la que cada módulo proyectivo es además finitamente generado. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Tor}_i^R(M, \operatorname{Hom}_S(N,E)) &= H^i(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R \operatorname{Hom}_S(N,E)) \\ &\simeq H^i(\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N), E)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_S(H^i(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)), E) \\ &= \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Ext}_R^i(M,N), E)\end{aligned}$$

donde el primer isomorfismo es debido al teorema anterior y el segundo a que, por ser E inyectivo, los functores H^i y $\operatorname{Hom}_S(-,E)$ conmutan (proposición 1.3.5).

□

Observar que este teorema es trivial bajo las hipótesis del teorema A.1.6, ya que al ser P proyectivo tenemos $\operatorname{Tor}_i^R(P, \operatorname{Hom}_S(N,T)) = \operatorname{Ext}_R^i(P,N) = 0$ para todo $i > 0$.

De manera análoga, es posible probar los siguientes resultados.

Teorema A.1.9. *Sean R y S dos anillos y módulos ${}_RP$, ${}_RN_S$ y T_S. Si P es proyectivo y finitamente generado, existe un isomorfismo*

$$\tau_{P,N,T} : \operatorname{Hom}_S(N,T) \otimes_R P \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(P,N),T)$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{P,N,T}(f \otimes p)(g) = f(g(p))$, donde $p \in P$, $f \in \operatorname{Hom}_S(N,T)$ y $g \in \operatorname{Hom}_R(P,N)$.

Demostración. [CE56, prop. 5.2, capítulo VI]. □

Teorema A.1.10. *Sean R y S dos anillos y módulos ${}_RM$, ${}_RN_S$ y E_S. Si M es finitamente presentado y E inyectivo, existe un isomorfismo*

$$\nu_{M,N,E} : \operatorname{Hom}_S(N,E) \otimes_R M \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(M,N),E)$$

natural en las tres variables dado por $\nu_{M,N,E}(f \otimes m)(g) = f(g(m))$*, donde* $m \in M$*,* $f \in \operatorname{Hom}_S(N, E)$ *y* $g \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$*.*

Demostración. [Rot09, lema 9.71]. □

Teorema A.1.11. *Sean* R *y* S *dos anillos y módulos* ${}_RM$*,* ${}_RN_S$ *y* E_S*. Si* R *es noetheriano a izquierda,* M *finitamente generado y* E *inyectivo, existe un isomorfismo*

$$\operatorname{Tor}_i^R(\operatorname{Hom}_S(N, E), M) \simeq \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Ext}_R^i(M, N), E)$$

para todo $i \geq 0$*.*

Demostración. [EJ00, teo. 3.2.13]. □

A continuación presentamos una última serie de identidades naturales.

Teorema A.1.12. *Sean* R *y* S *dos anillos y módulos* ${}_RP$*,* ${}_RN_S$ *y* ${}_ST$*. Si* P *es finitamente generado y proyectivo, existe un isomorfismo*

$$\tau_{P,N,T} : \operatorname{Hom}_R(P, N) \otimes_S T \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P, N \otimes_S T)$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{P,N,T}(f \otimes t)(p) = f(p) \otimes t$*, donde* $p \in P$*,* $t \in T$ *y* $f \in \operatorname{Hom}_R(P, N)$*.*

Demostración. Esta prueba es similar a la del teorema A.1.6, y se puede encontrar en [AF92, prop. 20.10].

□

Al igual que en el caso del teorema A.1.6, es posible probar este isomorfismo bajo diferentes hipótesis.

Teorema A.1.13. *Sean* R *y* S *dos anillos y módulos* ${}_RM$*,* ${}_RN_S$ *y* ${}_SF$*. Si* M *es finitamente presentado y* F *plano, existe un isomorfismo*

$$\tau_{M,N,F} : \operatorname{Hom}_R(M, N) \otimes_S F \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N \otimes_S F)$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{M,N,F}(f \otimes x)(m) = f(m) \otimes x$*, donde* $m \in M$*,* $x \in F$ *y* $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$*.*

Demostración. Esta prueba es similar a la del teorema A.1.7, y se halla enunciada en [EJ00, teo. 3.2.14].

□

El siguiente teorema se trata de la derivada de la identidad anterior.

