Polynomialité des nombres de Kostka et des coefficients de Littlewood-Richardson

Etienne Rassart

Massachusetts Institute of Technology

17 octobre 2003

En collaboration avec Sara Billey et Victor Guillemin

Plan

- Introduction (avec dessins)
- Une fonction de partition pour les $K_{\lambda\beta}$
- Un peu de géométrie symplectique
- Les arrangements de Kostant
- Polynomialité dans le complexe
- Phénomènes de factorisation
- Coefficients de Littlewood-Richardson

Introduction

- Les nombres de Kostka apparaissent en combinatoire et en théorie de la représentation.

Introduction

- Les nombres de Kostka apparaissent en combinatoire et en théorie de la représentation.

- Le nombre de Kostka $K_{\lambda\beta}$ est le nombre de tableaux de Young semistandard de forme λ et contenu β.

Introduction

- Les nombres de Kostka apparaissent en combinatoire et en théorie de la représentation.

- Le nombre de Kostka $K_{\lambda\beta}$ est le nombre de tableaux de Young semistandard de forme λ et contenu β.

- $K_{\lambda\beta}$ est aussi la multiplicité avec laquelle le poids β apparaît dans la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_k\mathbb{C}$ (ou $\mathrm{SL}_k(\mathbb{C})$) avec plus grand poids λ .

Les fonctions de Schur

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{T \in \mathrm{TYSS}(\lambda; k)} \mathbf{x}^T .$$

$$\begin{array}{|c|c}\hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c}\hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c}\hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c}\hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c}\hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c}\hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c}\hline 3 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c}\hline 3 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$x_1^2x_2 \quad x_1^2x_3 \quad x_1x_2^2 \quad x_1x_2x_3 \quad x_1x_2x_3 \quad x_1x_3^2 \quad x_2^2x_3 \quad x_2x_3^2$$

Les fonctions de Schur

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{T \in \mathrm{TYSS}(\lambda; k)} \mathbf{x}^T .$$

$\begin{array}{\|c\|c} \hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c\|}{1} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c} \hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c\|}{1} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c} \hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c\|}{2} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c} \hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c\|}{2} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c} \hline 2 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c\|}{3} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c} \hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c\|}{3} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c} \hline 3 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c\|}{2} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c} \hline 3 & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c\|}{3} \\ \hline \end{array}$
$x_1^2 x_2$	$x_1^2 x_3$	$x_1 x_2^2$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_3^2$	$x_2^2 x_3$	$x_2 x_3^2$

$$\begin{aligned} s_{\begin{array}{|c|c} \hline \ & \\ \hline \ & \multicolumn{1}{c|}{\ } \\ \hline \end{array}}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 \\ &\quad + 2\, x_1 x_2 x_3 . \end{aligned}$$

Les nombres de Kostka

- À partir de la définition des fonctions de Schur,

$$s_\lambda = \sum_\beta K_{\lambda\beta}\, \mathbf{x}^\beta\,,$$

où $K_{\lambda\beta}$ est le nombre de façons de remplir un TYSS de forme λ avec des entiers distribués selon la composition β.

Les nombres de Kostka

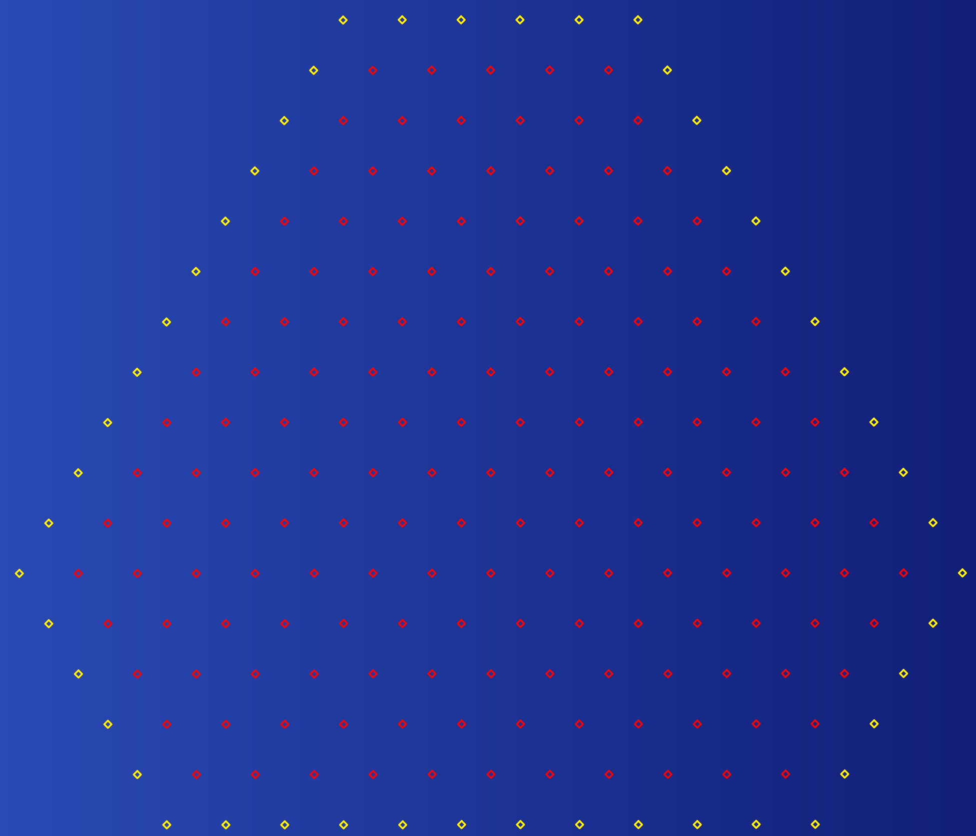
- À partir de la définition des fonctions de Schur,

$$s_\lambda = \sum_\beta K_{\lambda\beta}\,\mathbf{x}^\beta\,,$$

  où $K_{\lambda\beta}$ est le nombre de façons de remplir un TYSS de forme λ avec des entiers distribués selon la composition β.

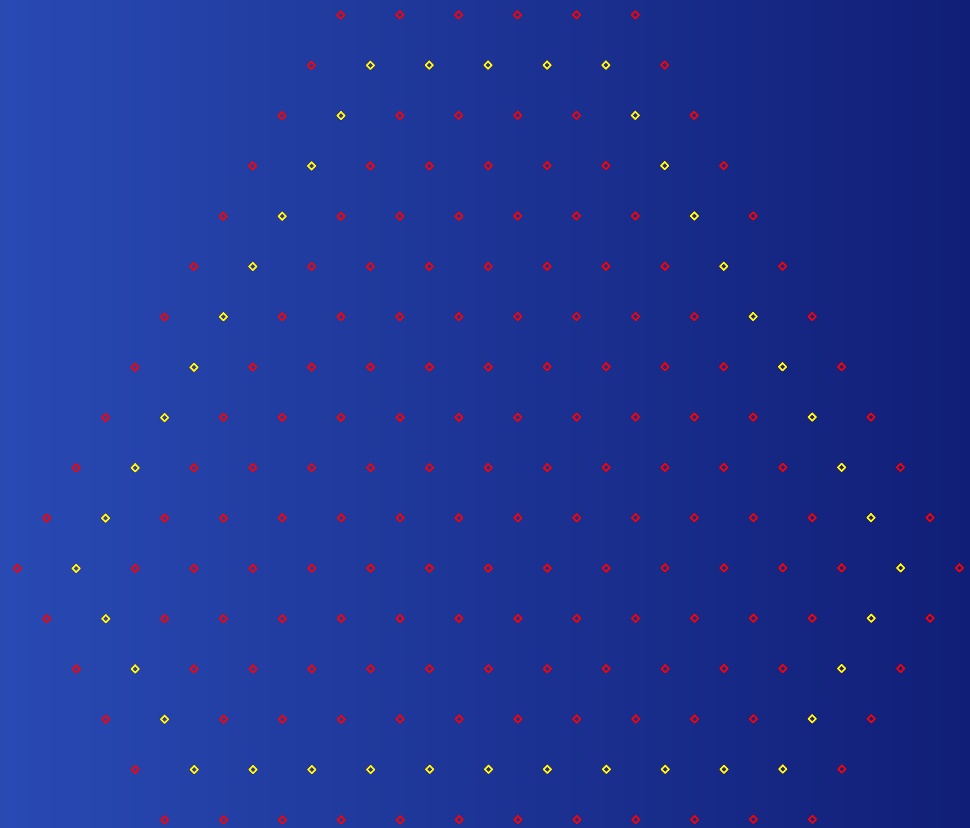
- L'ensemble des β tels que $K_{\lambda\beta} \neq 0$ consiste des points entiers dans l'enveloppe convexe de l'orbite de λ sous $\mathfrak{S}_k$. Cette enveloppe convexe est un permutaèdre.

$\lambda = (18, 7, 2)$



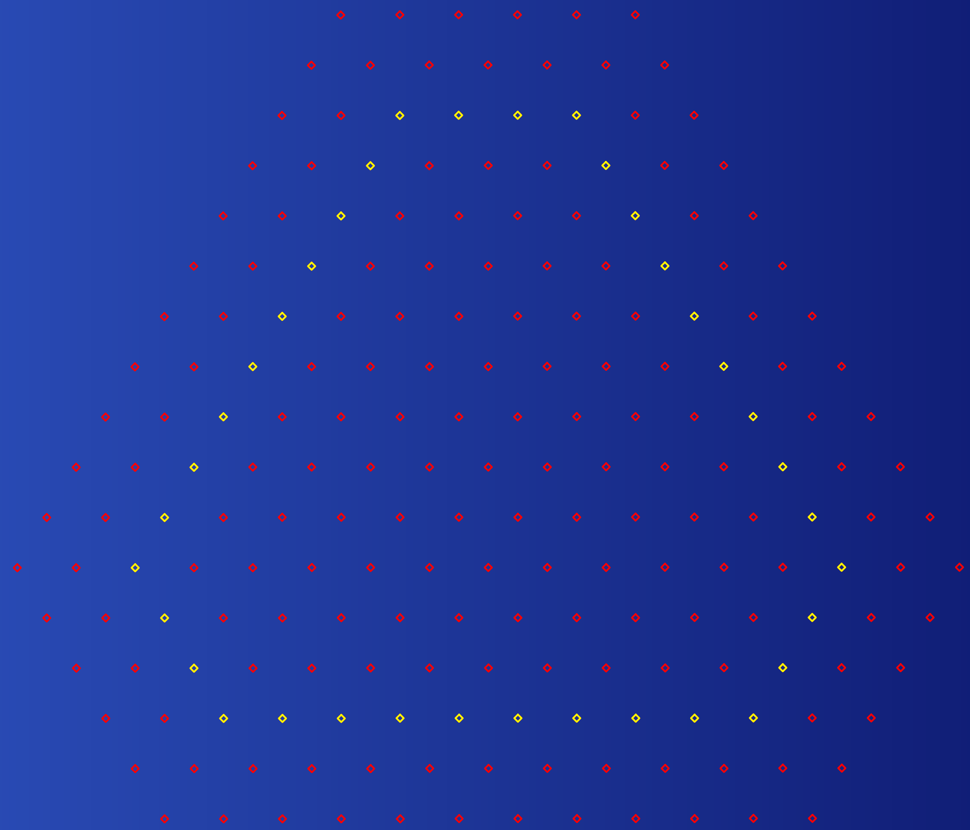
$$K_{\lambda\beta} = 1$$

$\lambda = (18,\ 7,\ 2)$



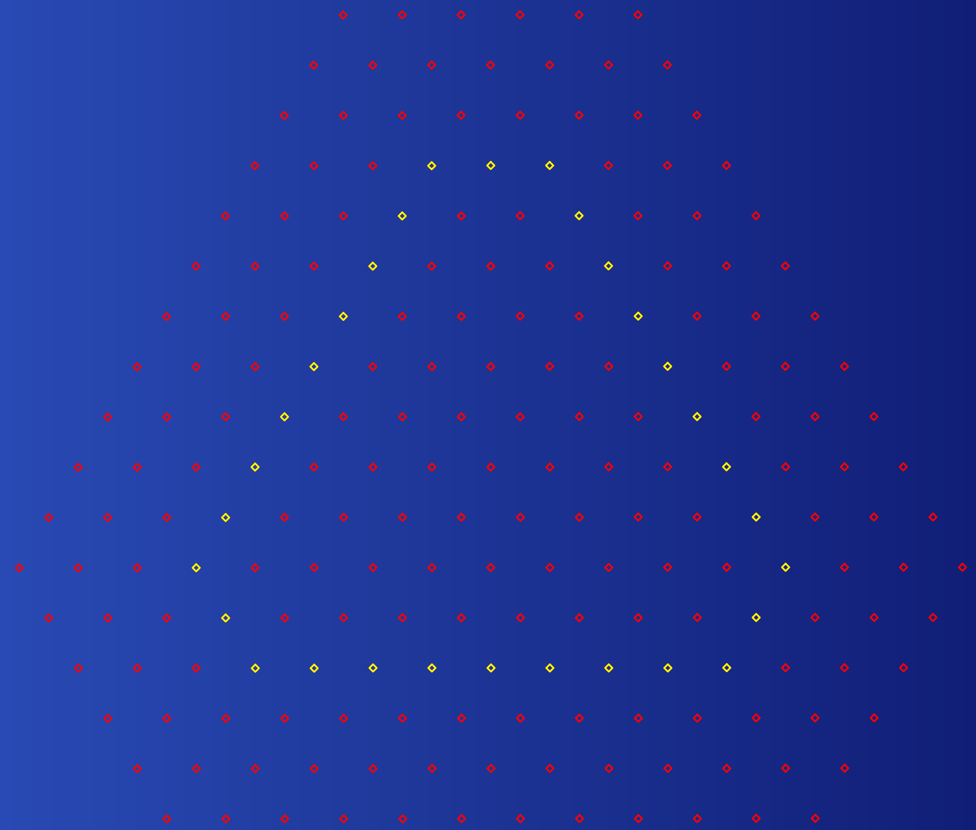
$$K_{\lambda\beta} = 2$$

$\lambda = (18,\ 7,\ 2)$



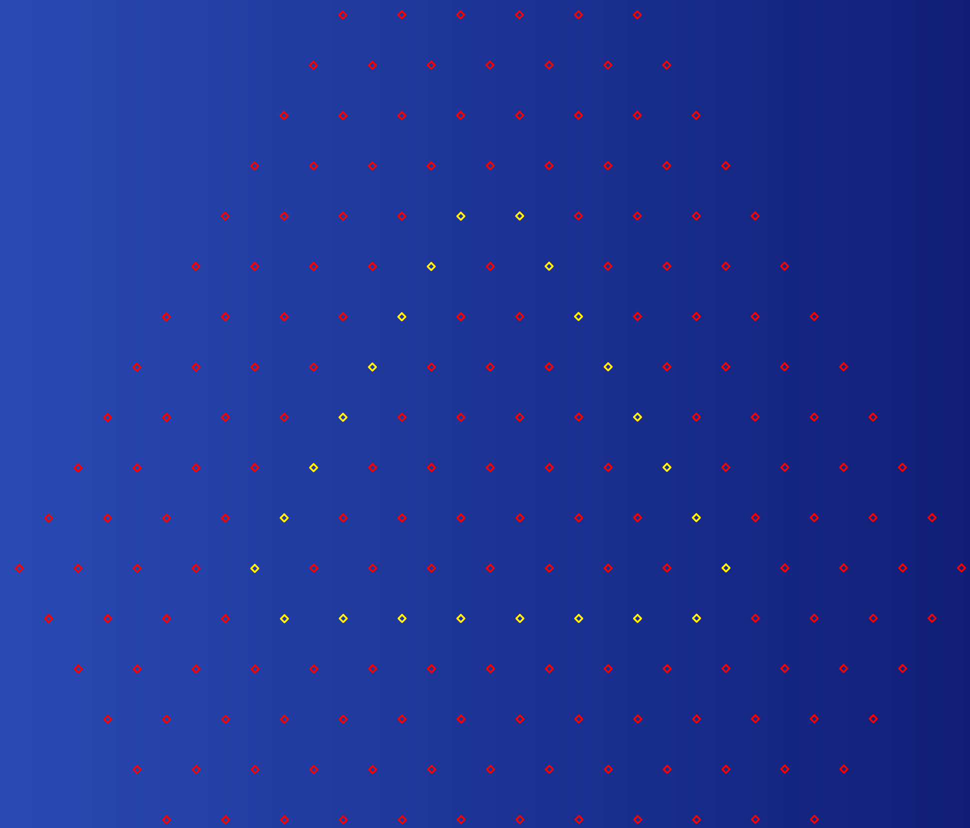
$$K_{\lambda\beta} = 3$$

$\lambda = (18,\ 7,\ 2)$



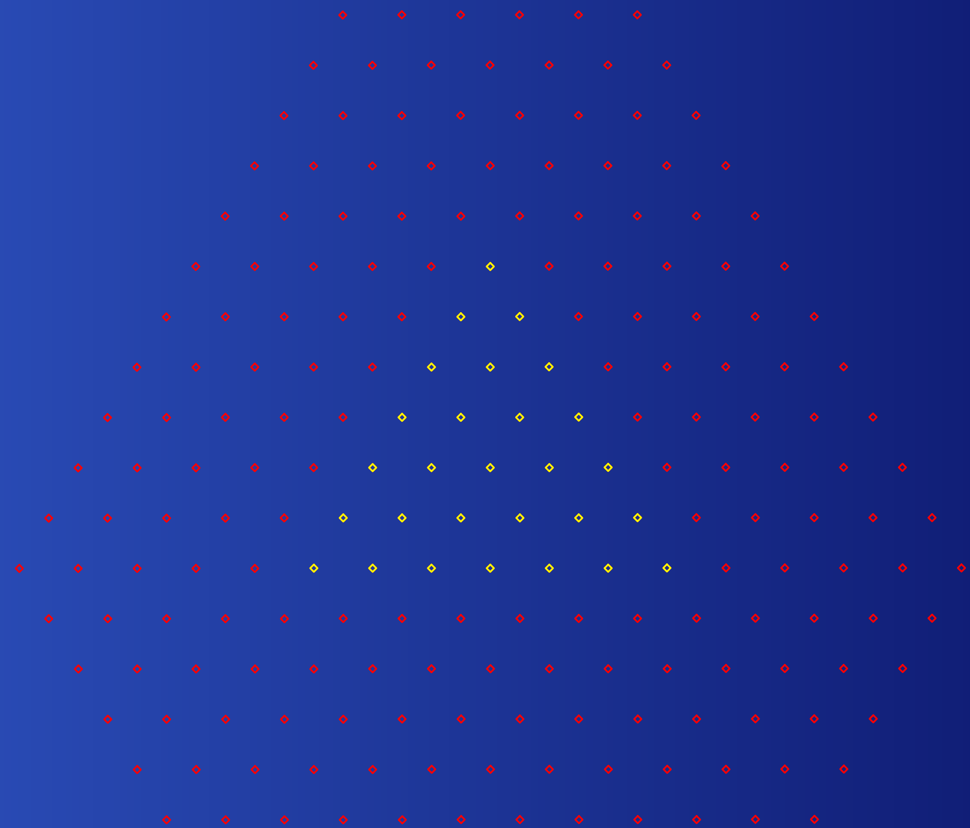
$$K_{\lambda\beta} = 4$$

$$\lambda = (18,\ 7,\ 2)$$



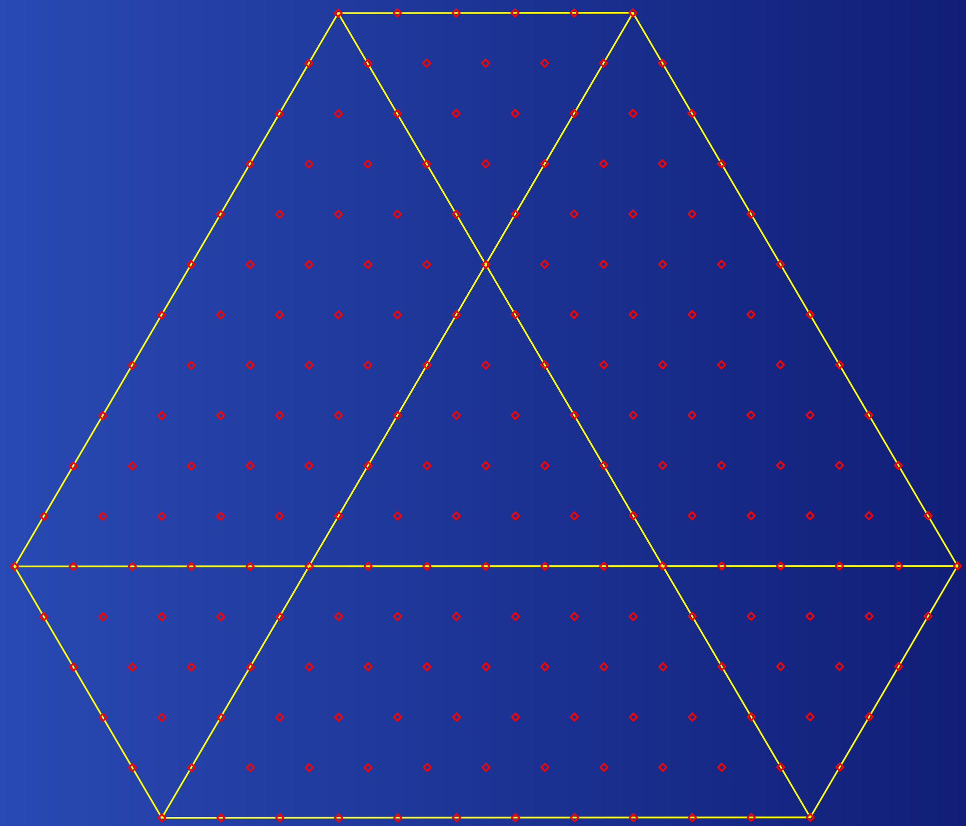
$$K_{\lambda\beta} = 5$$

$\lambda = (18, 7, 2)$



$$K_{\lambda\beta} = 6$$

$\lambda = (18, 7, 2)$



Lorsque λ varie

- À déformation près: deux cas “génériques”