Teorema A.1.14. *Sean* R *y* S *dos anillos y módulos* ${}_RM$*,* ${}_RN_S$ *y* ${}_SF$*. Si* R *es noetheriano a izquierda,* M *finitamente presentado y* F *plano, existe un isomorfismo*

$$\operatorname{Ext}_R^i(M, N) \otimes_S F \simeq \operatorname{Ext}_R^i(M, N \otimes_S F)$$

para todo $i \geq 0$*.*

Demostración. Esta prueba es similar a la de los teoremas A.1.2 y A.1.8, y puede verse enunciada en [AF92, teo. 3.2.15].

□

Observar que este teorema es trivial bajo las hipótesis del teorema A.1.12, ya que al ser P proyectivo tenemos $\mathrm{Ext}^i_R(P,N) = \mathrm{Ext}^i_R(P, N \otimes_S T) = 0$ para todo $i > 0$.

De manera análoga tenemos los siguientes isomorfismos.

Teorema A.1.15. *Sean R y S dos anillos y módulos ${}_RP$, ${}_RN_S$ y ${}_ST$. Si P es finitamente generado y proyectivo, existe un isomorfismo*

$$\tau_{P,N,T} : T \otimes_S \mathrm{Hom}_R(P,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, N \otimes_S T)$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{P,N,T}(t \otimes f)(p) = f(p) \otimes t$, donde $p \in P$, $t \in T$ y $f \in \mathrm{Hom}_R(P,N)$.

Teorema A.1.16. *Sean R y S dos anillos y módulos ${}_RM$, ${}_RN_S$ y ${}_SF$. Si M es finitamente presentado y F plano, existe un isomorfismo*

$$\tau_{M,N,F} : F \otimes_S \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_S F)$$

natural en las tres variables dado por $\tau_{M,N,F}(x \otimes f)(m) = f(m) \otimes x$, donde $m \in M$, $x \in F$ y $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Demostración. [Rot09, lema 4.86]. □

Teorema A.1.17. *Sean R y S dos anillos y módulos ${}_RM$, ${}_RN_S$ y ${}_SF$. Si R es noetheriano a derecha, M finitamente presentado y F plano, existe un isomorfismo*

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \otimes_S F \simeq \mathrm{Ext}^i_R(M, N \otimes_S F)$$

para todo $i \geq 0$.

A.2. Aplicación: teoremas de Ishikawa

Es muy sencillo observar (por ejemplo, utilizando la adjunción entre Hom y el tensor probada en el teorema A.1.1) que si R es un anillo conmutativo y M, N son R-módulos proyectivos, entonces $M \otimes_R N$ es también un R-módulo proyectivo. Sin embargo, esto deja de ser cierto si consideramos módulos inyectivos.

La pregunta *¿Es el producto tensorial de dos módulos inyectivos sobre un anillo conmutativo también inyectivo?* fue propuesta originalmente por N. Yoneda, y en 1965 T. Ishikawa mostró que la respuesta es afirmativa en el caso en que R es noetheriano y su envolvente inyectiva es un R-módulo plano.

Nuestro objetivo en esta sección será demostrar un teorema debido a T. Ishikawa que juega un rol importante en la prueba de esta afirmación, y que muestra cierta “dualidad” entre módulos planos e inyectivos. Concretamente, veremos que si R y S son anillos cualesquiera, y consideramos módulos ${}_RM_S$ y E_S donde E es un cogenerador inyectivo en Mod-S, entonces

$$\mathrm{l.fd}_R\, M = \mathrm{r.id}_R\, \mathrm{Hom}_S(M,E)$$

Si además R es noetheriano a izquierda, entonces

$$\mathrm{l.\,id}_R\, M = \mathrm{r.\,fd}_R \operatorname{Hom}_S(M, E)$$

Con esta finalidad introduciremos los conceptos de cogenerador inyectivo y de caracter de un módulo, y presentaremos algunos resultados de utilidad cuyas demostraciones hacen uso de las identidades probadas anteriormente.

Comenzamos con el siguiente resultado, conocido como "Injective producing lemma".

Proposición A.2.1. *Sean R y S dos anillos, y módulos ${}_RF_S$, E_S donde ${}_RF$ es plano y E_S inyectivo. Entonces $\operatorname{Hom}_S(F, E)$ es un R-módulo inyectivo.*

Demostración. Debemos probar que el functor $\operatorname{Hom}_R(-, \operatorname{Hom}_S(F, E))$ es exacto, lo cual es equivalente a probar la exactitud del functor $\operatorname{Hom}_S(- \otimes_R F, E)$ debido al teorema A.1.1. Sin embargo, $\operatorname{Hom}_S(- \otimes_R F, E) = \operatorname{Hom}_S(-, E) \circ - \otimes_R F$ y ambos functores son exactos, pues F es plano y E inyectivo.

□

De manera similar, es posible demostrar la siguiente proposición.

Proposición A.2.2. *Sean R y S dos anillos, y módulos P_R, ${}_RQ_S$ donde P_R y Q_S son proyectivos. Entonces $P \otimes_R Q$ es un S-módulo proyectivo.*

Demostración. Debemos probar que el functor $\operatorname{Hom}_S(P \otimes_R Q, -)$ es exacto, lo cual es equivalente a probar que el functor $\operatorname{Hom}_R(P, \operatorname{Hom}_S(Q, -))$ es exacto, debido al teorema A.1.1. Pero tenemos que $\operatorname{Hom}_R(P, \operatorname{Hom}_S(Q, -)) = \operatorname{Hom}_S(P, -) \circ \operatorname{Hom}_S(Q, -)$ y ambos functores son exactos por ser P y Q proyectivos.

□

Introducimos ahora un concepto que nos será de gran utilidad en lo que resta de esta sección.

Definición A.2.3. Decimos que un R-módulo inyectivo E es un cogenerador inyectivo en R-Mod si para cada R-módulo M y cada elemento no nulo $x \in M$ existe $f \in \operatorname{Hom}_R(M, E)$ tal que $f(x) \neq 0$.

Observación A.2.4. La definición anterior es equivalente a que $\operatorname{Hom}_R(M, E) \neq 0$ para todo R-módulo no nulo M, ya que si $x \in M$ es no nulo entonces debe existir un morfismo no nulo $f \in \operatorname{Hom}_R(Rx, E)$, y como E es inyectivo se extiende a un morfismo (no nulo) $\widetilde{f} \in \operatorname{Hom}_R(M, E)$.

Ejemplo A.2.5. El grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo en la categoría de grupos abelianos.

Sabemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, pues es divisible. Luego, si M es un grupo abeliano y $x \in M$ es no nulo, podemos definir un morfismo no nulo $f \in \operatorname{Hom}_Z(Zx, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ de la siguiente manera: si x es libre de torsión, elegimos un elemento no nulo $\overline{\frac{p}{q}} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y definimos $f(nx) = \overline{\frac{np}{q}}$; de lo contrario, si $m \in \mathbb{N}$ es el menor natural tal que $mx = 0$, definimos $f(nx) = \overline{\frac{n}{m}}$.

Es fácil ver que f definido de esta manera efectivamente es un morfismo, y luego se extiende a $\widetilde{f} \in \operatorname{Hom}_Z(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ gracias a la inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Definición A.2.6. Si M es un R-módulo, definimos su módulo caracter como $M^+ = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Observación A.2.7. El ejemplo anterior nos asegura que M^+ es un R-módulo a derecha no nulo para cada R-módulo a izquierda M no nulo.

En adelante utilizaremos cogeneradores inyectivos con frecuencia. La proposición siguiente nos asegura que esto tiene sentido, pues para todo anillo R existe al menos un cogenerador inyectivo en R-Mod.

Proposición A.2.8. *Si R es un anillo, entonces $R^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un cogenerador inyectivo en* R-Mod*.*

Demostración. Dado que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo y R un R-módulo plano, la proposición A.2.1 nos asegura que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo inyectivo.

Ahora, si M es un R-módulo no nulo, por el teorema A.1.1 tenemos

$$\mathrm{Hom}_R(M, R^+) = \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = M^+$$

siendo este último no nulo, lo que implica que R^+ es un cogenerador inyectivo.

□

Lema A.2.9. *Sean R y S anillos, E un cogenerador inyectivo en* R-Mod*, y bimódulos M', M, M'' en* R-Mod-S*.*

1. $M' \xrightarrow{\varphi} M$ *es un monomorfismo en* R-Mod-S *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_R(M, E) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_R(M', E)$ *es un epimorfismo en* S-Mod*.*
2. $M \xrightarrow{\psi} M''$ *es un epimorfismo en* R-Mod-S *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_R(M'', E) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M, E)$ *es un monomorfismo en* S-Mod*.*
3. *Una sucesión* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ *en* R-Mod-S *es exacta si y solo si la sucesión en* S-Mod $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', E) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M, E) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_R(M', E) \longrightarrow 0$ *también lo es.*

Demostración. [EJ00, lema 3.2.8]. □

Comenzamos ahora a establecer la relación entre los módulos inyectivos y planos antes mencionada.