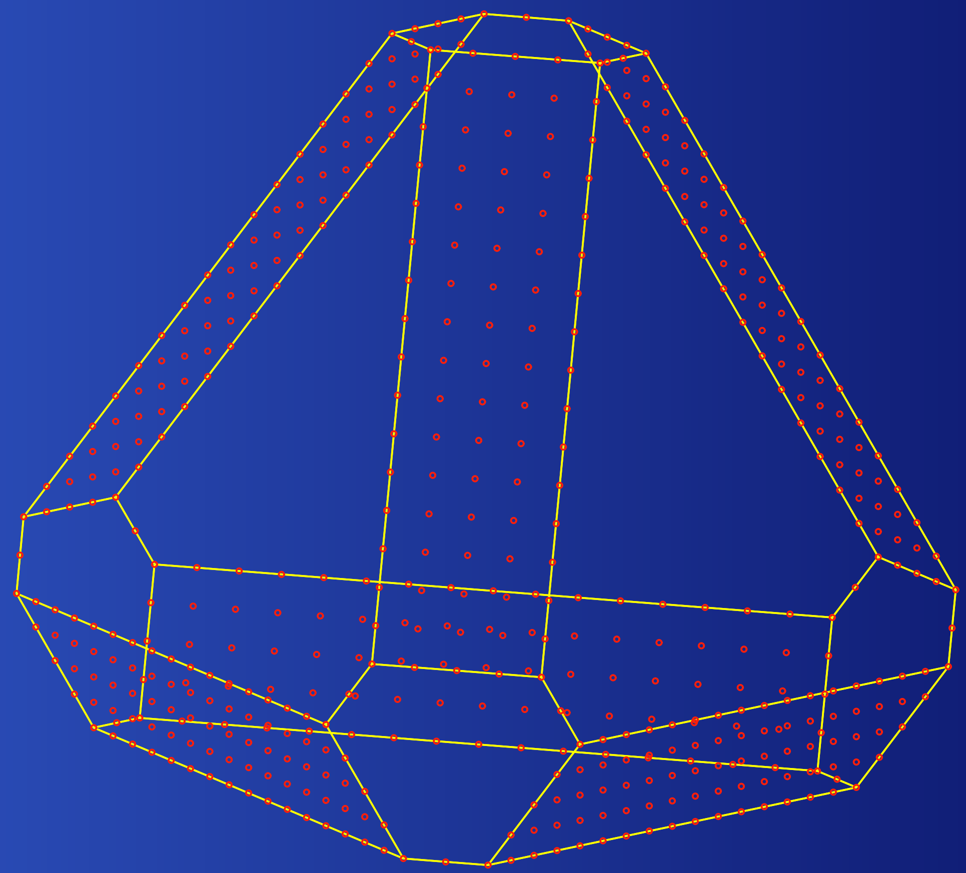
Lorsque λ varie

- À déformation près: deux cas “génériques”
- 8 polynômes suffisent à décrire tous les nombres de Kostka pour des partages avec au plus trois parts

Lorsque λ varie

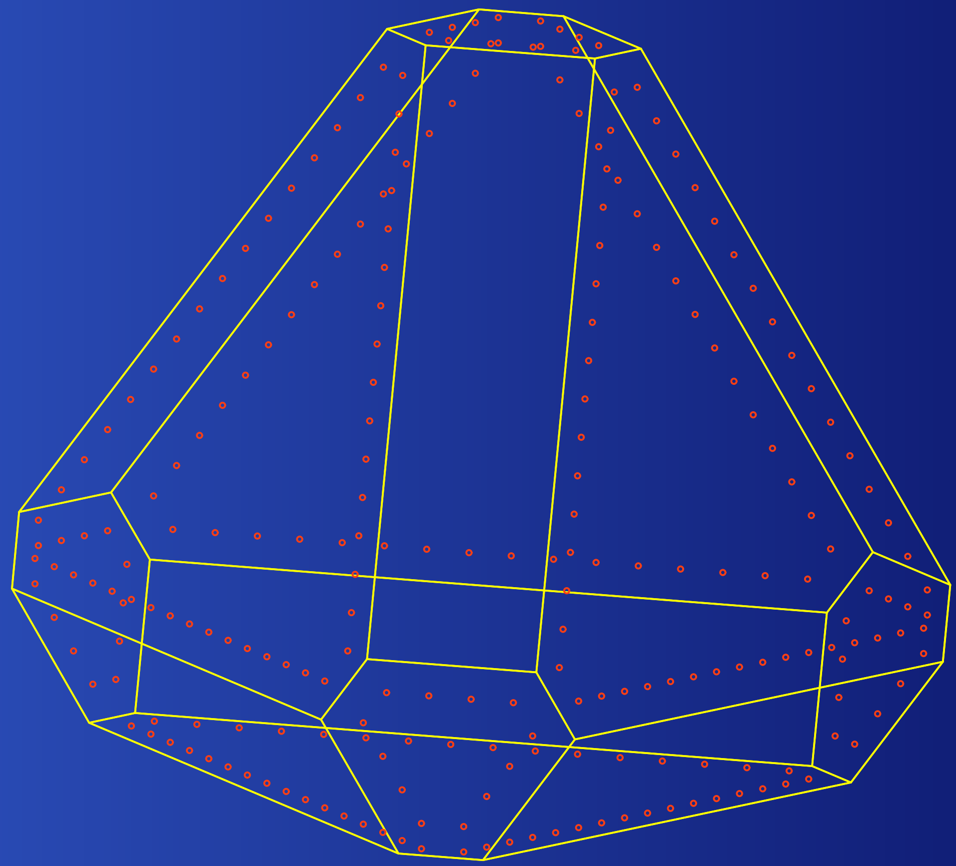
- À déformation près: deux cas “génériques”
- 8 polynômes suffisent à décrire tous les nombres de Kostka pour des partages avec au plus trois parts
- Région centrale (*lacunaire*) dans laquelle les nombres de Kostka sont constants

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



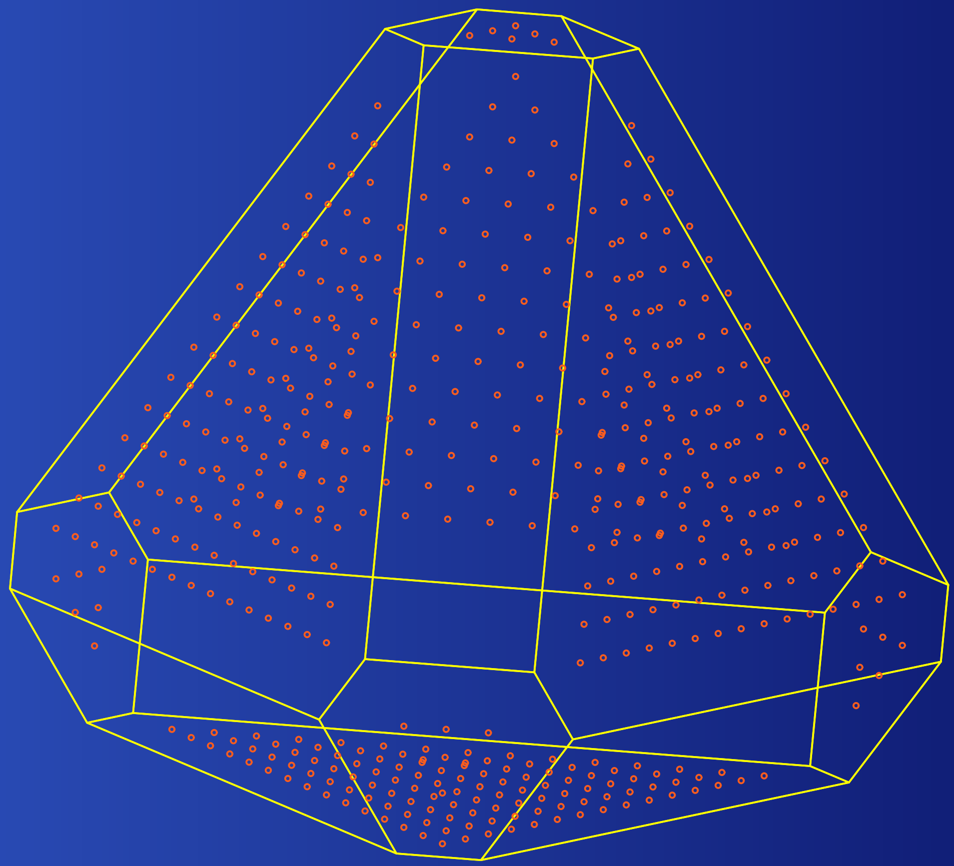
$$K_{\lambda\beta} = 1$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



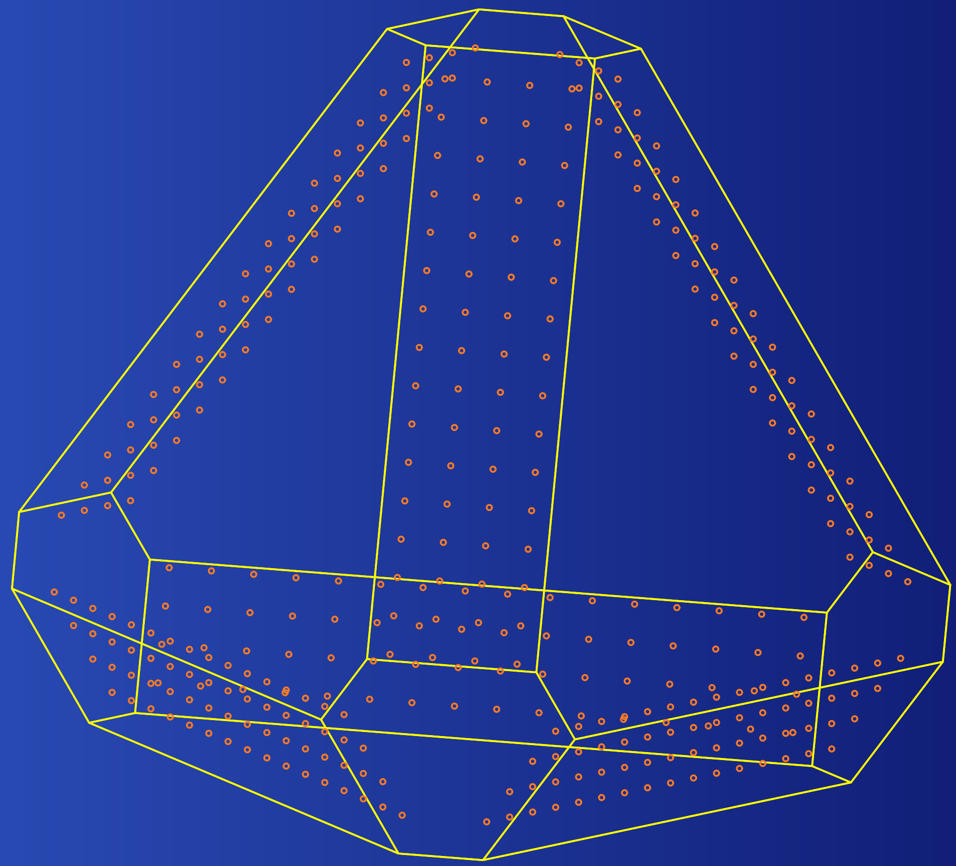
$$K_{\lambda\beta} = 2$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$