Teorema A.2.10. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $F \in$* R-Mod-S*:*

1. *F es un R-módulo plano,*
2. $\mathrm{Hom}_S(F, E)$ *es un R-módulo a derecha inyectivo para todo S-módulo a derecha inyectivo E,*
3. $\mathrm{Hom}_S(F, E)$ *es un R-módulo a derecha inyectivo para algún E cogenerador inyectivo en* Mod-S*.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Es la proposición A.2.1.

$(2 \Rightarrow 3)$. Es trivial.

$(3 \Rightarrow 1)$. Consideremos una sucesión exacta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ en Mod-R. La sucesión $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', \mathrm{Hom}_S(F, E)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(F, E)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', \mathrm{Hom}_S(F, E)) \longrightarrow 0$ es exacta por hipótesis, pues el functor $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_S(F, E))$ es exacto. Luego tenemos que la sucesión

$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(M'' \otimes_R F, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(M \otimes_R F, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(M' \otimes_R F, E) \longrightarrow 0$ es exacta por el teorema A.1.1, y como E es un cogenerador inyectivo, el lema anterior nos da la exactitud de la sucesión $0 \longrightarrow M' \otimes_R F \longrightarrow M \otimes_R F \longrightarrow M'' \otimes_R F \longrightarrow 0$, lo cual implica que F es plano.

□

Corolario A.2.11. *Si F es un R-módulo a izquierda, entonces F es plano si y sólo si el módulo caracter F^+ es inyectivo como R-módulo a derecha.*

Observación A.2.12. Este resultado nos permite probar una desigualdad en el teorema de Ishikawa. Recordemos que uno de nuestros objetivos es probar que si tenemos módulos ${}_RM_S$ y E_S donde E es un cogenerador inyectivo en Mod-S, entonces $\operatorname{l.fd}_R M = \operatorname{r.id}_R \operatorname{Hom}_S(M, E)$.

Supongamos entonces que $\operatorname{l.fd}_R M = n$, y consideremos una resolución plana

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Por el teorema anterior sabemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(M, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(F_0, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(F_1, E) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(F_n, E) \longrightarrow 0$$

es una resolución inyectiva del R-módulo a derecha $\operatorname{Hom}_S(M, E)$, por lo que $\operatorname{r.id}_R \operatorname{Hom}_S(M, E) \leq n$, es decir, $\operatorname{l.fd}_R M \geq \operatorname{r.id}_R \operatorname{Hom}_S(M, E)$.

Observar que no podemos deducir de la misma manera la desigualdad en el otro sentido, pues nada nos asegura que en una resolución inyectiva de $\operatorname{Hom}_S(M, E)$ cada término inyectivo sea de la forma $\operatorname{Hom}_S(F, E)$ con F plano.

Recordemos que en el caso de los módulos inyectivos tenemos el útil criterio de Baer, que nos dice que para verificar la inyectividad de un R-módulo E basta hacerlo en los monomorfismos $0 \longrightarrow I \hookrightarrow R$ para los ideales izquierdos $I \subset R$. Sabemos además que esto nos da una nueva caracterización de los módulos inyectivos: E es un R-módulo inyectivo si y solo si $\operatorname{Ext}^1_R(R/I, E) = 0$ para todo ideal izquierdo $I \subset R$ (proposición 4.1.8).

El siguiente teorema exhibe una versión análoga a estos resultados para módulos planos.

Teorema A.2.13. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un R-módulo a izquierda F.*

1. *F es plano,*
2. *$\operatorname{Tor}^R_1(R/I, F) = 0$ para todo ideal a derecha finitamente generado $I \subset R$,*
3. *la sucesión $0 \longrightarrow I \otimes_R F \longrightarrow F$ es exacta para todo ideal a derecha finitamente generado $I \subset R$.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ y $(2 \Rightarrow 3)$ son triviales.

$(3 \Rightarrow 1)$ Para ver que F es plano usaremos el corolario A.2.11 y probaremos que F^+ es inyectivo.