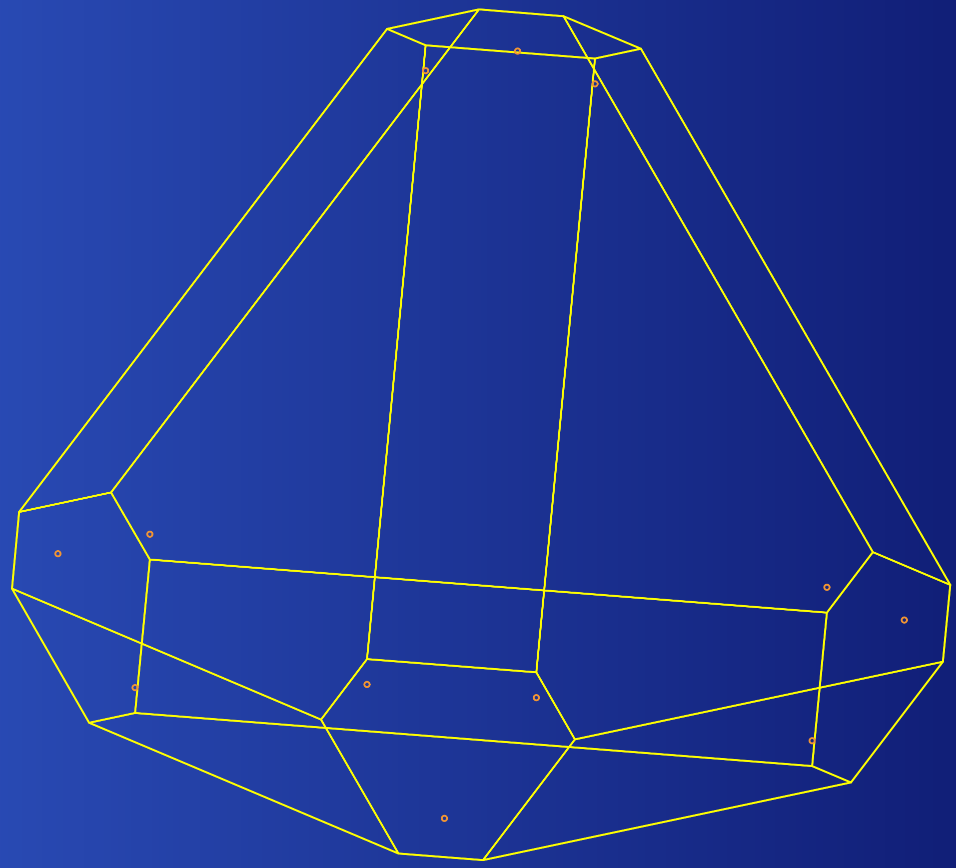


$$K_{\lambda\beta} = 3$$

$\lambda = (23, 7, 5, 1)$

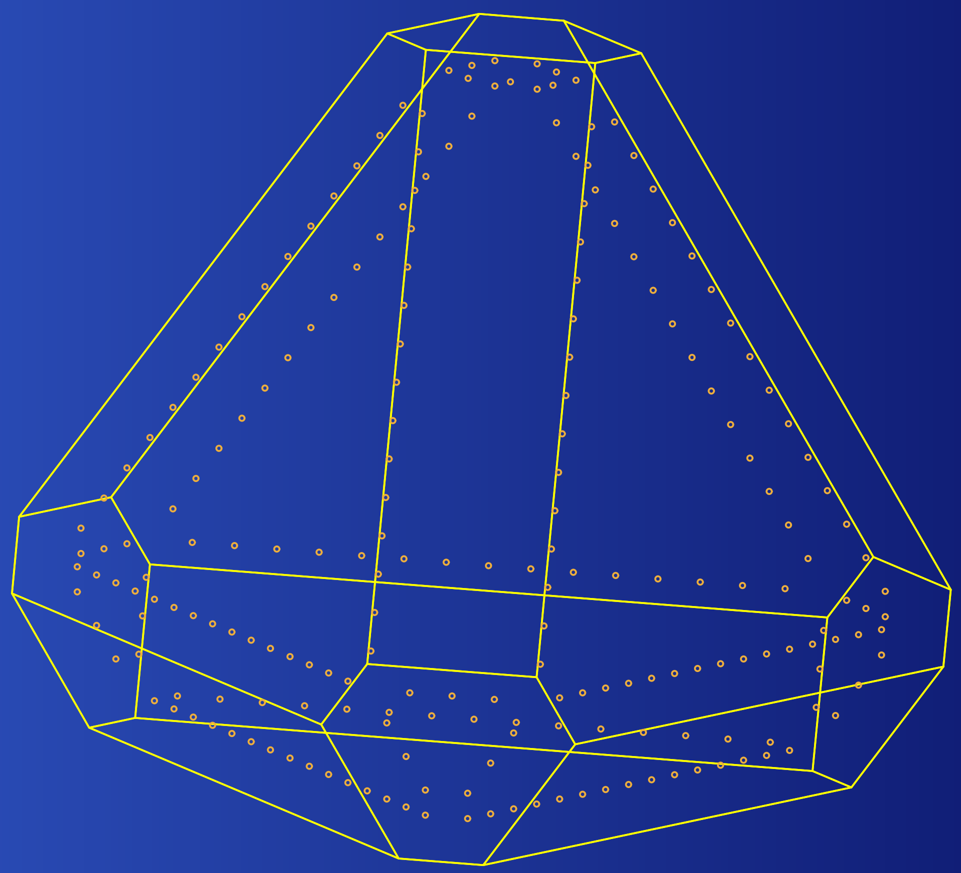


$$K_{\lambda\beta} = 4$$



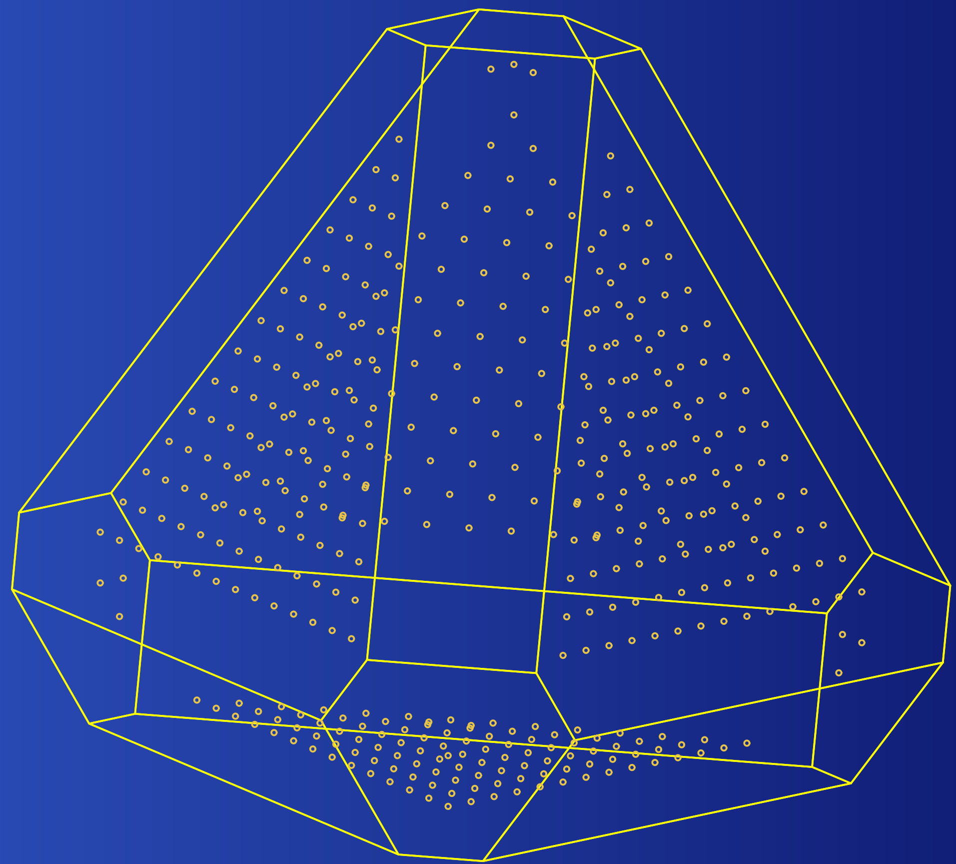
$$K_{\lambda\beta} = 5$$

$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



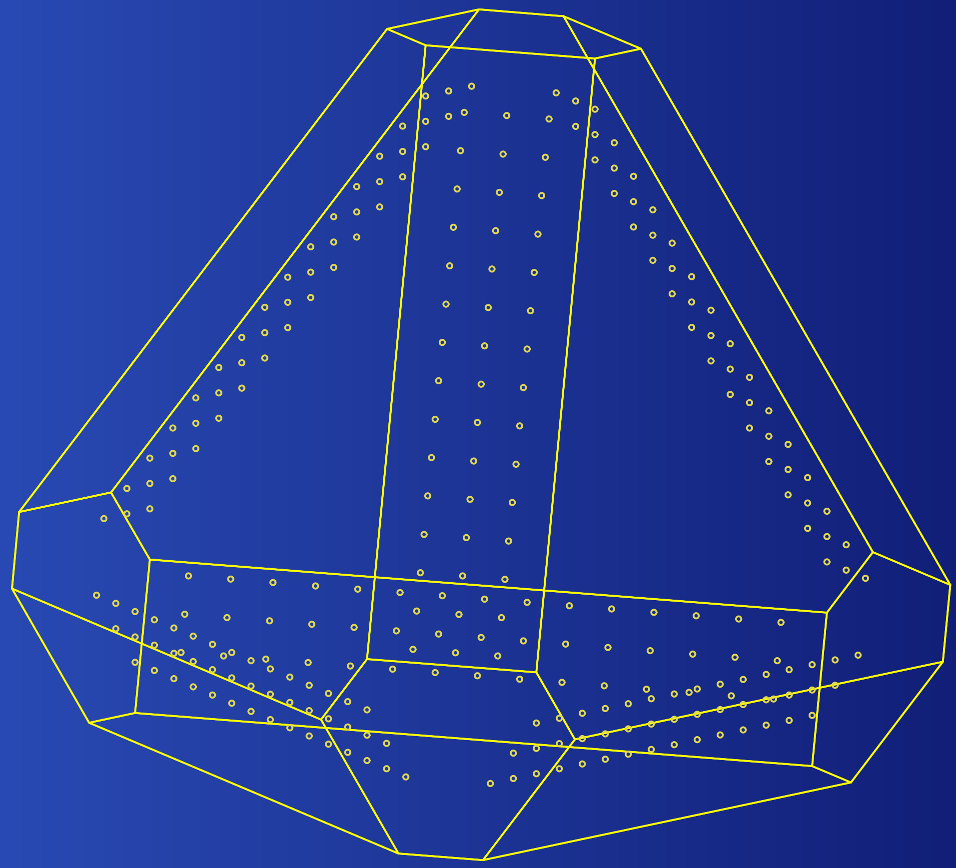
$$K_{\lambda\beta} = 7$$

$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



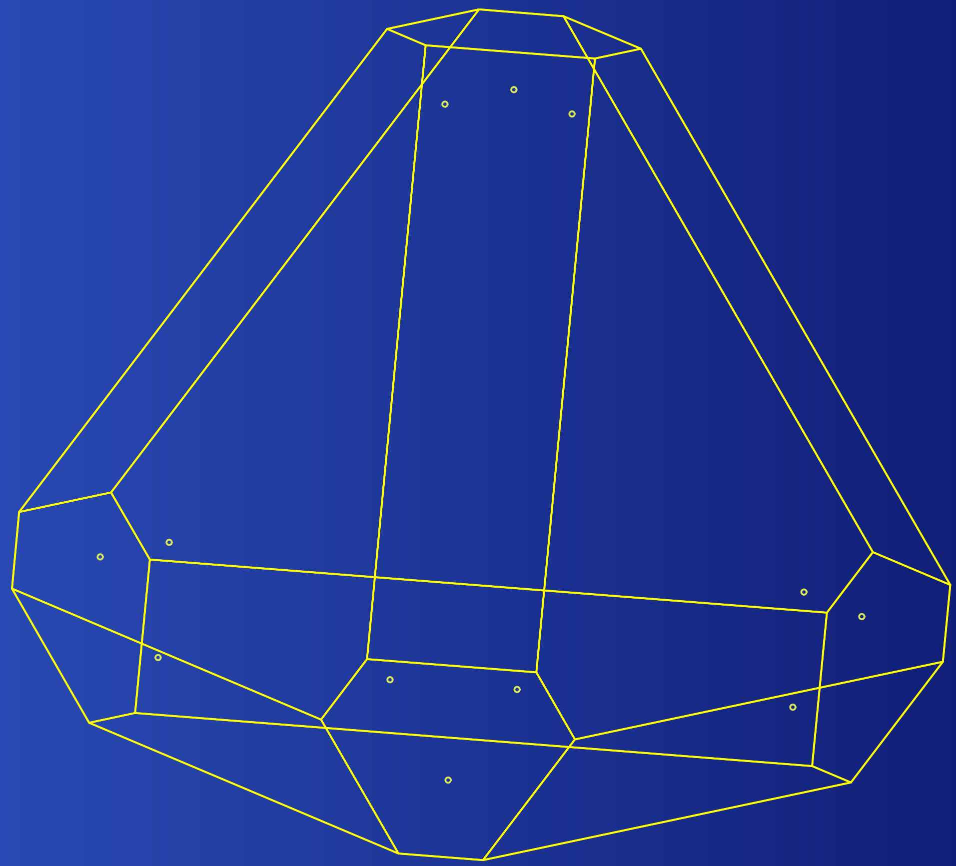
$$K_{\lambda\beta} = 9$$

$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



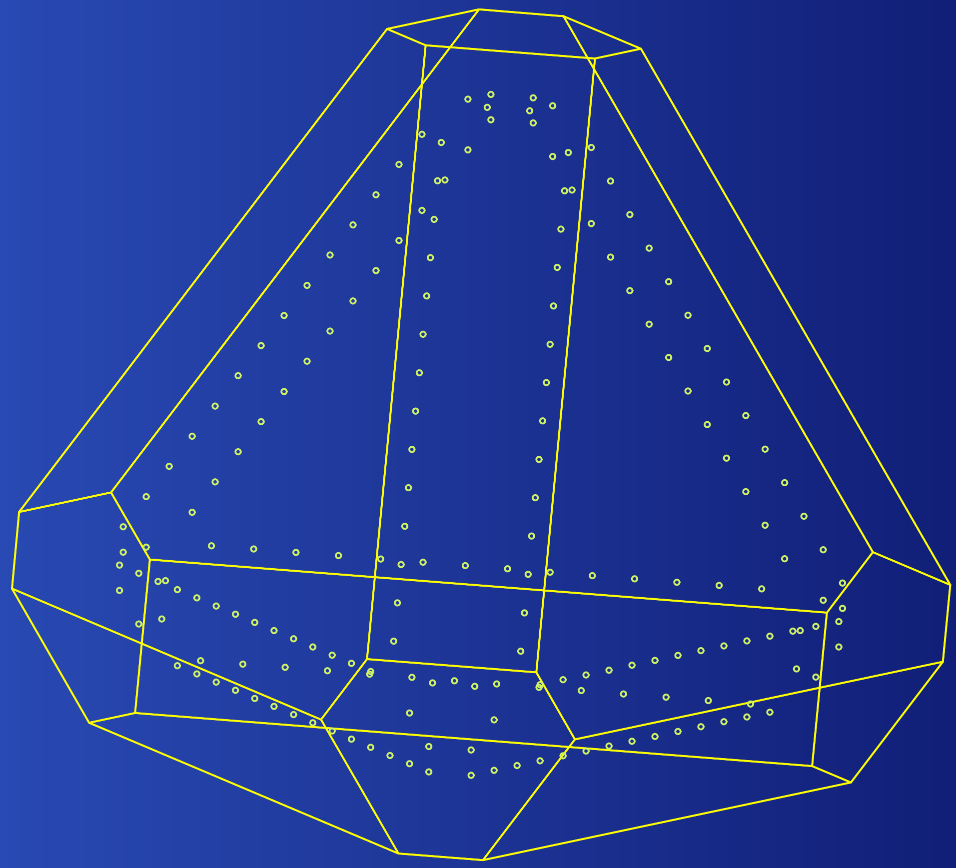
$$K_{\lambda\beta} = 10$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



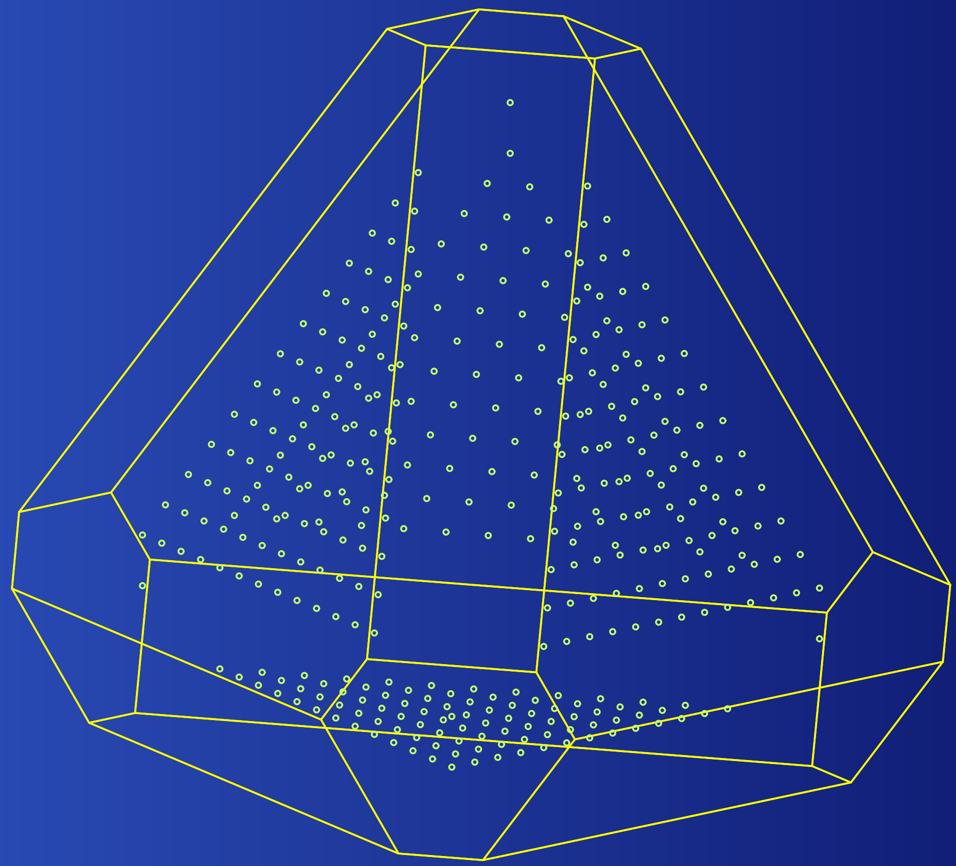
$$K_{\lambda\beta} = 12$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



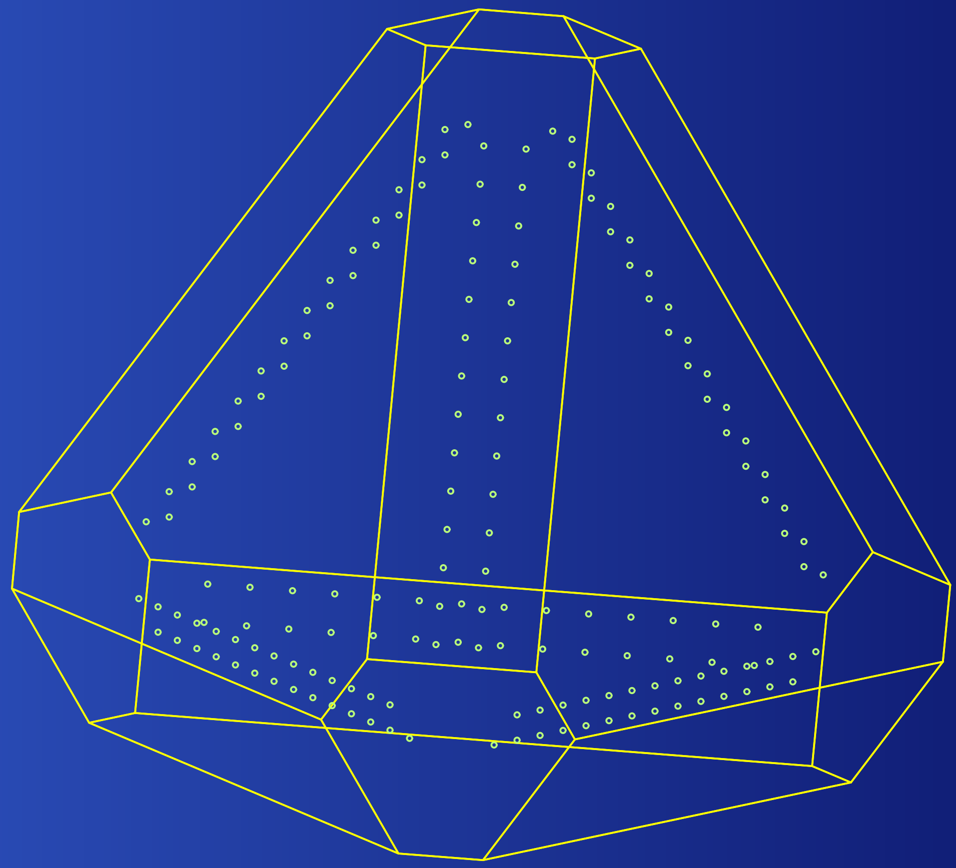
$$K_{\lambda\beta} = 15$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



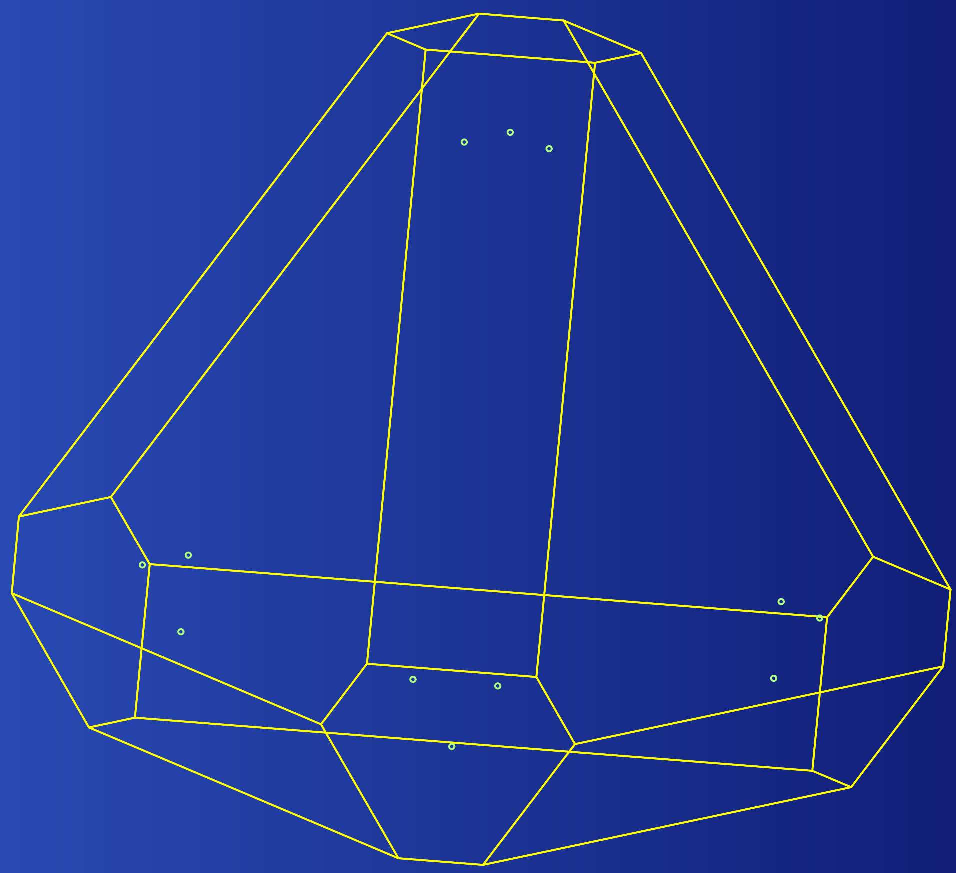
$$K_{\lambda\beta} = 18$$

$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



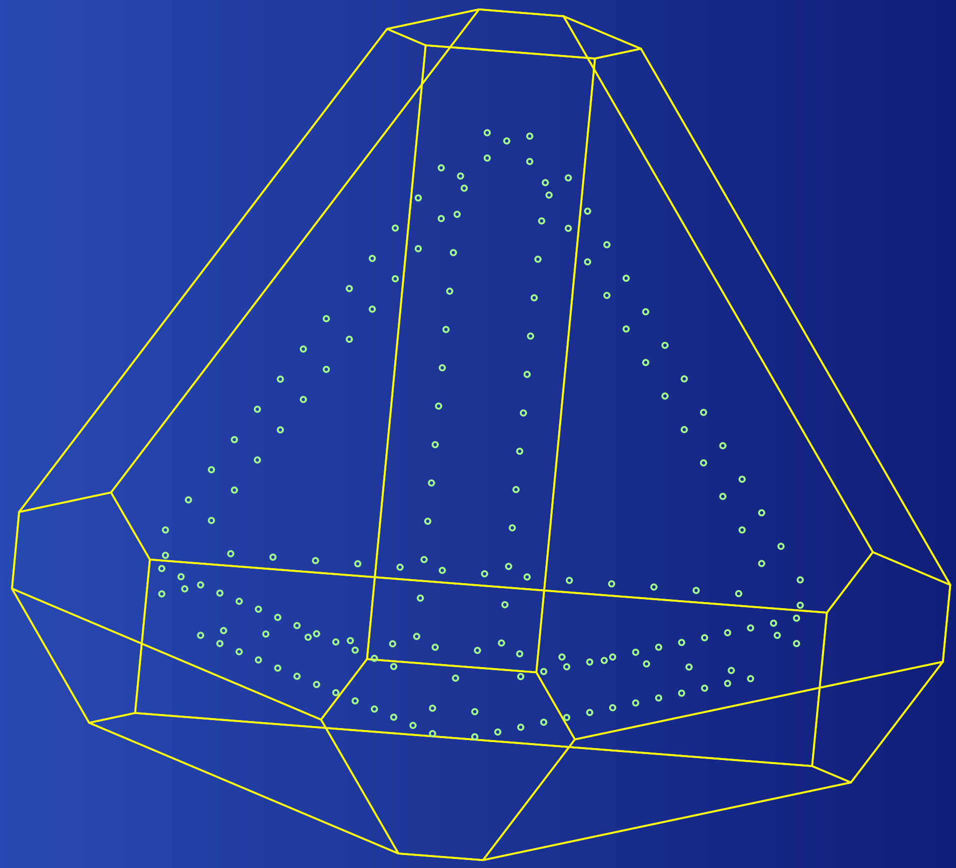
$$K_{\lambda\beta} = 19$$

$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



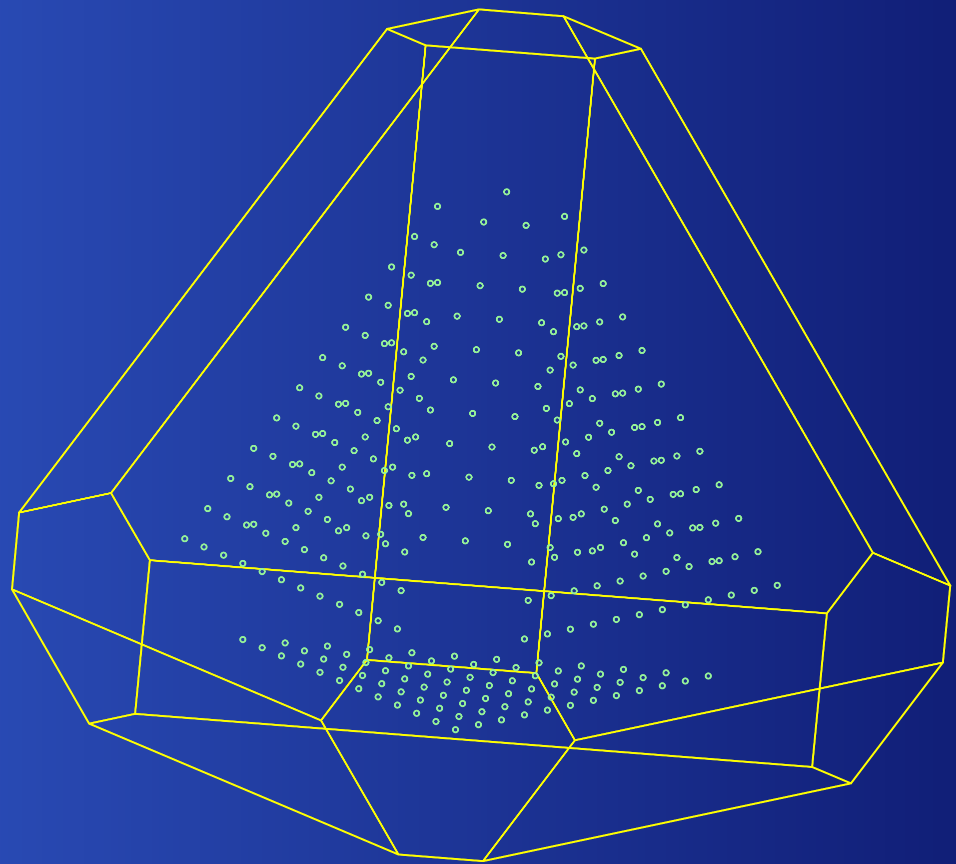
$$K_{\lambda\beta} = 22$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



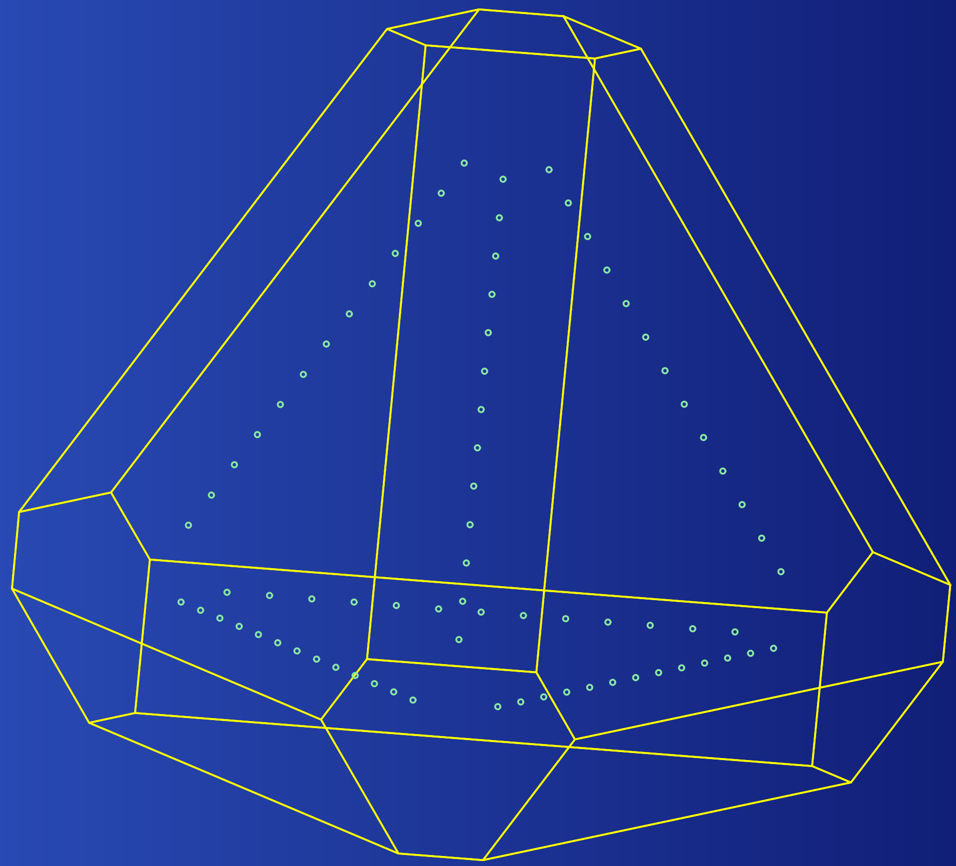
$$K_{\lambda\beta} = 26$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



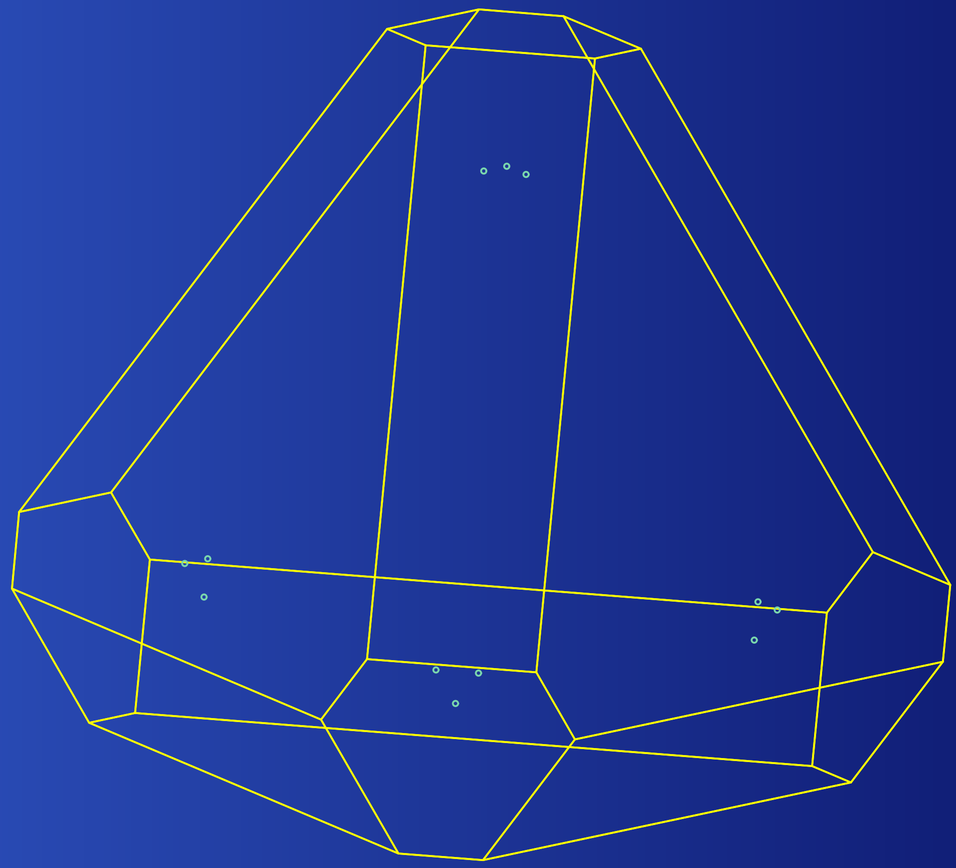
$$K_{\lambda\beta} = 30$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



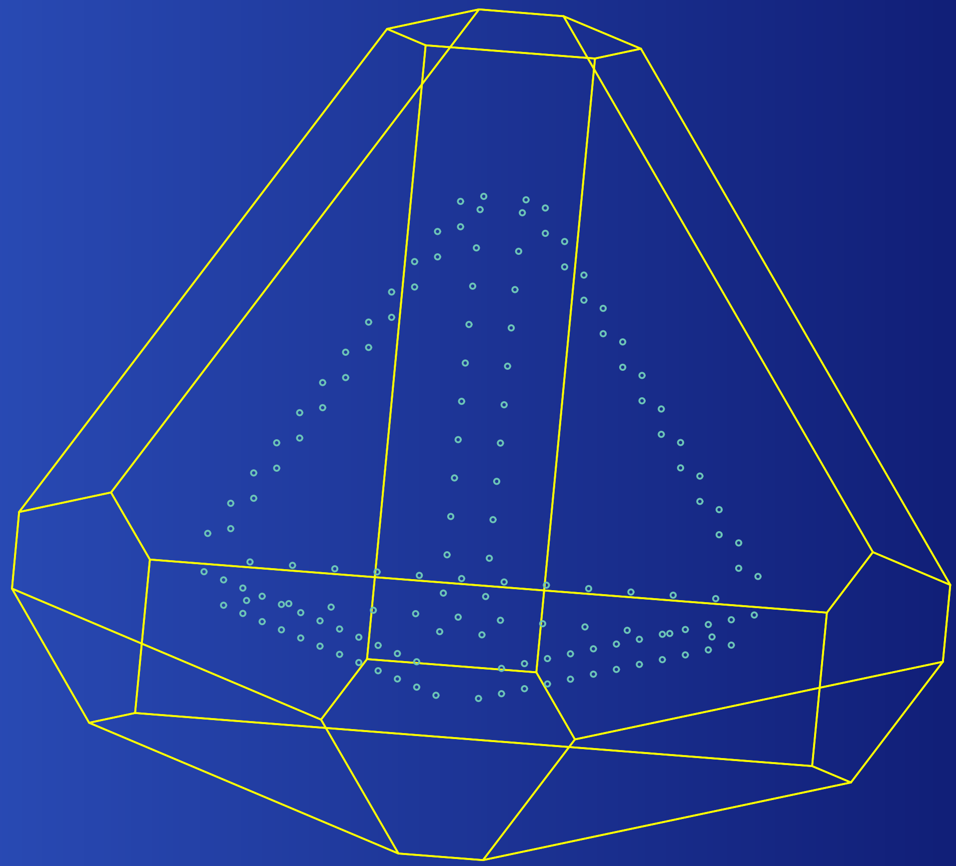
$$K_{\lambda\beta} = 31$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



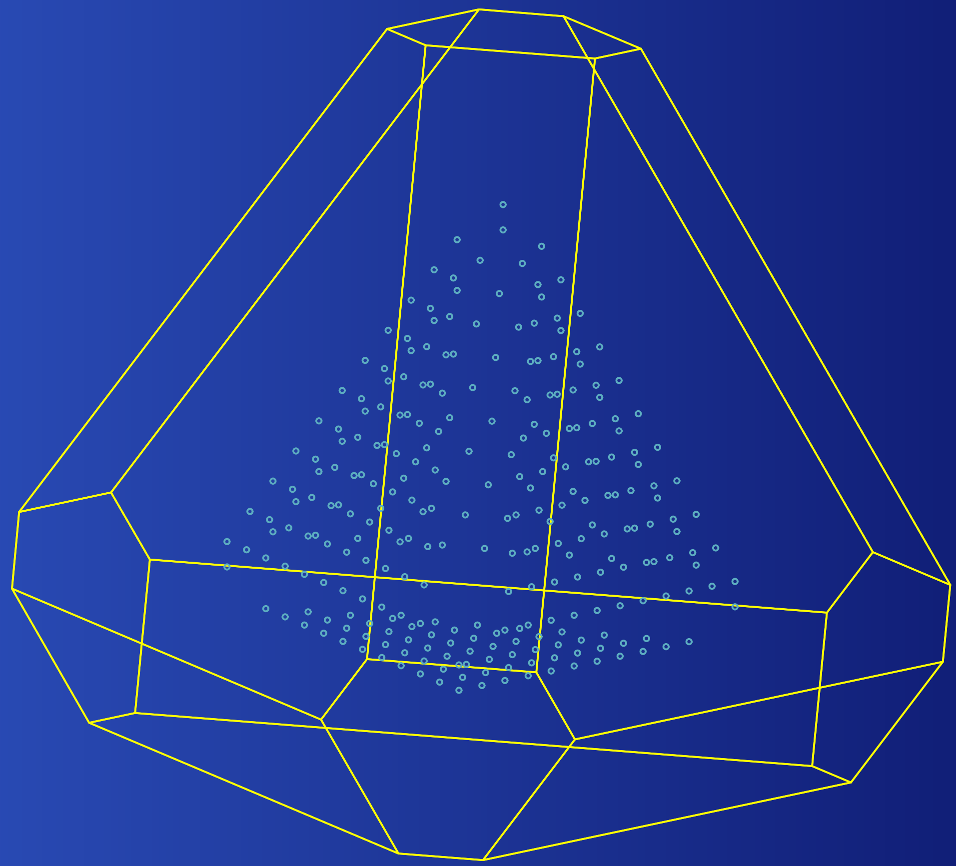
$$K_{\lambda\beta} = 35$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



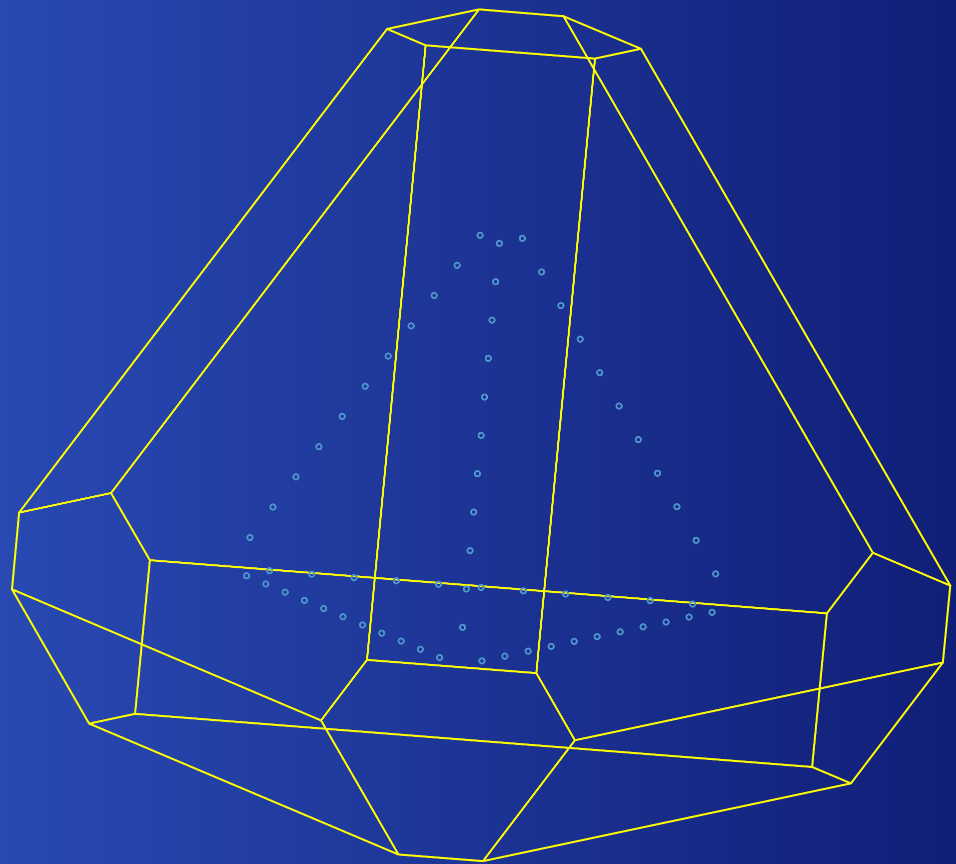
$$K_{\lambda\beta} = 40$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



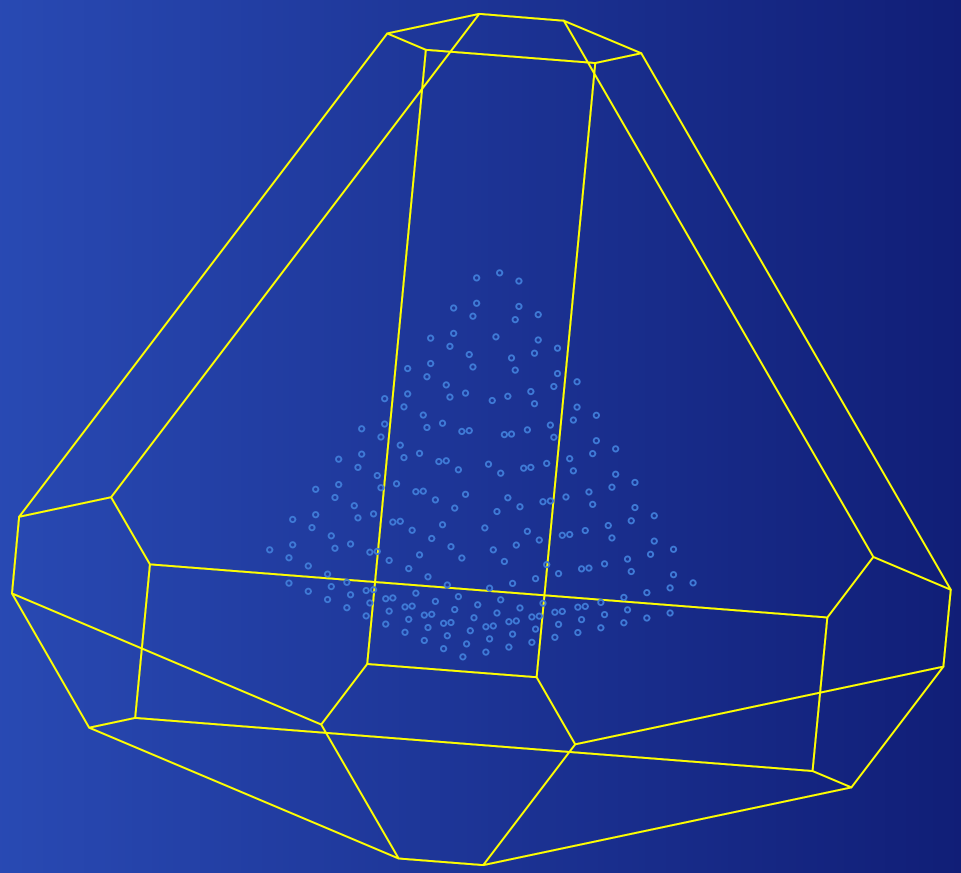
$$K_{\lambda\beta} = 45$$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