Sabemos que todo ideal puede ser expresado como un límite directo de ideales finitamente generados (proposición 1.1.7); luego como los límites directos preservan sucesiones exactas (proposición 1.1.13) la afirmación 3 es equivalente con que $0 \longrightarrow I \otimes_R F \longrightarrow F$ es exacta para todo ideal a derecha $I \subset R$.

Por el lema A.2.9 esto implica que la sucesión $F^+ \longrightarrow (I \otimes_R F)^+ \longrightarrow 0$ es exacta. Pero $F^+ \simeq (R \otimes_R F)^+ = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ e $(I \otimes_R F)^+ = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(I \otimes_R F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ por lo que por el teorema A.1.1

la exactitud de esta sucesión es equivalente con la exactitud de $\operatorname{Hom}_R(R, F^+) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(I, F^+) \longrightarrow 0$ y como esto es cierto para todo ideal $I \subset R$, el criterio de Baer nos asegura que F^+ es inyectivo.

□

Haciendo uso de este teorema, es posible obtener el siguiente resultado "dual" (en algún sentido) al teorema A.2.10.

Teorema A.2.14. *Si R es un anillo noetheriano a izquierda, las siguientes afirmaciones son equivalentes para E en* R-Mod-S*:*

1. *E es un R-módulo a izquierda inyectivo,*
2. *$\operatorname{Hom}_S(E, E')$ es un R-módulo a derecha plano para todo S-módulo a derecha inyectivo E',*
3. *$\operatorname{Hom}_S(E, E')$ es un R-módulo a derecha plano para algún E' cogenerador inyectivo en* Mod-S*,*
4. *$E \otimes_S F$ es un R-módulo a izquierda inyectivo para todo S-módulo a izquierda plano F,*
5. *$E \otimes_S F$ es un R-módulo a izquierda inyectivo para algún S-módulo a izquierda fielmente plano F.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Si I es un ideal izquierdo de R, entonces I es finitamente generado y por lo tanto finitamente presentado, por ser R noetheriano.

Como E es inyectivo, para todo E' inyectivo podemos considerar la sucesión exacta $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(I, E), E') \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(R, E), E')$ por lo que el teorema A.1.10 implica que $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(E, E') \otimes_R I \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(E, E') \otimes_R R$ es exacta. Luego $\operatorname{Hom}_S(E, E')$ es plano por el teorema A.2.13.

$(2 \Rightarrow 3)$ y $(4 \Rightarrow 5)$ son triviales.

$(3 \Rightarrow 1)$. Esto se prueba revirtiendo la prueba de $(1 \Rightarrow 2)$ y utilizando el hecho de que E' es un cogenerador inyectivo.

$(1 \Rightarrow 4)$. Sea $I \subset R$ un ideal. Como E es inyectivo, podemos considerar la sucesión exacta $\operatorname{Hom}_R(R, E) \otimes_S F \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(I, E) \otimes_S F \longrightarrow 0$, pero luego utilizando el teorema A.1.13 (pues F es plano) obtenemos la exactitud de $\operatorname{Hom}_R(R, E \otimes_S F) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(I, E \otimes_S F) \longrightarrow 0$ lo cual implica, por el criterio de Baer, que $E \otimes_S F$ es inyectivo.

$(5 \Rightarrow 1)$. Esto se prueba revirtiendo la prueba de $(1 \Rightarrow 4)$ y utilizando el hecho de que F es fielmente plano.

□

Corolario A.2.15. *Si R es un anillo noetheriano a izquierda, entonces un R-módulo a izquierda E es inyectivo si y sólo si el módulo caracter E^+ es un R-módulo a derecha plano.*

Observación A.2.16. Al igual que en la observación A.2.12, utilizando el teorema anterior podemos ver que si R es noetheriano a izquierda, entonces $\operatorname{l.id}_R M \geq \operatorname{r.fd}_R \operatorname{Hom}_S(M, E)$.

Con los teoremas presentados, finalmente estamos en condiciones de demostrar el teorema de Ishikawa.

Teorema A.2.17. *Sean R y S anillos, y módulos ${}_RM_S$, E_S donde E es un cogenerador inyectivo en* Mod-S. *Entonces* $\operatorname{l.fd}_R M = \operatorname{r.id}_R \operatorname{Hom}_S(M, E)$. *Si además R es noetheriano a izquierda, entonces* $\operatorname{l.id}_R M = \operatorname{r.fd}_R \operatorname{Hom}_S(M, E)$.