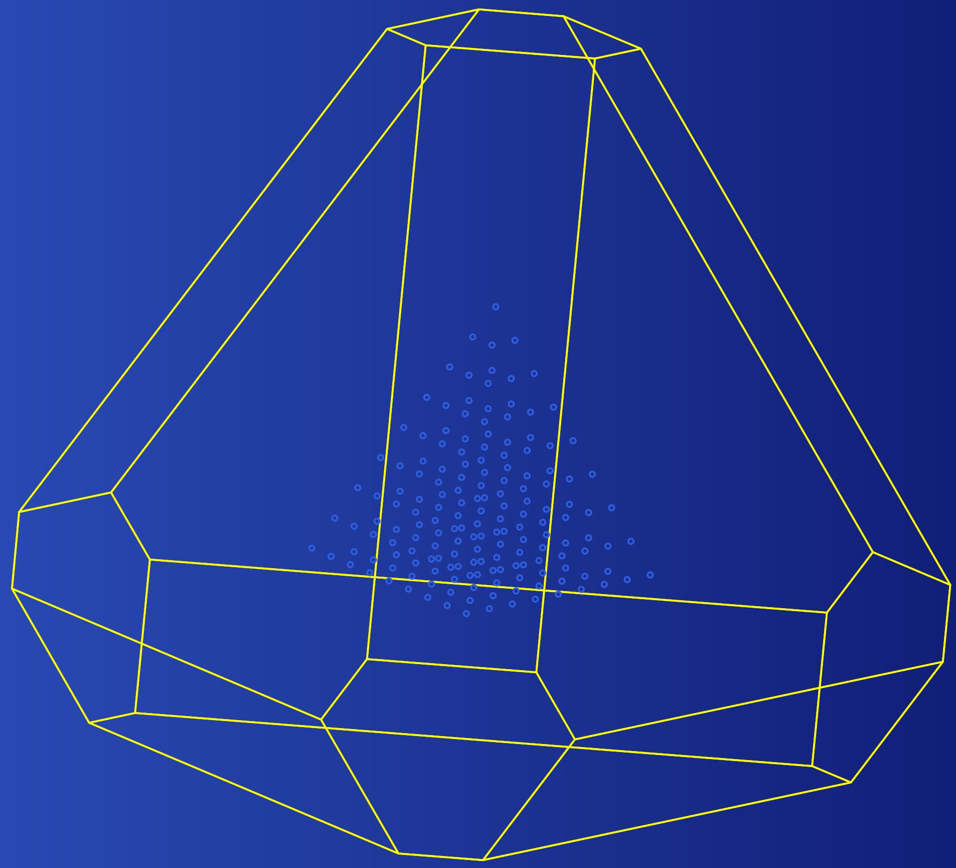
$$K_{\lambda\beta} = 50$$

$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



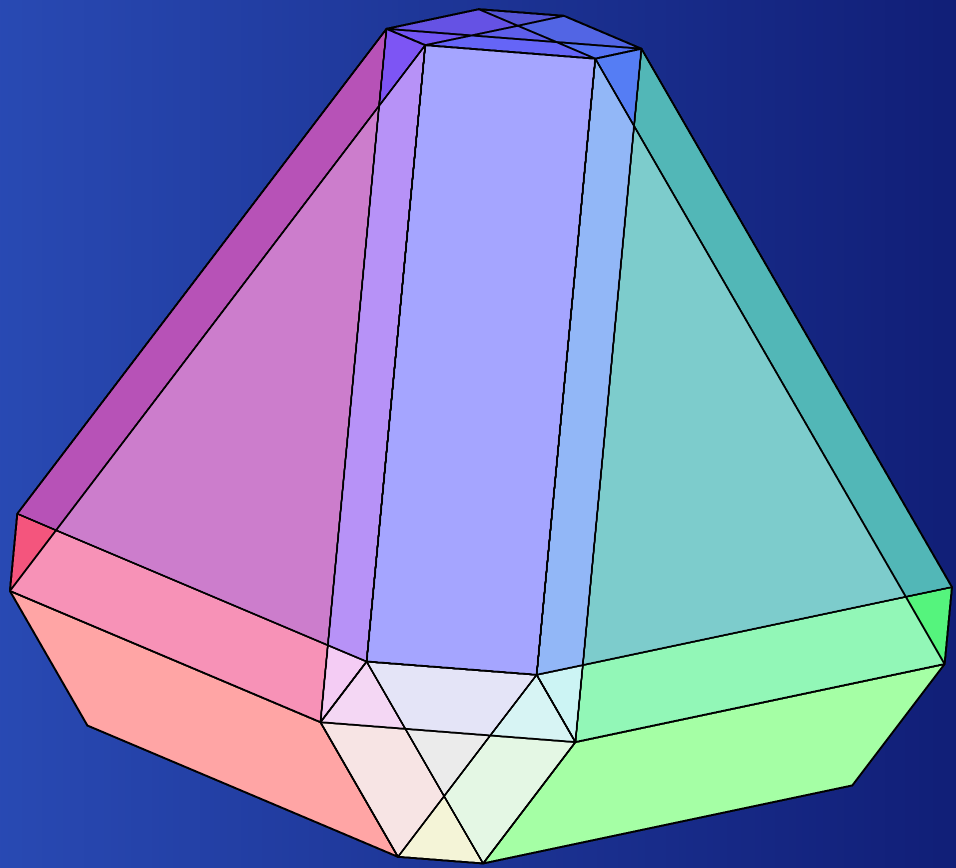
$K_{\lambda\beta} = 55$

$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$

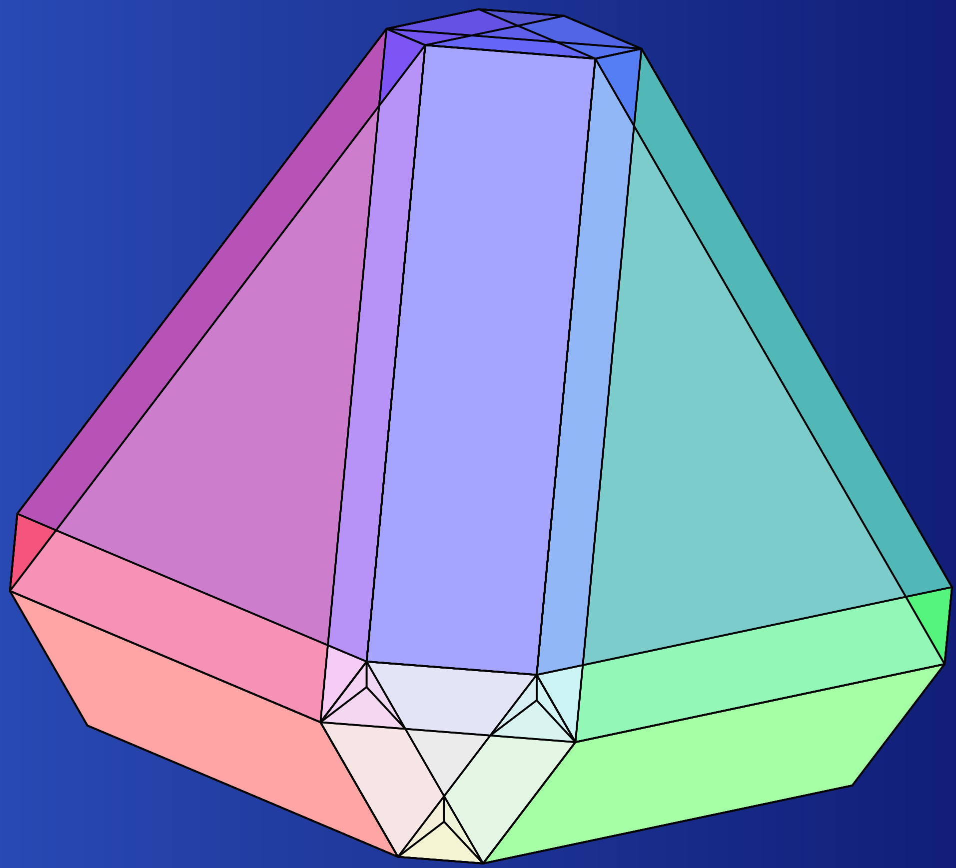


$$K_{\lambda\beta} = 60$$

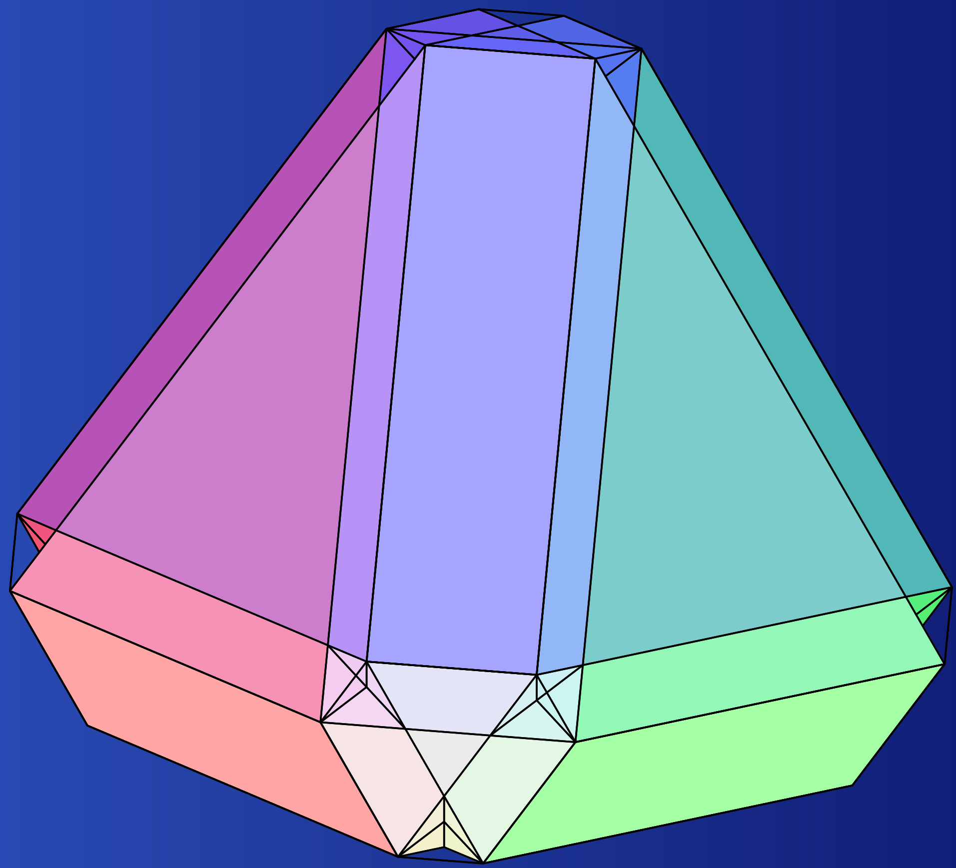
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



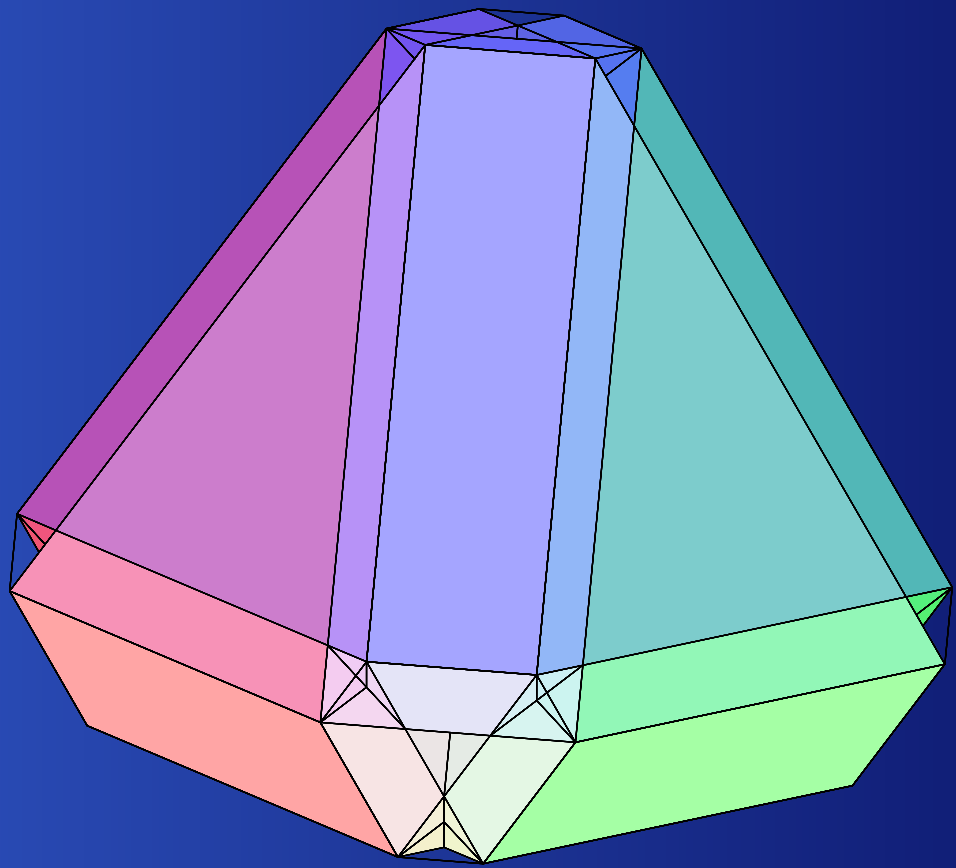
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



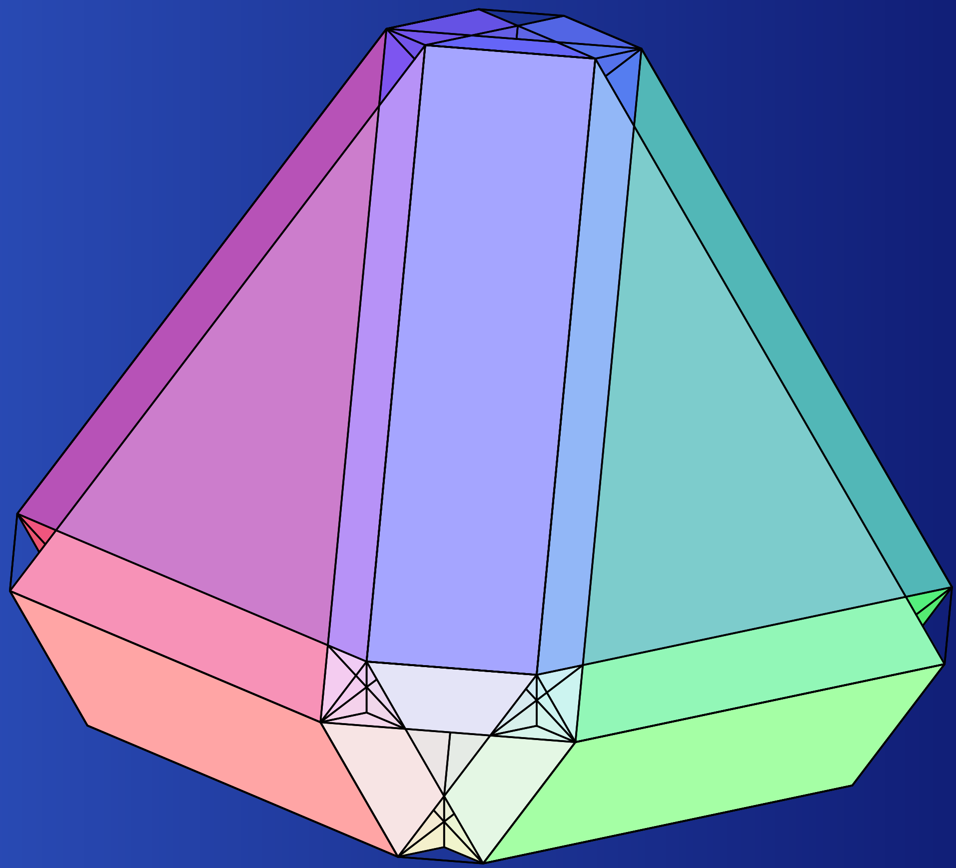
$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



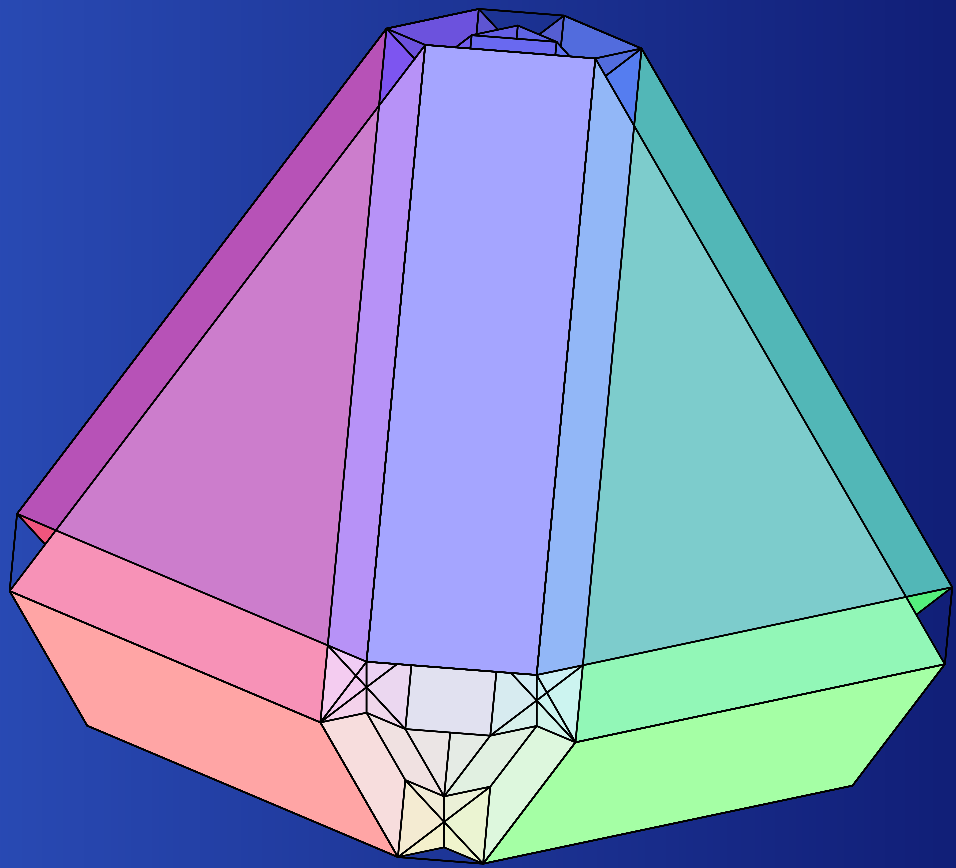
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



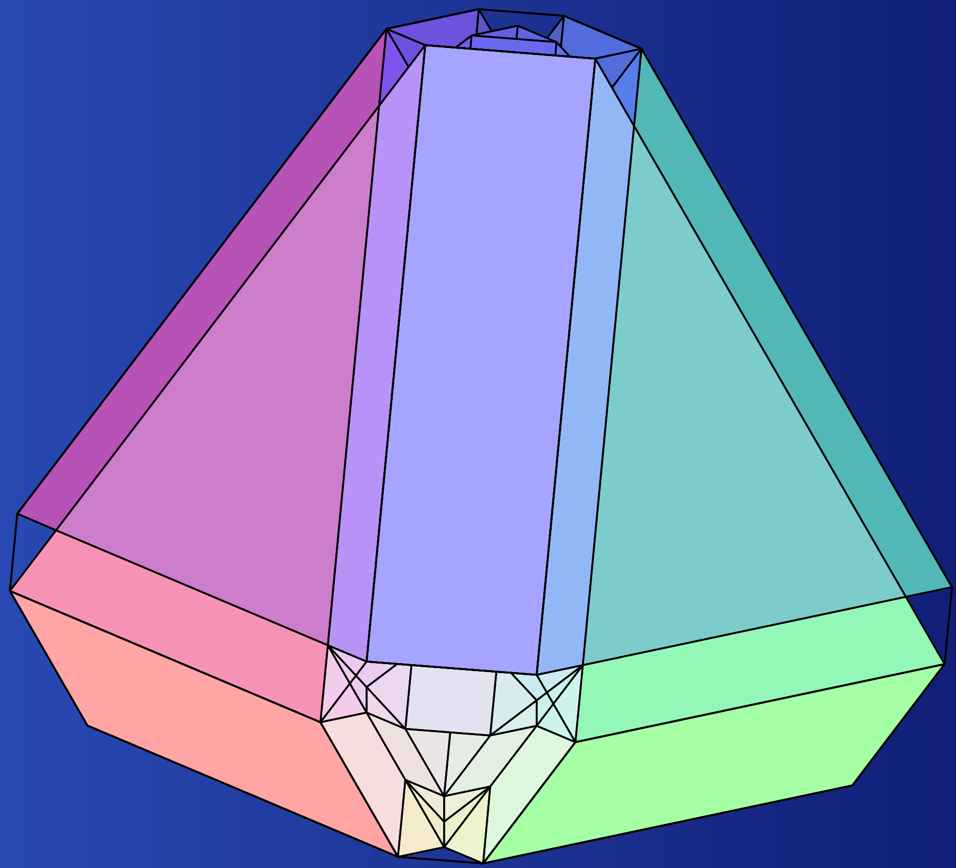
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



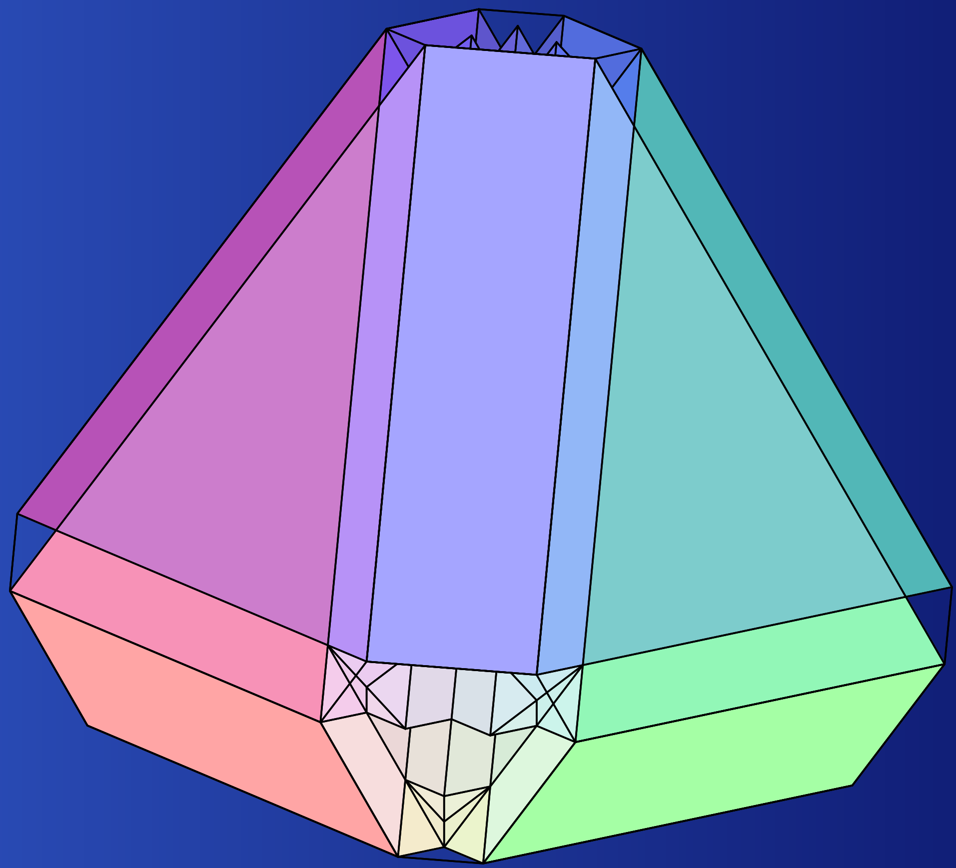
$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



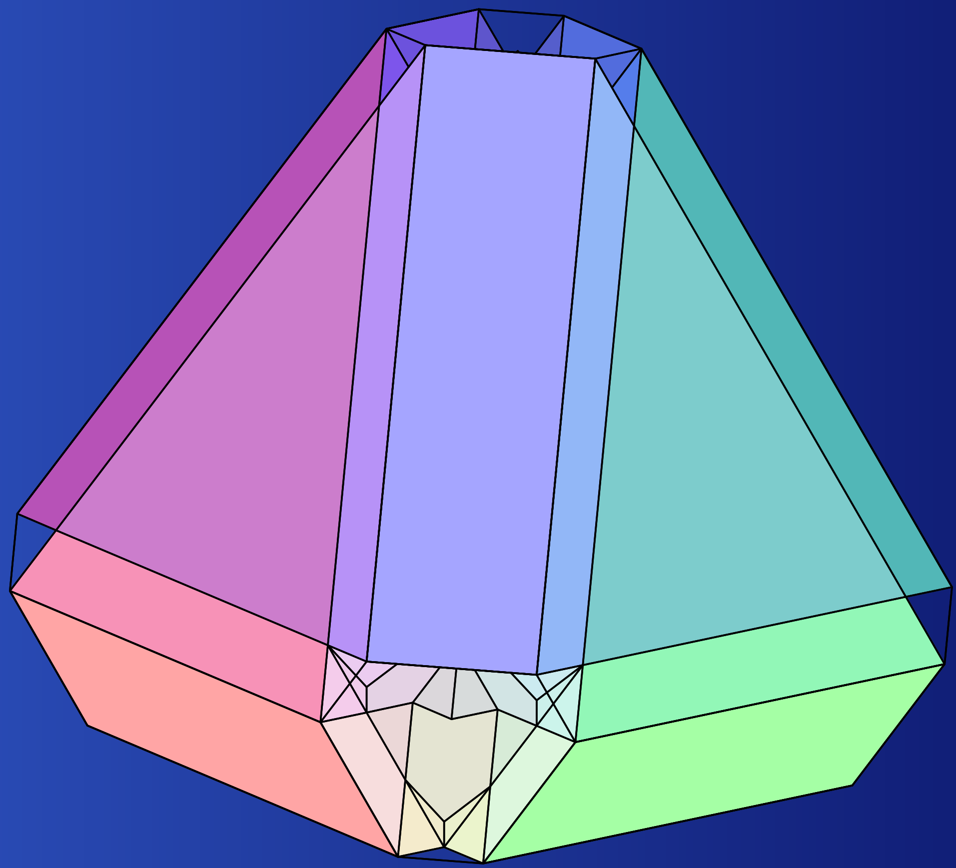
$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



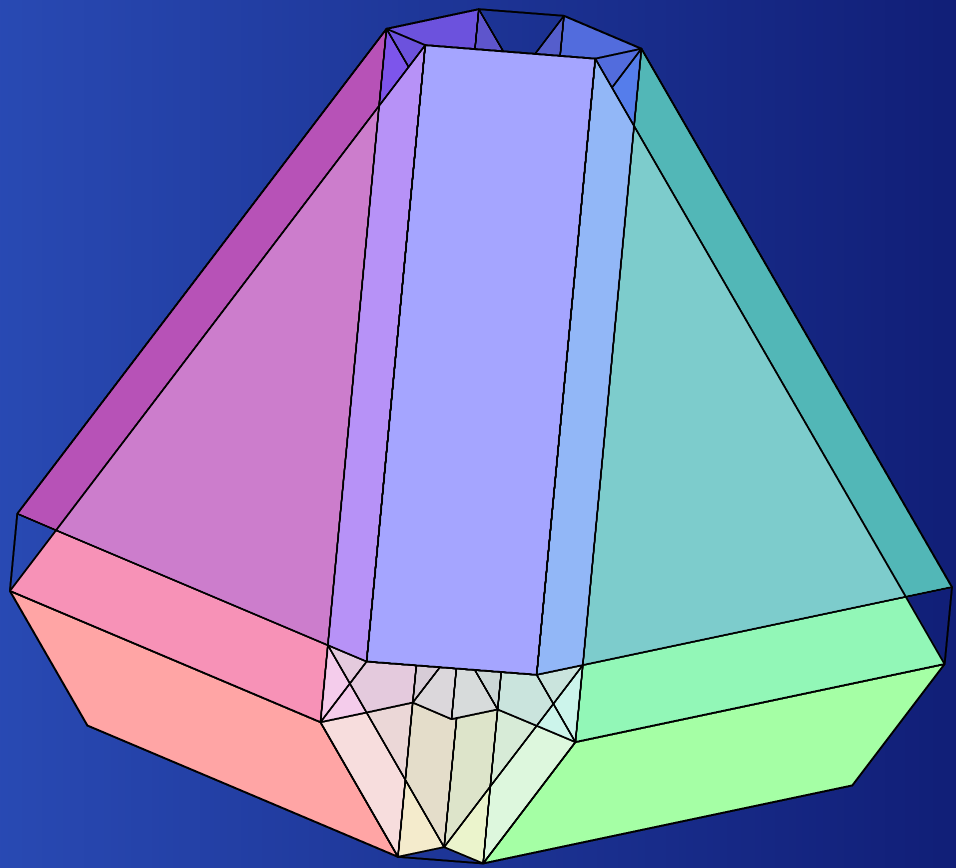
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



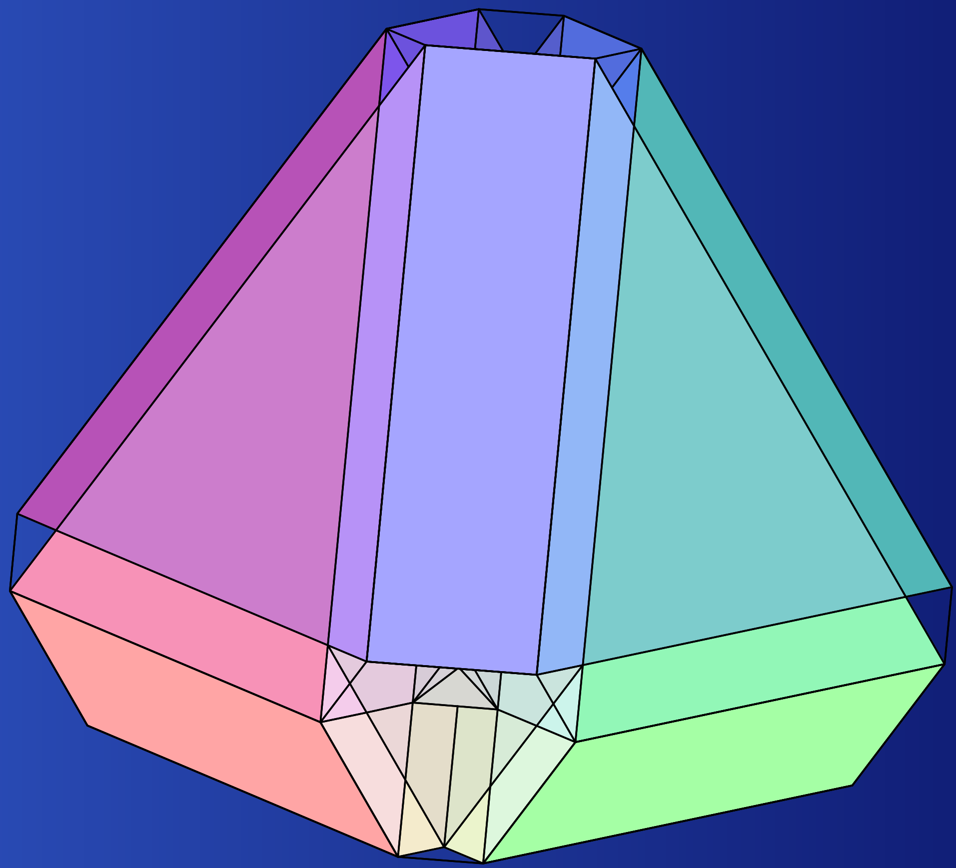
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



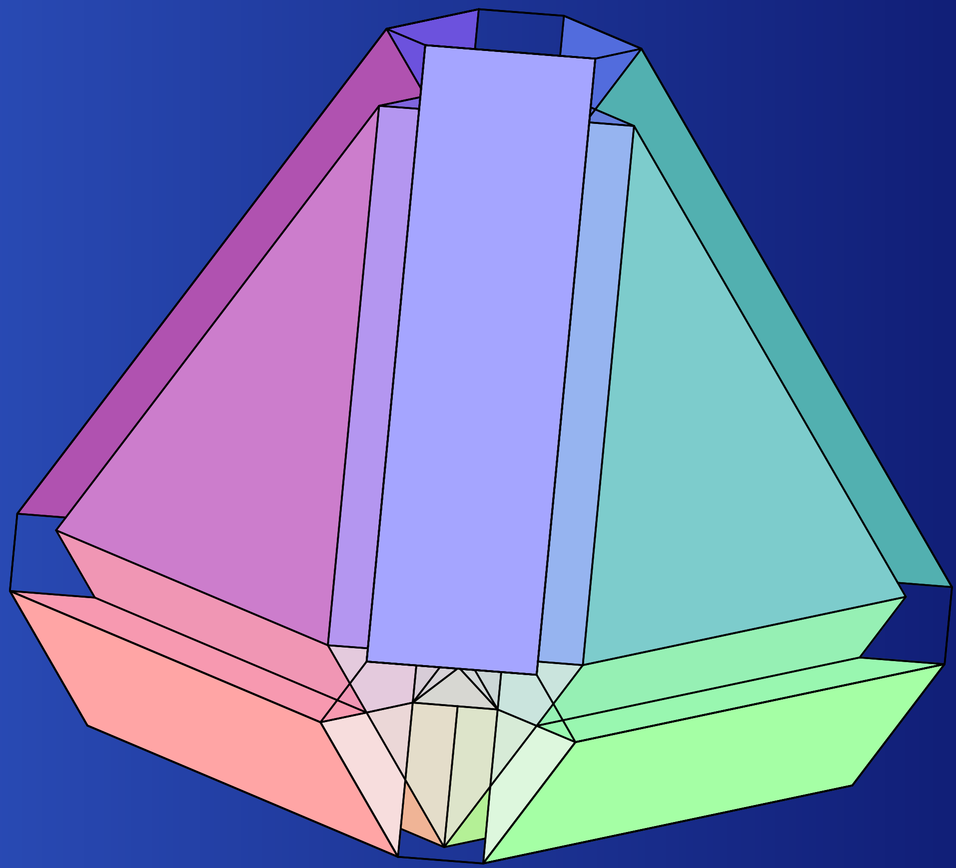
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



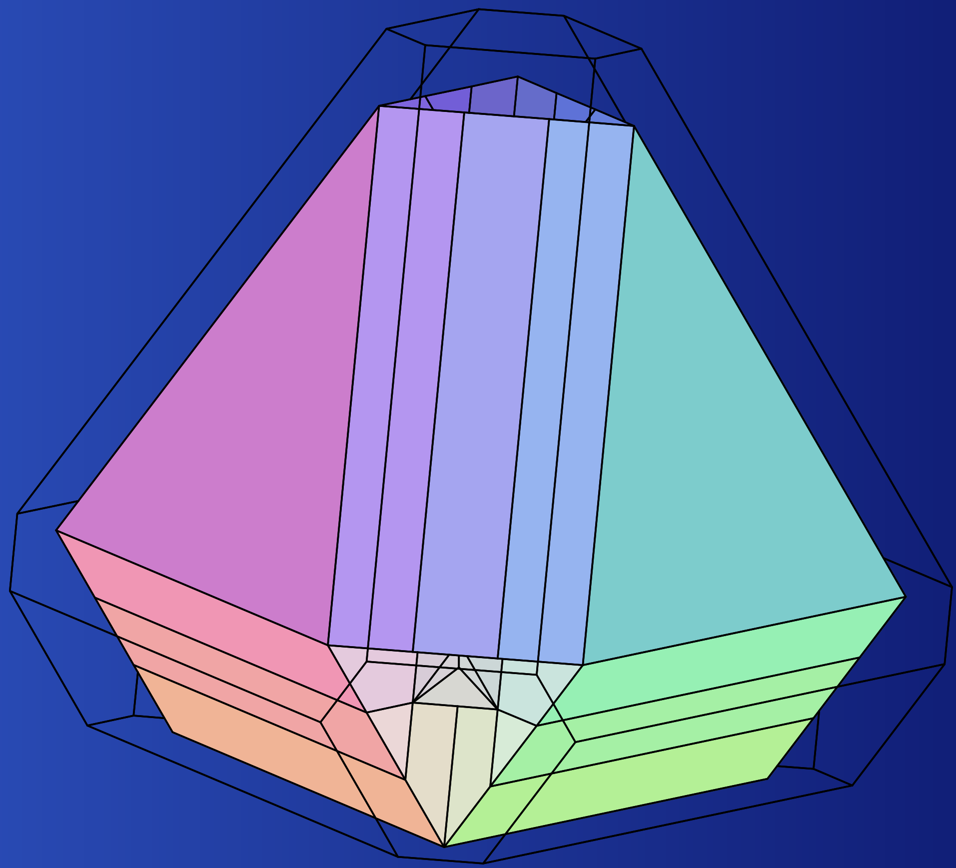
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



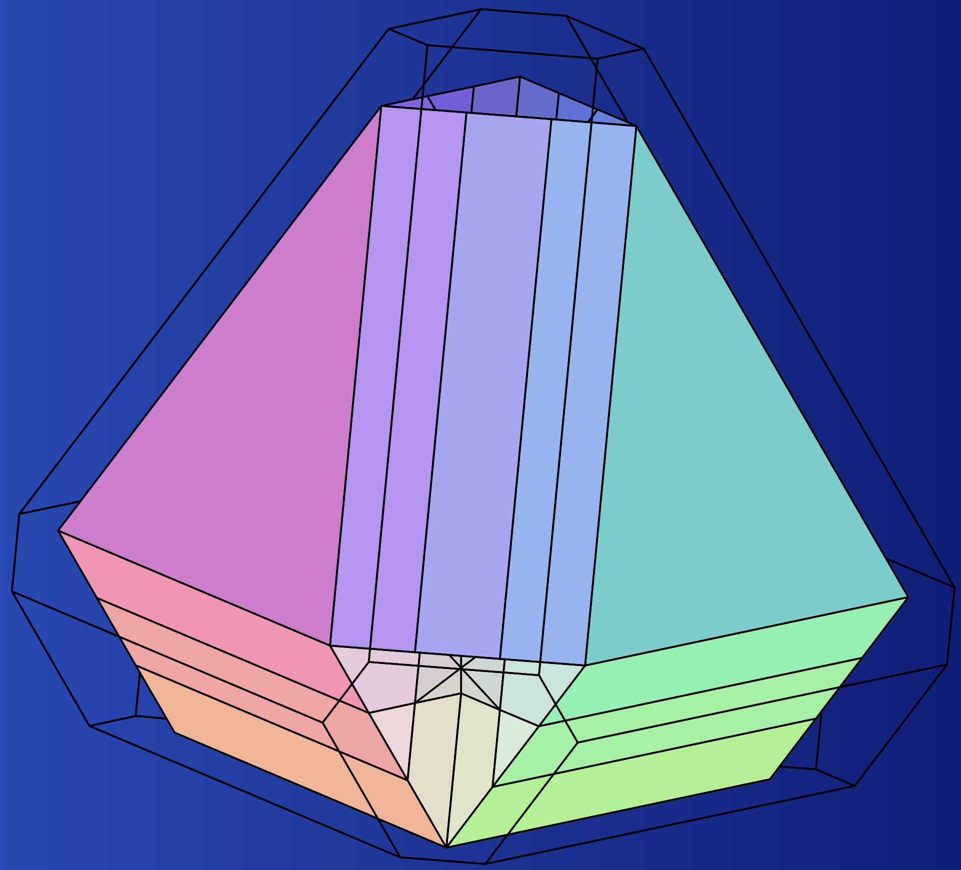
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



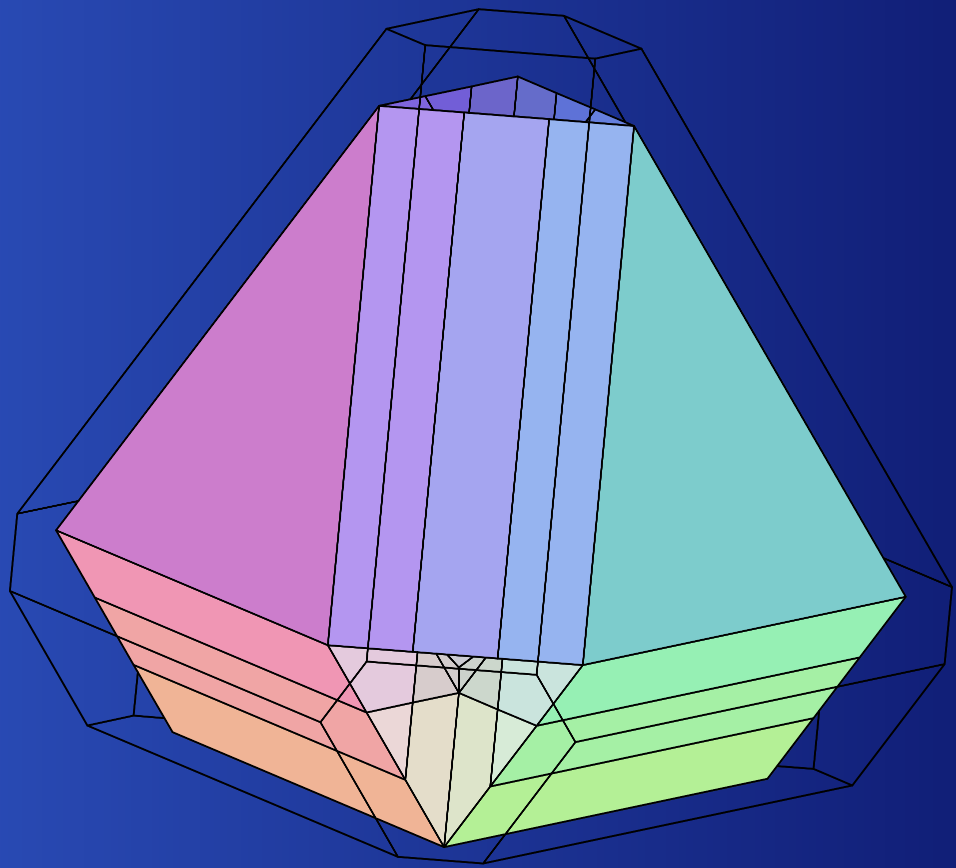
$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



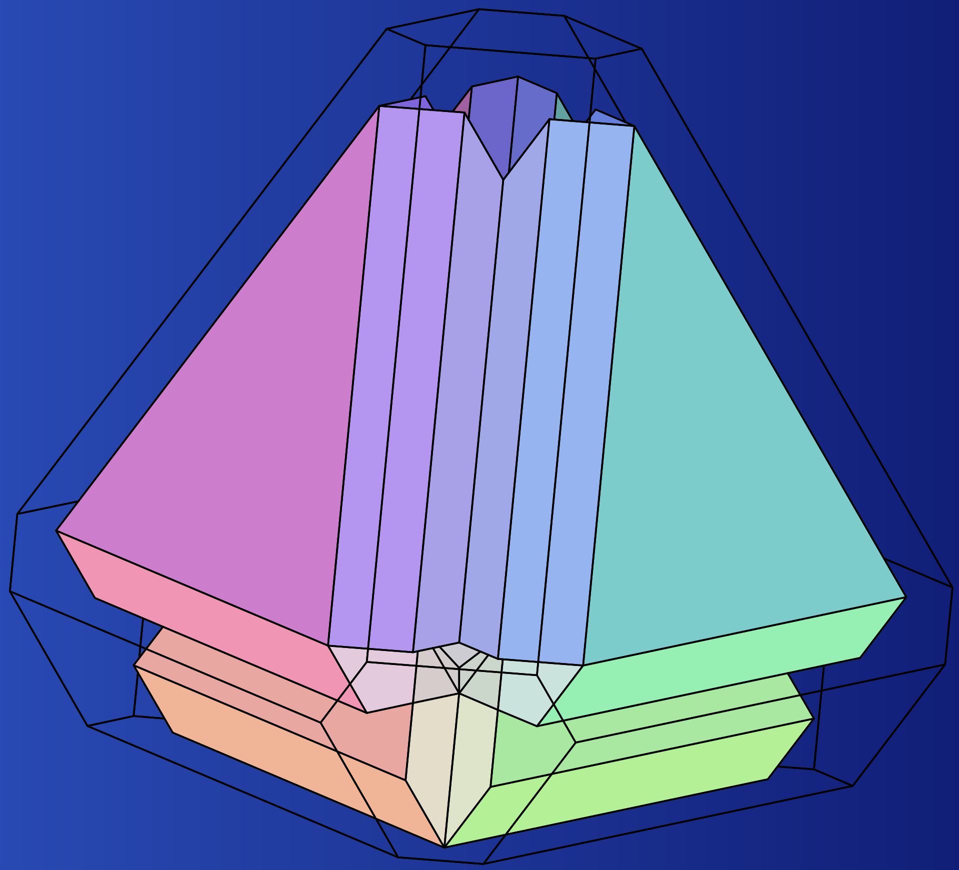
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



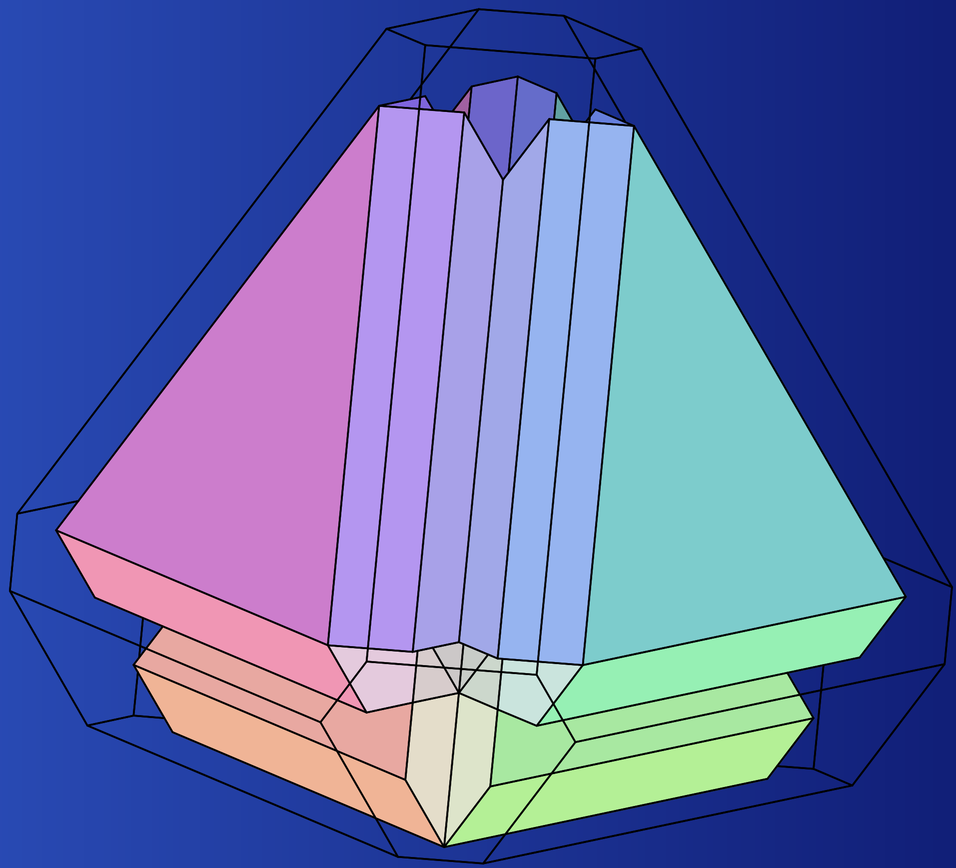
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



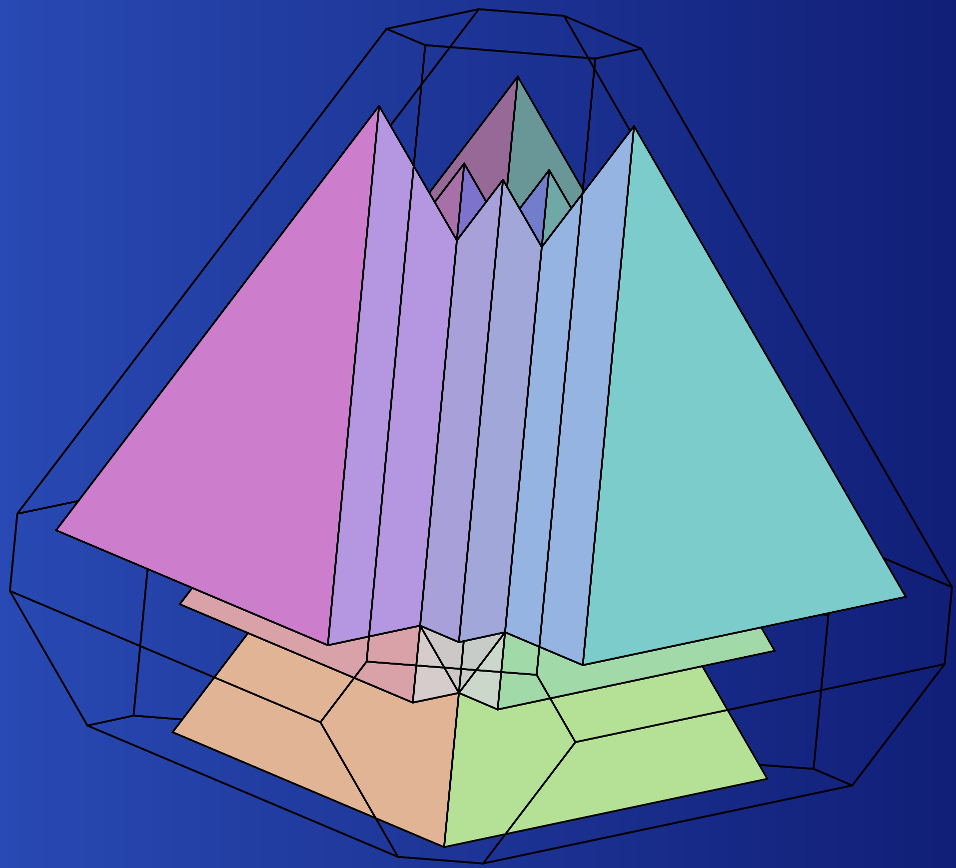
$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