Demostración. Veamos primero que $\operatorname{l.fd}_R M = \operatorname{r.id}_R \operatorname{Hom}_S(M, E)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{l.fd}_R M = n &\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Tor}^R_{n+1}(A, M) = 0 \text{ para todo } A \in \text{Mod-R} \\
&\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}^R_{n+1}(A, M), E) = 0 \text{ para todo } A \in \text{Mod-R} \\
&\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Ext}^{n+1}_R(A, \operatorname{Hom}_S(M, E)) = 0 \text{ para todo } A \in \text{Mod-R} \\
&\iff \operatorname{r.id}_R \operatorname{Hom}_S(M, E) = n
\end{aligned}$$

donde la segunda equivalencia se debe a que $\operatorname{Hom}_S(X, E) = 0$ si y sólo si $X = 0$ por ser E cogenerador inyectivo en Mod-S, y la tercera al isomorfismo del teorema A.1.2.

Supongamos ahora que R es un anillo noetheriano a izquierda. Tenemos entonces las siguiente cadena de equivalencias

$$\begin{aligned}
\operatorname{l.id}_R M = n &\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/I, M) = 0 \text{ para todo ideal } I \subset R \\
&\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/I, M), E) = 0 \text{ para todo ideal } I \subset R \\
&\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Tor}^R_{n+1}(\operatorname{Hom}_S(M, E), R/I) = 0 \text{ para todo ideal } I \subset R \\
&\iff \operatorname{r.fd}_R \operatorname{Hom}_S(M, E) = n
\end{aligned}$$

donde la primera equivalencia se debe a la proposición 4.1.8, la segunda a que E es un cogenerador inyectivo en Mod-S, la tercera al isomorfismo del teorema A.1.11 y la cuarta al teorema A.2.13.

□

De manera similar es posible probar el siguiente teorema, debido también a Ishikawa.

Teorema A.2.18. *Sean R y S anillos, y módulos ${}_RM_S$, ${}_SF$ donde F es fielmente plano. Si R es noetheriano a derecha, entonces* $\operatorname{l.id}_R M = \operatorname{l.id}_R M \otimes_S F$.

Demostración. El teorema se debe a las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
\operatorname{l.id}_R M = n &\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/I, M) = 0 \text{ para todo ideal } I \subset R \\
&\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/I, M) \otimes_S F = 0 \text{ para todo ideal } I \subset R \\
&\iff n \text{ es el primer natural tal que } \operatorname{Ext}^{n+1}_R(R/I, M \otimes_S F) = 0 \text{ para todo ideal } I \subset R \\
&\iff \operatorname{l.id}_R M \otimes_S F = n
\end{aligned}$$

donde la primera y cuarta equivalencia se deben a la proposición 4.1.8, la segunda a que $X \otimes_S F = 0$ si y sólo si $X = 0$ por ser F fielmente plano, y la tercera al isomorfismo del teorema A.1.17.

□

Para finalizar esta sección, mostramos un último resultado y sus consecuencias respecto al teorema de Ishikawa.

Teorema A.2.19. *Todo R-módulo plano y finitamente presentado es proyectivo.*

Demostración. Sea F un R-módulo plano y finitamente presentado, y consideremos una sucesión exacta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$.

Queremos probar que la sucesión $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, M'') \longrightarrow 0$ es exacta, o lo que es equivalente, que $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, M'')^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, M)^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F, M')^+ \longrightarrow 0$ es exacta.

A partir de la sucesión exacta inicial podemos deducir la exactitud de $0 \longrightarrow M''^+ \longrightarrow M^+ \longrightarrow M'^+ \longrightarrow 0$, y como F es plano tenemos que $0 \longrightarrow F \otimes_R M''^+ \longrightarrow F \otimes_R M^+ \longrightarrow F \otimes_R M'^+ \longrightarrow 0$ es exacta.

Pero $F \otimes_R X^+ = F \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(F, X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_R(F, X)^+$ donde el isomorfismo se debe al teorema A.1.7, y la naturalidad de este isomorfismo nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F \otimes_R M''^+ & \longrightarrow & F \otimes_R M^+ & \longrightarrow & F \otimes_R M'^+ & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(F, M'')^+ & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(F, M)^+ & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(F, M')^+ & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Como la primera fila es exacta y los mapas verticales son isomorfismos, la segunda fila debe ser exacta.