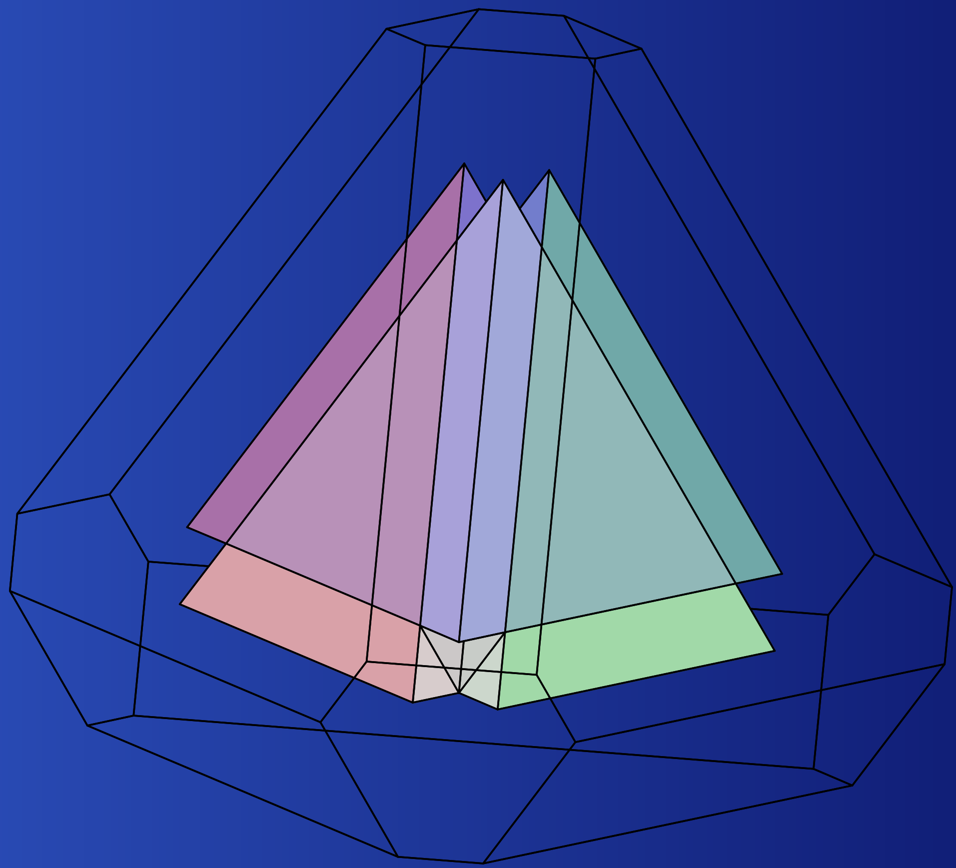
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



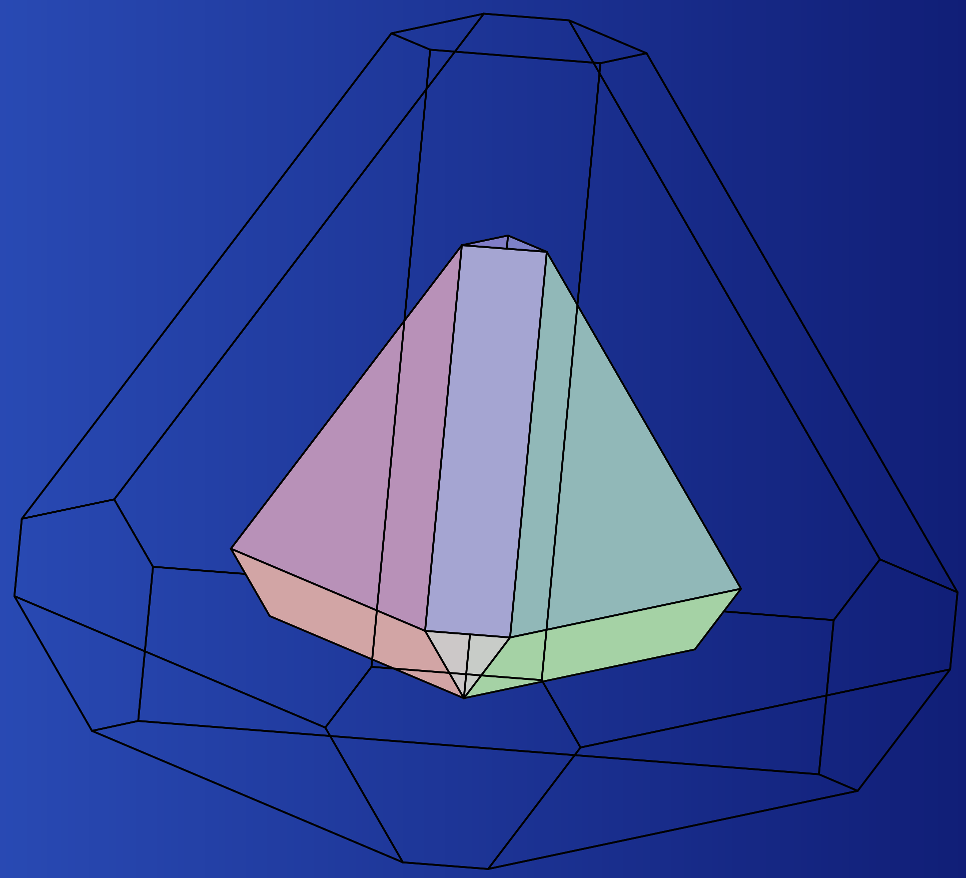
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



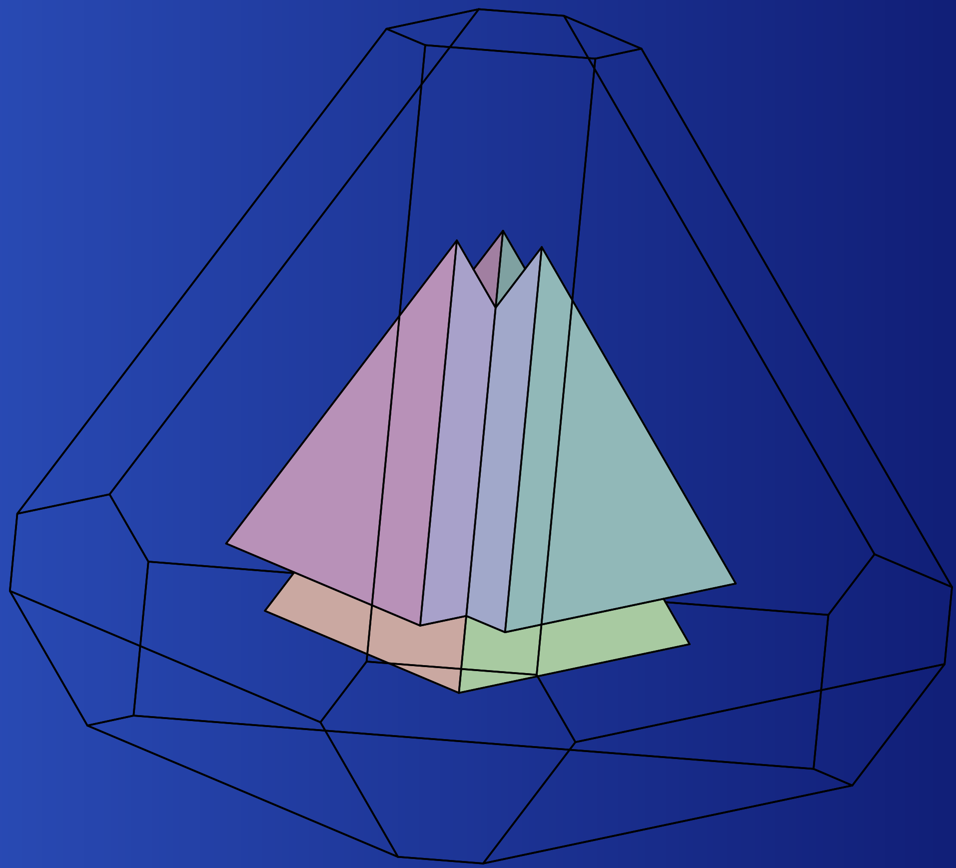
$\lambda = (23, 7, 5, 1)$



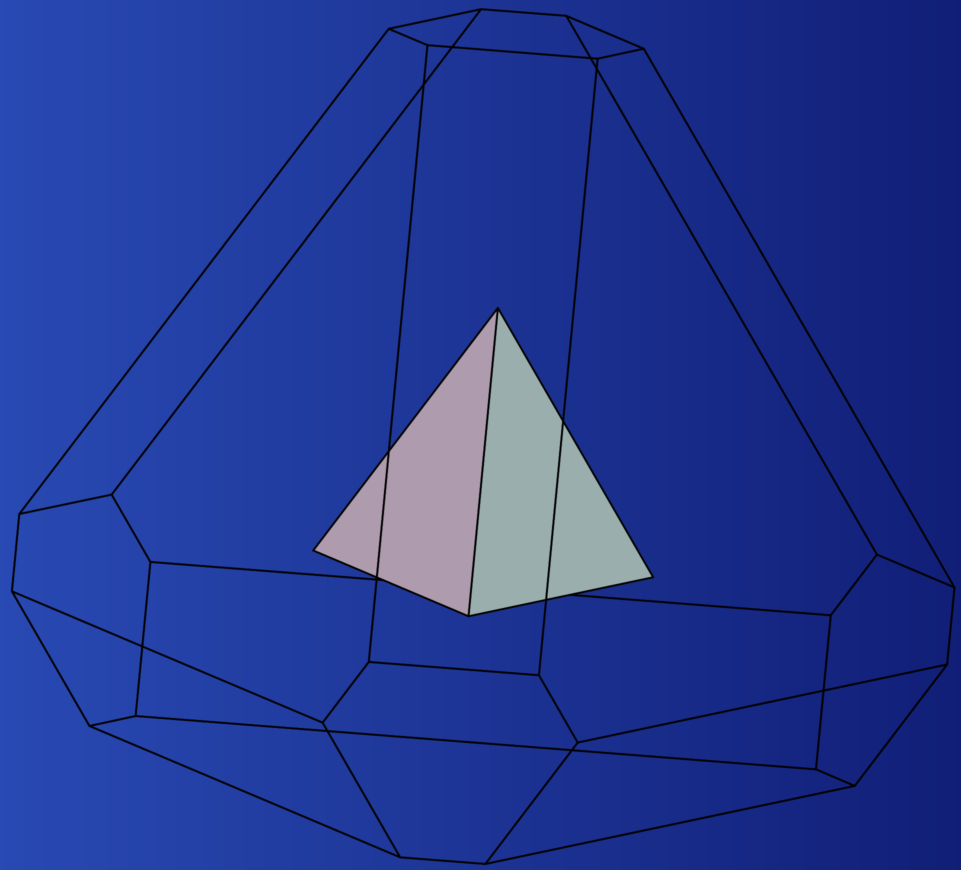
$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



$\lambda = (23,\ 7,\ 5,\ 1)$



Racines et poids pour A_{k-1}

- Racines

$$\Delta = \{e_i - e_j \;:\; 1 \leq i \neq j \leq k\}\,.$$

- Racines positives

$$\Delta_+ = \{e_i - e_j \;:\; 1 \leq i < j \leq k\}\,.$$

- Racines simples

$$\Pi = \{\underbrace{e_i - e_{i+1}}_{\alpha_i} \;:\; 1 \leq i \leq k-1\}\,.$$

- Poids fondamentaux : $\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}$ définis par $\langle \alpha_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij}$.

$$\omega_i \equiv (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{i \text{ fois}},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k-i \text{ fois}})$$

- Les vecteurs normaux aux facettes du permutaèdre $\mathrm{conv}(\mathfrak{S}_k \cdot \lambda)$ sont les conjugués $\theta(\omega_i)$ des poids fondamentaux.

$$\delta \quad = \quad \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$$

La formule de multiplicité de Kostant

La fonction de partition de Kostant est la fonction

$$K(v) = \left|\left\{ (k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+} \in \mathbb{N}^{|\Delta_+|} \ : \ \sum_{\alpha\in\Delta_+} k_\alpha \alpha = v \right\}\right|,$$

i.e. $K(v)$ est le nombre de façons d'écrire v comme une somme de racines positives.

La formule de multiplicité de Kostant

La fonction de partition de Kostant est la fonction

$$K(v) = \left|\left\{(k_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+} \in \mathbb{N}^{|\Delta_+|} \ : \ \sum_{\alpha\in\Delta_+} k_\alpha \alpha = v\right\}\right|,$$

i.e. $K(v)$ est le nombre de façons d'écrire v comme une somme de racines positives.

Formule de multiplicité de Kostant

$$K_{\lambda\beta} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} K(\sigma(\lambda+\delta) - (\beta+\delta)).$$

Diagrammes de Gelfand-Tsetlin

Un diagramme de Gelfand-Tsetlin pour λ est un triangle d'entiers de la forme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1^{(k)} & & \lambda_2^{(k)} & & \cdots & & \lambda_{k-1}^{(k)} & & \lambda_k^{(k)} \\
& \lambda_1^{(k-1)} & & \lambda_2^{(k-1)} & & \cdots & & \lambda_{k-1}^{(k-1)} & \\
& & \ddots & & \vdots & & \iddots & & \\
& & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & & \\
& & & & \lambda_1^{(1)} & & & &
\end{array}$$

tel que

Diagrammes de Gelfand-Tsetlin

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1^{(k)} & & \lambda_2^{(k)} & & \cdots & & \lambda_{k-1}^{(k)} & & \lambda_k^{(k)} \\
& \lambda_1^{(k-1)} & & \lambda_2^{(k-1)} & & \cdots & & \lambda_{k-1}^{(k-1)} & \\
& & \ddots & & \vdots & & \iddots & & \\
& & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & & \\
& & & & \lambda_1^{(1)} & & & &
\end{array}
$$

Diagrammes de Gelfand-Tsetlin

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \cdots & & \lambda_{k-1} & & \lambda_k \\
& \lambda_1^{(k-1)} & & \lambda_2^{(k-1)} & & \cdots & & \lambda_{k-1}^{(k-1)} & \\
& & \ddots & & \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\
& & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & & \\
& & & & \lambda_1^{(1)} & & & &
\end{array}
$$

Diagrammes de Gelfand-Tsetlin

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \cdots & & \lambda_{k-1} & & \lambda_k \\
& \lambda_1^{(k-1)} & & \lambda_2^{(k-1)} & & \cdots & & \lambda_{k-1}^{(k-1)} & \\
& & \ddots & & \vdots & & \iddots & & \\
& & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & & \\
& & & & \lambda_1^{(1)} & & & &
\end{array}
$$

et

$$
\begin{array}{ccccc}
\lambda_j^{(i+1)} & & & & \lambda_{j+1}^{(i+1)} \\
& \geq & & \geq & \\
& & \lambda_j^{(i)} & &
\end{array}
$$

pour tout tel triangle dans le diagramme.

Diagrammes de G-T et $K_{\lambda\beta}$

Lemme **(Gelfand-Tsetlin)**

Le nombre de Kostka $K_{\lambda\beta}$ est le nombre de diagrammes de Gelfand-Tsetlin avec première ligne λ et sommes des lignes satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(m)} = \beta_1 + \cdots + \beta_m \qquad \textit{pour } 1 \leq m \leq k.$$

Polytopes de Gelfand-Tsetlin

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \cdots & & \lambda_{k-1} & & \lambda_k \\
& \lambda_1^{(k-1)} & & \lambda_2^{(k-1)} & & \cdots & & \lambda_{k-1}^{(k-1)} & \\
& & \ddots & & \vdots & & \iddots & & \\
& & & \lambda_1^{(2)} & & \lambda_2^{(2)} & & & \\
& & & & \lambda_1^{(1)} & & & &
\end{array}$$

GT_λ $\mathrm{GT}_{\lambda\beta}$

Diagrammes de G-T et TYSS

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & & 5 & & 4 & & 1 \\ & 6 & & 5 & & 2 & \\ & & 5 & & 3 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 17$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 13$$
$$\beta_1 + \beta_2 = 8$$
$$\beta_1 = 3$$

Diagrammes de G-T et TYSS

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & & 5 & & 4 & & 1 \\ & 6 & & 5 & & 2 & \\ & & 5 & & 3 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 17$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 13$$
$$\beta_1 + \beta_2 = 8$$
$$\beta_1 = 3$$

1	1	1

$$(3)$$

Diagrammes de G-T et TYSS

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & & 5 & & 4 & & 1 \\ & 6 & & 5 & & 2 & \\ & & 5 & & 3 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 17$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 13$$
$$\beta_1 + \beta_2 = 8$$
$$\beta_1 = 3$$

$$\begin{array}{|c|c|c|cc} \hline 2 & 2 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 1 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$(5, 3)$$

Diagrammes de G-T et TYSS

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & & 5 & & 4 & & 1 \\ & 6 & & 5 & & 2 & \\ & & 5 & & 3 & & \\ & & & 3 & & & \end{array} \qquad \begin{aligned} &\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4 = 17 \\ &\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 13 \\ &\beta_1+\beta_2 = 8 \\ &\beta_1 = 3 \end{aligned}$$

3	3				
2	2	2	3	3	
1	1	1	2	2	3

$$(6,5,2)$$

Diagrammes de G-T et TYSS

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & & 5 & & 4 & & 1 \\ & 6 & & 5 & & 2 & \\ & & 5 & & 3 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 17$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 13$$
$$\beta_1 + \beta_2 = 8$$
$$\beta_1 = 3$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \color{red}{4} \\ \cline{1-4} 3 & 3 & \color{red}{4} & \color{red}{4} \\ \cline{1-5} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & \color{red}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$(7, 5, 4, 1)$$

Fonctions de partition vectorielles

Soit M une matrice entière $d \times n$. La fonction de partition vectorielle associée à M est la fonction

$$\begin{array}{rccc} \phi_M : & \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & b & \mapsto & |\{x \in \mathbb{N}^n \ : \ Mx = b\}| \end{array}$$

Fonctions de partition vectorielles

Soit M une matrice entière $d \times n$. La fonction de partition vectorielle associée à M est la fonction

$$\begin{array}{rccc} \phi_M : & \mathbb{Z}^d & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & b & \mapsto & |\{x \in \mathbb{N}^n \ : \ Mx = b\}| \end{array}$$

Exemple

Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \binom{3}{1}$ alors $\phi_M(b) = 3$

puisque $b = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} + \binom{2}{0} = \binom{1}{0} + \binom{2}{1} = 3\binom{1}{0} + \binom{0}{1}.$

Polytopes et fonctions de partition

- Si M est telle que $\mathrm{noyau}(M) \cap \mathbb{R}^n_{\geq 0} = 0$, alors

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \ : \ Mx = b\}$$

est un polytope.

Dans ce cas $\phi_M(b)$ est le nombre de points entiers dans le polytope P_b.

Polytopes et fonctions de partition

- Si M est telle que $\mathrm{noyau}(M) \cap \mathbb{R}^n_{\geq 0} = 0$, alors

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \ : \ Mx = b\}$$

est un polytope.

Dans ce cas $\phi_M(b)$ est le nombre de points entiers dans le polytope P_b .

- ϕ_M est nulle hors de $\mathrm{pos}(M)$.

Structure des fonctions de partition

- ϕ_M est quasipolynomiale par morceaux de degré $n - \mathrm{rang}(M)$. (Sturmfels)

Structure des fonctions de partition

- ϕ_M est quasipolynomiale par morceaux de degré $n - \mathrm{rang}(M)$. (Sturmfels)

- Les domaines de quasipolynomialité forment un complexe de cônes convexes polyédraux, le complexe de ϕ_M .

Structure des fonctions de partition

- ϕ_M est quasipolynomiale par morceaux de degré $n - \mathrm{rang}(M)$. (Sturmfels)

- Les domaines de quasipolynomialité forment un complexe de cônes convexes polyédraux, le complexe de ϕ_M .

- Alekseevskaya, Gelfand and Zelevinsky ont décrit comment obtenir le complexe d'une fonction de partition à partir de sa matrice.

Déterminer le complexe

On peut assumer sans perte de généralité que M a plein rang d.

- Trouver toutes les matrices $d \times d$ non-singulières M_σ de M.

Déterminer le complexe

On peut assumer sans perte de généralité que M a plein rang d .

- Trouver toutes les matrices $d \times d$ non-singulières M_σ de M .

- Déterminer les cônes $\tau_\sigma = \mathrm{pos}(M_\sigma)$ engendrés par les colonnes de M_σ .

Déterminer le complexe

On peut assumer sans perte de généralité que M a plein rang d.

- Trouver toutes les matrices $d \times d$ non-singulières M_σ de M.
- Déterminer les cônes $\tau_\sigma = \mathrm{pos}(M_\sigma)$ engendrés par les colonnes de M_σ.
- Le complexe de ϕ_M est le raffinement commun des cônes τ_σ.