□

Corolario A.2.20. *Si R es un anillo noetheriano a izquierda, entonces un R-módulo a izquierda finitamente generado es plano si y sólo si es proyectivo.*

Sabemos que si R es un anillo noetheriano a izquierda y M un R-módulo a izquierda finitamente generado, es posible tomar resoluciones proyectivas de M en las que los términos proyectivos sean también finitamente generados. Esto mismo se puede hacer al tomar resoluciones planas, lo cual junto con el teorema anterior nos dice que en este caso $\mathrm{fd}_R M = \mathrm{pd}_R M$.

Obtenemos entonces el siguiente resultado, a partir del teorema A.2.19 y el teorema de Ishikawa.

Corolario A.2.21. *Si R y S son anillos, con R noetheriano a izquierda, y consideramos módulos ${}_R M_S$, E_S donde M es finitamente generado sobre R y E es un cogenerador inyectivo en* Mod-S*, entonces* $\mathrm{l.\,pd}_R M = \mathrm{r.\,id}_R \mathrm{Hom}_S(M, E)$.

Observación A.2.22. No es posible a priori emplear este razonamiento para concluirir que $\mathrm{l.\,id}_R M = \mathrm{r.\,pd}_R \mathrm{Hom}_S(M, E)$, pues a pesar de que M sea finitamente generado puede que $\mathrm{Hom}_S(M, E)$ no lo sea.

Bibliografía

[AB69] Maurice Auslander and Mark Bridger. Stable module theory. *Memoirs of the American Mathematical Society*, (94), 1969.

[AF92] Frank Anderson and Kent Fuller. *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag, 1992.

[AM69] Michael Atiyah and Ian Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, 1969.

[AR75] Maurice Auslander and Idun Reiten. Representation theory of Artin algebras. *Communications in Algebra*, 3:239–294, 1975.

[ARS95] Maurice Auslander, Idun Reiten, and Sverre Smalø. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge University Press, 1995.

[ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras*, volume 1. Cambridge University Press, 2006.

[Aus55] Maurice Auslander. On the dimension of modules and algebras (III), Global dimension. *Nagoya Mathematical Journal*, 9:67–77, 1955.

[Bas60] Hyman Bass. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(3):466–488, 1960.

[CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, 1956.

[CLS82] C. Cibils, F. Larrión, and L. Salmerón. *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*. Universidad Nacional Autónoma de México, 1982.

[EJ00] Edgar Enochs and Overtoun Jenda. *Relative homological algebra*. Walter de Gruyter, 2000.

[FLM14] Sônia Fernandes, Marcelo Lanzilotta, and Octavio Mendoza. The ϕ-dimension: a new homological measure. *Algebras and Representation Theory*, 2014.

[Hap91] Dieter Happel. Homological conjecture in representation theory of finite-dimensional algebras. Sherbrooke Lecture Notes Series, 1991. available from http://www.math.ntnu.no/ oyvinso/Nordfjordeid/Program/references.html.

[HLM08] François Huard, Marcelo Lanzilotta, and Octavio Mendoza. An approach to the finitistic dimension conjecture. *Journal of Algebra*, (319):3918–3934, 2008.

[HS71] Peter Hilton and Urs Stammbach. *A course in homological algebra*. Springer-Verlag, 1971.

[Ish65] Takeshi Ishikawa. On injective modules and flat modules. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 17(3):291–296, 1965.

[IT05] Kiyoshi Igusa and Gordana Todorov. On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras. *Representation of algebras and related topics*, 45:201–204, 2005.

[LH13] Marcelo Lanzilotta and François Huard. Self-injective right artinian rings and Igusa Todorov functions. *Algebras and Representation Theory*, 16(3):765–770, 2013.

[LMS] Marcelo Lanzilotta, Octavio Mendoza, and Corina Sáenz. Relative Igusa-Todorov functions for abelian length categories. (preprint).

[Par70] Bodo Pareigis. *Categories and functors*. Academic Press, 1970.

[Rot09] Joseph Rotman. *An introduction to homological algebra*. Springer, 2009.

[RS11] Simon Rubinstein-Salzedo. Finitistic dimension of monomial algebras, 2011. available from http://web.stanford.edu/ simonr/monalg.pdf.