Fonction de part. de Kostant pour A_3

$$\Delta_+^{(A_3)} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$$

Fonction de part. de Kostant pour A_3

$$\Delta_+^{(A_3)} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$$

$K(v) = \phi_{M_{A_3}}(v)$ pour

$$M_{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

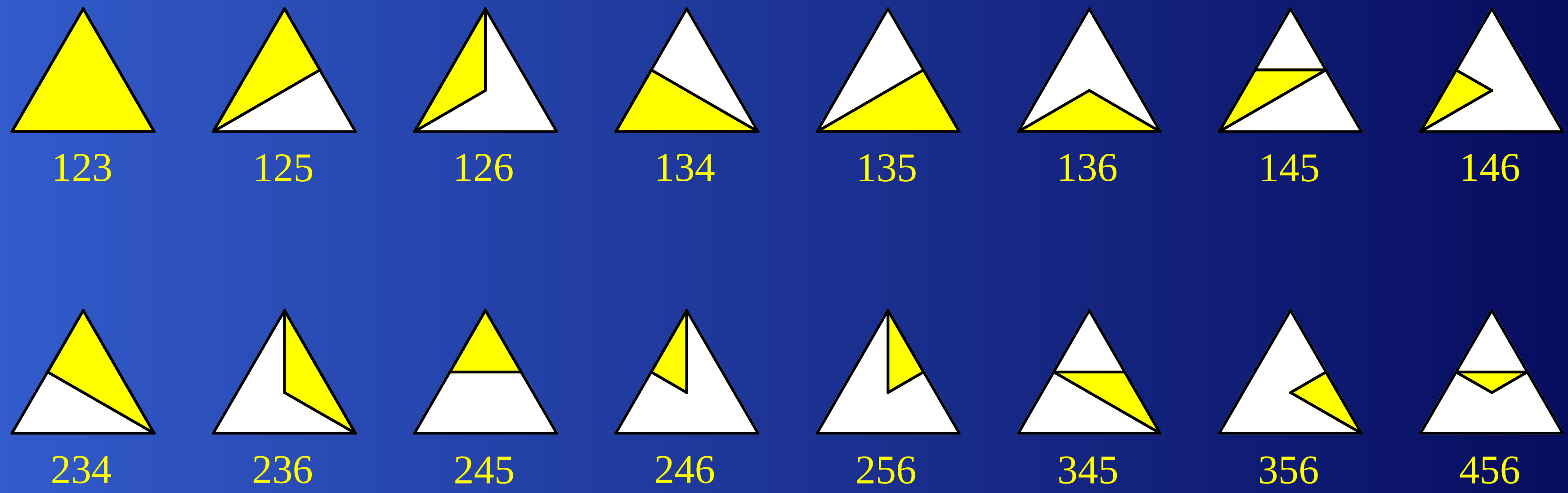
Fonction de part. de Kostant pour A_3

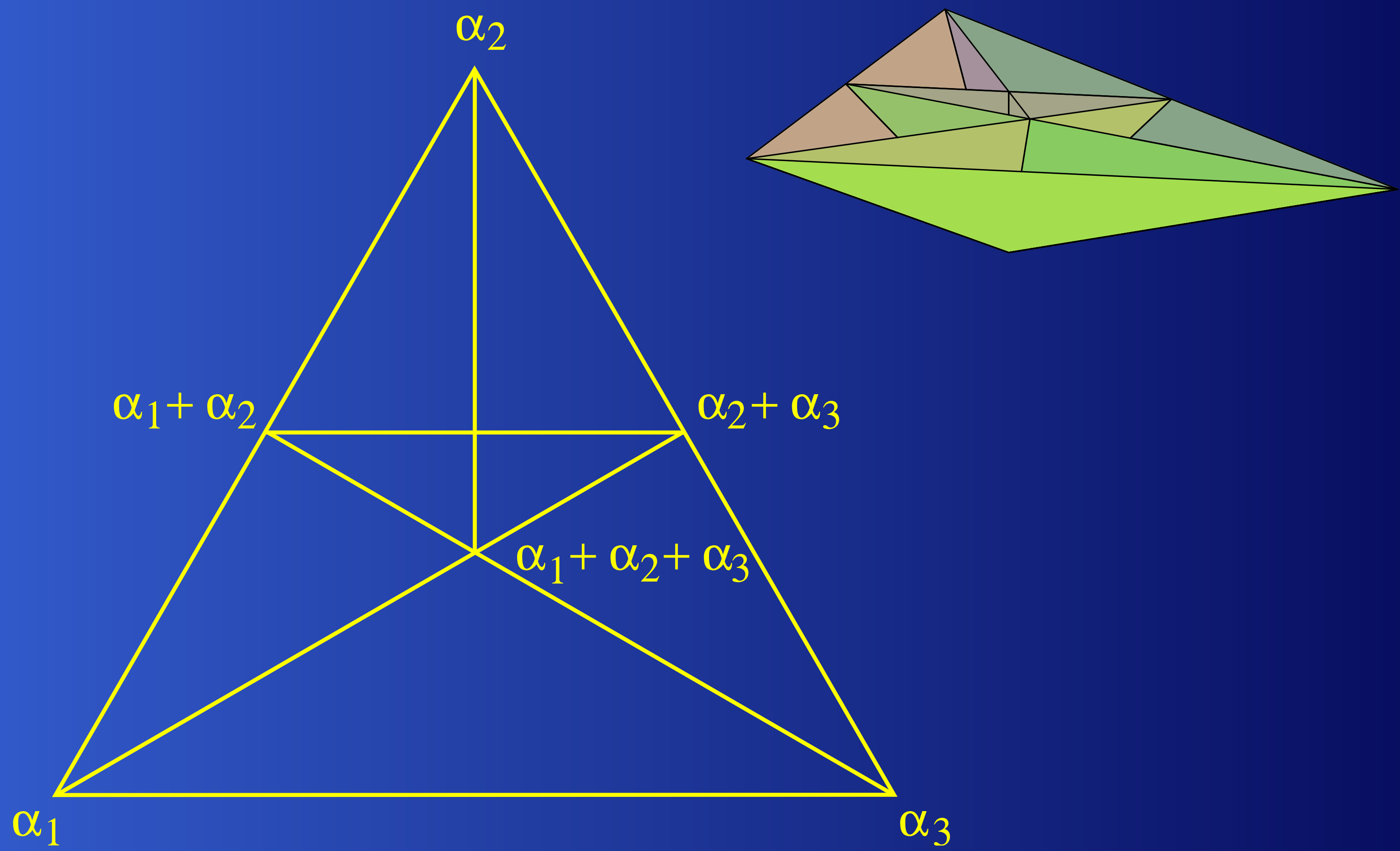
$$\Delta_+^{(A_3)} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}$$

$K(v) = \phi_{M_{A_3}}(v)$ pour

$$M_{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{123, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, \\ &\quad 234, 236, 245, 246, 256, 345, 356, 456\}\,. \end{aligned}$$


123
125
126
134
135
136
145
146
234
236
245
246
256
345
356
456


α2
α1+ α2
α2+ α3
α1+ α2+ α3
α1
α3

Unimodularité

Une matrice $d \times n$ de plein rang d est unimodulaire si toutes ses sous-matrices $d \times d$ ont déterminant 0 ou ± 1.

Les fonctions de partition de matrices unimodulaires sont polynomiales sur les cônes de leur complexe. (Sturmfels)

Unimodularité

Une matrice $d \times n$ de plein rang d est unimodulaire si toutes ses sous-matrices $d \times d$ ont déterminant 0 ou ± 1.

Les fonctions de partition de matrices unimodulaires sont polynomiales sur les cônes de leur complexe. (Sturmfels)

Lemme **(bien connu)** *La matrice M_{A_n} est unimodulaire pour tout n.*

Unimodularité

Une matrice $d \times n$ de plein rang d est unimodulaire si toutes ses sous-matrices $d \times d$ ont déterminant 0 ou ± 1.

Les fonctions de partition de matrices unimodulaires sont polynomiales sur les cônes de leur complexe. (Sturmfels)

Lemme **(bien connu)** *La matrice M_{A_n} est unimodulaire pour tout n.*

Corollaire *La fonction de partition de Kostant pour A_{k-1} est polynomiale de degré $\binom{k-1}{2}$ sur les cônes de son complexe.*

Une fonction de partition pour $K_{\lambda\beta}$

Théorème A

Pour tout k, on peut trouver des matrices entières E_k et B_k telles que les nombres de Kostka pour des partages avec au plus k parts sont donnés par

$$K_{\lambda\beta} = \phi_{E_k}\left(B_k \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \end{pmatrix} \right) .$$

Exemple: A_2

Les diagrammes de Gelfand-Tsetlin pour A_2 ont la forme

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 \\ & \mu_1 & & \mu_2 & \\ & & \nu & & \end{array}$$

Exemple: A_2

Les diagrammes de Gelfand-Tsetlin pour A_2 ont la forme

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 \\ & \mu_1 & & \mu_2 & \\ & & \nu & & \end{array}$$

Sommes des lignes:

$$\begin{aligned} \nu &= \beta_1 \\ \mu_1 + \mu_2 &= \beta_1 + \beta_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \,. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &\leq \lambda_1 \\
-\mu_1 &\leq -\lambda_2 \\
-\mu_1 &\leq \lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\
\mu_1 &\leq \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \\
-\mu_1 &\leq -\beta_1 \\
-\mu_1 &\leq -\beta_2 \, .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcrcl}
\mu_1 & + & s_1 & = & \lambda_1 \\
-\mu_1 & + & s_2 & = & -\lambda_2 \\
-\mu_1 & + & s_3 & = & \lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\
\mu_1 & + & s_4 & = & \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \\
-\mu_1 & + & s_5 & = & -\beta_1 \\
-\mu_1 & + & s_6 & = & -\beta_2\,.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcl}
\mu_1 & + & s_1 & = & \lambda_1 \\
-\mu_1 & + & s_2 & = & -\lambda_2 \\
-\mu_1 & + & s_3 & = & \lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\
\mu_1 & + & s_4 & = & \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \\
-\mu_1 & + & s_5 & = & -\beta_1 \\
-\mu_1 & + & s_6 & = & -\beta_2\,.
\end{array}
$$

- Les s_i doivent être non-négatifs.

$$\begin{array}{rcrcl}
\mu_1 & + & s_1 & = & \lambda_1 \\
-\mu_1 & + & s_2 & = & -\lambda_2 \\
-\mu_1 & + & s_3 & = & \lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\
\mu_1 & + & s_4 & = & \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \\
-\mu_1 & + & s_5 & = & -\beta_1 \\
-\mu_1 & + & s_6 & = & -\beta_2 \,.
\end{array}$$

- Les s_i doivent être non-négatifs.
- Finalement on utilise $\mu_1 = \lambda_1 - s_1$ pour se débarrasser de μ_1.

$$
\begin{aligned}
s_1 + s_2 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\
-s_2 + s_3 &= 2\lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\
s_2 + s_4 &= \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 \\
-s_2 + s_5 &= \lambda_2 - \beta_1 \\
-s_2 + s_6 &= \lambda_2 - \beta_2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ -s_2 + s_3 &= 2\lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\ s_2 + s_4 &= \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 \\ -s_2 + s_5 &= \lambda_2 - \beta_1 \\ -s_2 + s_6 &= \lambda_2 - \beta_2 \end{aligned}$$

- On résout pour $s_i \geq 0 \;\; \forall\, i$.

$$
\begin{aligned}
s_1 + s_2 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\
-s_2 + s_3 &= 2\lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\
s_2 + s_4 &= \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 \\
-s_2 + s_5 &= \lambda_2 - \beta_1 \\
-s_2 + s_6 &= \lambda_2 - \beta_2
\end{aligned}
$$

- On résout pour $s_i \geq 0 \;\; \forall\, i$.
- Demander que les s_i soient entiers donne toutes les solutions entières au système de contraintes de Gelfand-Tsetlin.

On doit résoudre

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 \\ \lambda_2 - \beta_1 \\ \lambda_2 - \beta_2 \end{pmatrix}}_{B_2\binom{\lambda}{\beta}}$$

pour $\vec{s} \in \mathbb{N}^6$.

On doit résoudre

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_2 - \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 + \lambda_1 \\ \lambda_2 - \beta_1 \\ \lambda_2 - \beta_2 \end{pmatrix}}_{B_2\binom{\lambda}{\beta}}$$

pour $\vec{s} \in \mathbb{N}^6$. Donc $\boxed{K_{\lambda\beta} = \phi_{E_2}\left(B_2\binom{\lambda}{\beta}\right).}$

Un complexe pour les $K_{\lambda\beta}$

- Le Théorème A implique que les nombres de Kostka sont donnés par des quasipolynômes sur les chambres d'un complexe $\mathcal{C}^{(k)}$.

Un complexe pour les $K_{\lambda\beta}$

- Le Théorème A implique que les nombres de Kostka sont donnés par des quasipolynômes sur les chambres d'un complexe $\mathcal{C}^{(k)}$.

- La fonction de partition ϕ_{E_k} met λ et β sur un pied d'égalité: $\mathcal{C}^{(k)}$ est un complexe dans l'espace avec coordonnées (λ, β).

Un complexe pour les $K_{\lambda\beta}$

- Le Théorème A implique que les nombres de Kostka sont donnés par des quasipolynômes sur les chambres d'un complexe $\mathcal{C}^{(k)}$.
- La fonction de partition ϕ_{E_k} met λ et β sur un pied d'égalité: $\mathcal{C}^{(k)}$ est un complexe dans l'espace avec coordonnées (λ, β).
- En intersectant $\mathcal{C}^{(k)}$ avec le sous-espace affin correspondant à fixer λ,on trouve les domaines de quasipolynomialité de $\mathrm{conv}(\mathfrak{S}_k \cdot \lambda)$ (du permutaèdre).

La fonction de Duistermaat-Heckman

- Pour tout λ il y a une fonction, la fonction de Duistermaat-Heckman, qui est polynomiale par morceaux sur $\mathrm{conv}(\mathfrak{S}_k \cdot \lambda)$.

La fonction de Duistermaat-Heckman

- Pour tout λ il y a une fonction, la fonction de Duistermaat-Heckman, qui est polynomiale par morceaux sur $\mathrm{conv}(\mathfrak{S}_k \cdot \lambda)$.

- Elle approxime les nombres de Kostka.

La fonction de Duistermaat-Heckman

- Pour tout λ il y a une fonction, la fonction de Duistermaat-Heckman, qui est polynomiale par morceaux sur $\mathrm{conv}(\mathfrak{S}_k \cdot \lambda)$.

- Elle approxime les nombres de Kostka.

$$K_{\lambda\beta} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} K(\sigma(\lambda + \delta) - (\beta + \delta)) .$$

La fonction de Duistermaat-Heckman

- Pour tout λ il y a une fonction, la fonction de Duistermaat-Heckman, qui est polynomiale par morceaux sur $\mathrm{conv}(\mathfrak{S}_k \cdot \lambda)$.

- Elle approxime les nombres de Kostka.

$$K_{\lambda\beta} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} K(\sigma(\lambda+\delta) - (\beta+\delta)) \,.$$

$$f_\lambda^{\mathrm{DH}}(\beta) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \tilde{K}(\sigma(\lambda) - \beta) \,.$$

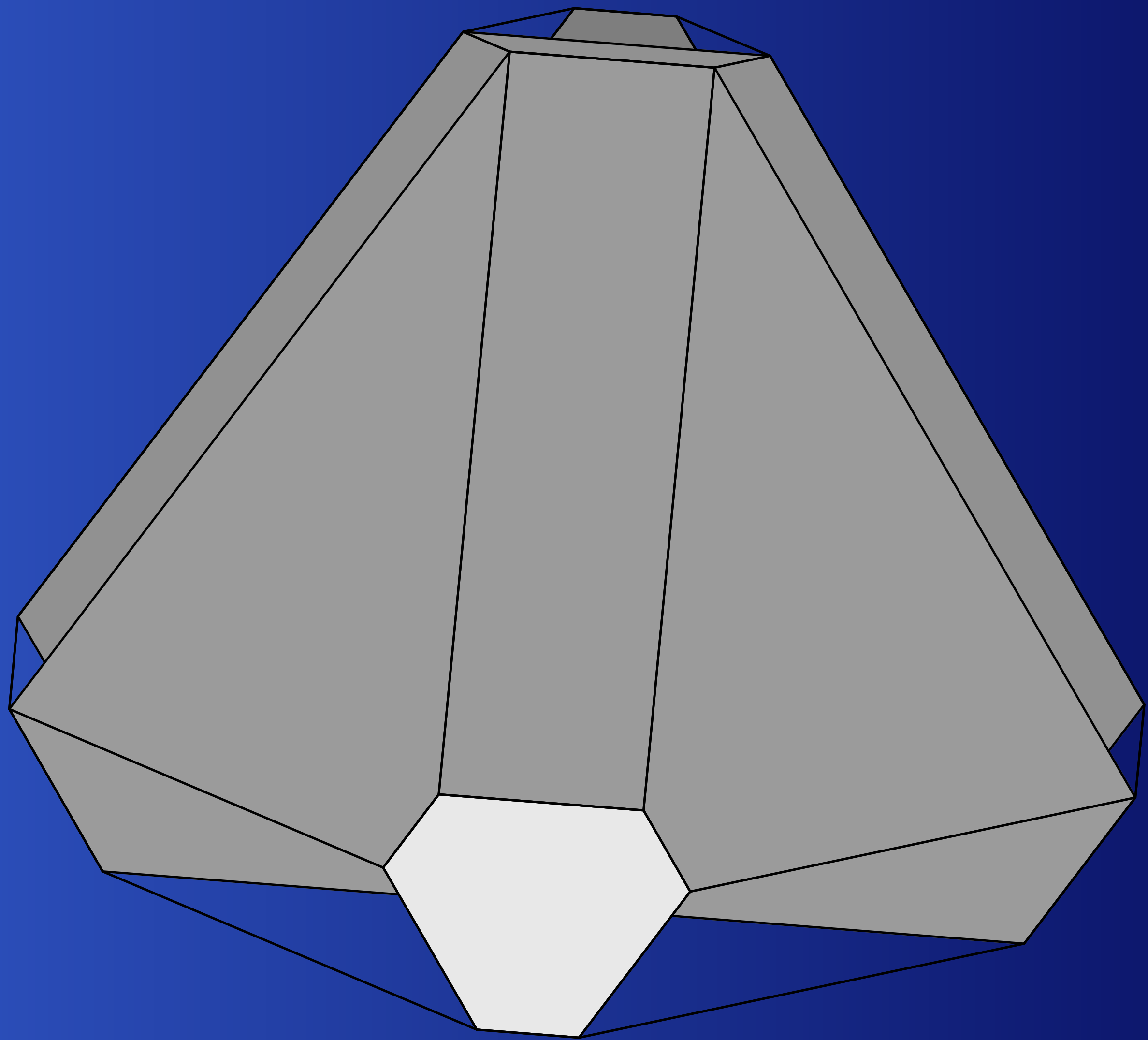
Théorème **(Heckman, Guillemin-Lerman-Sternberg)**

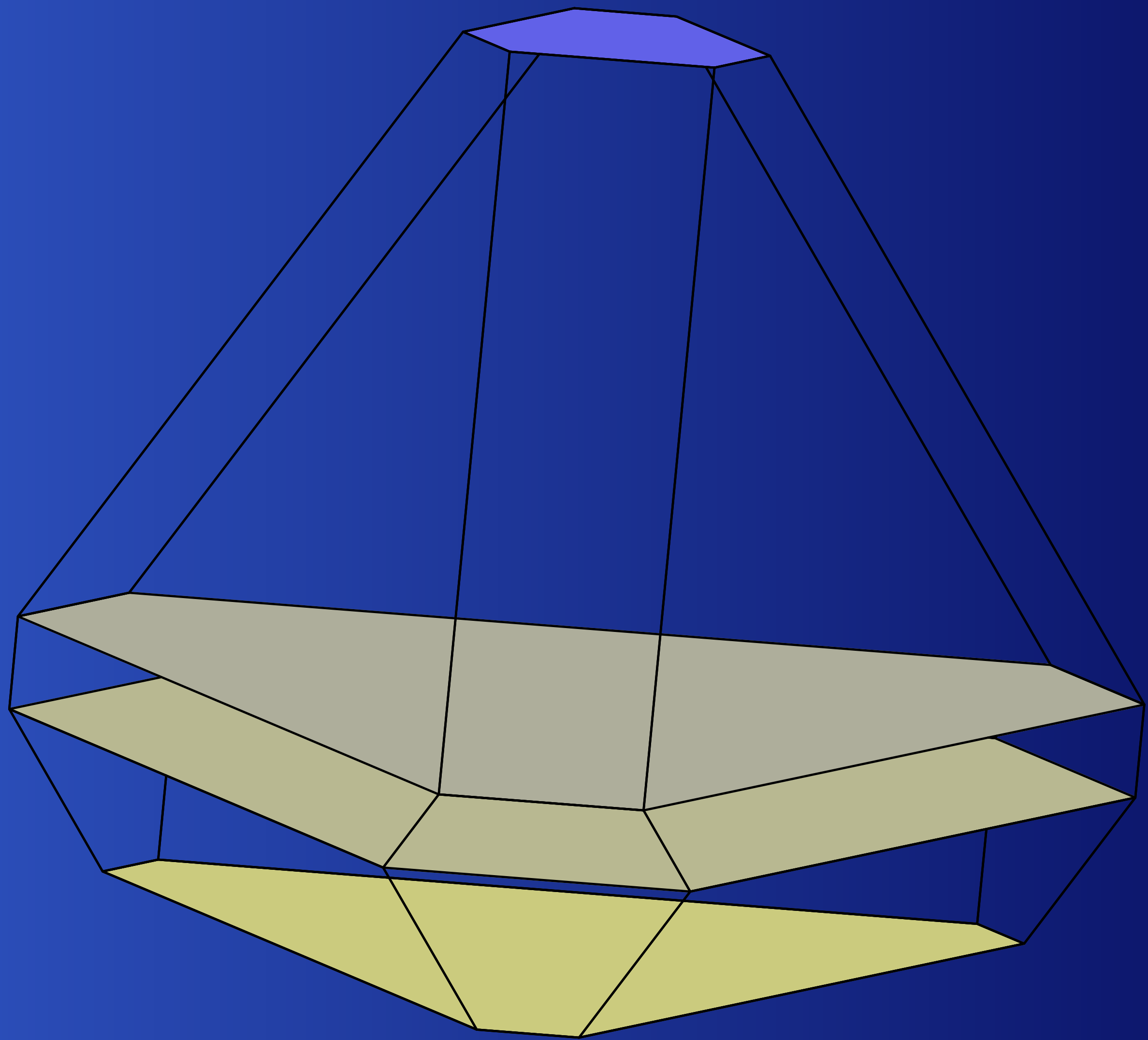
Soient les polytopes

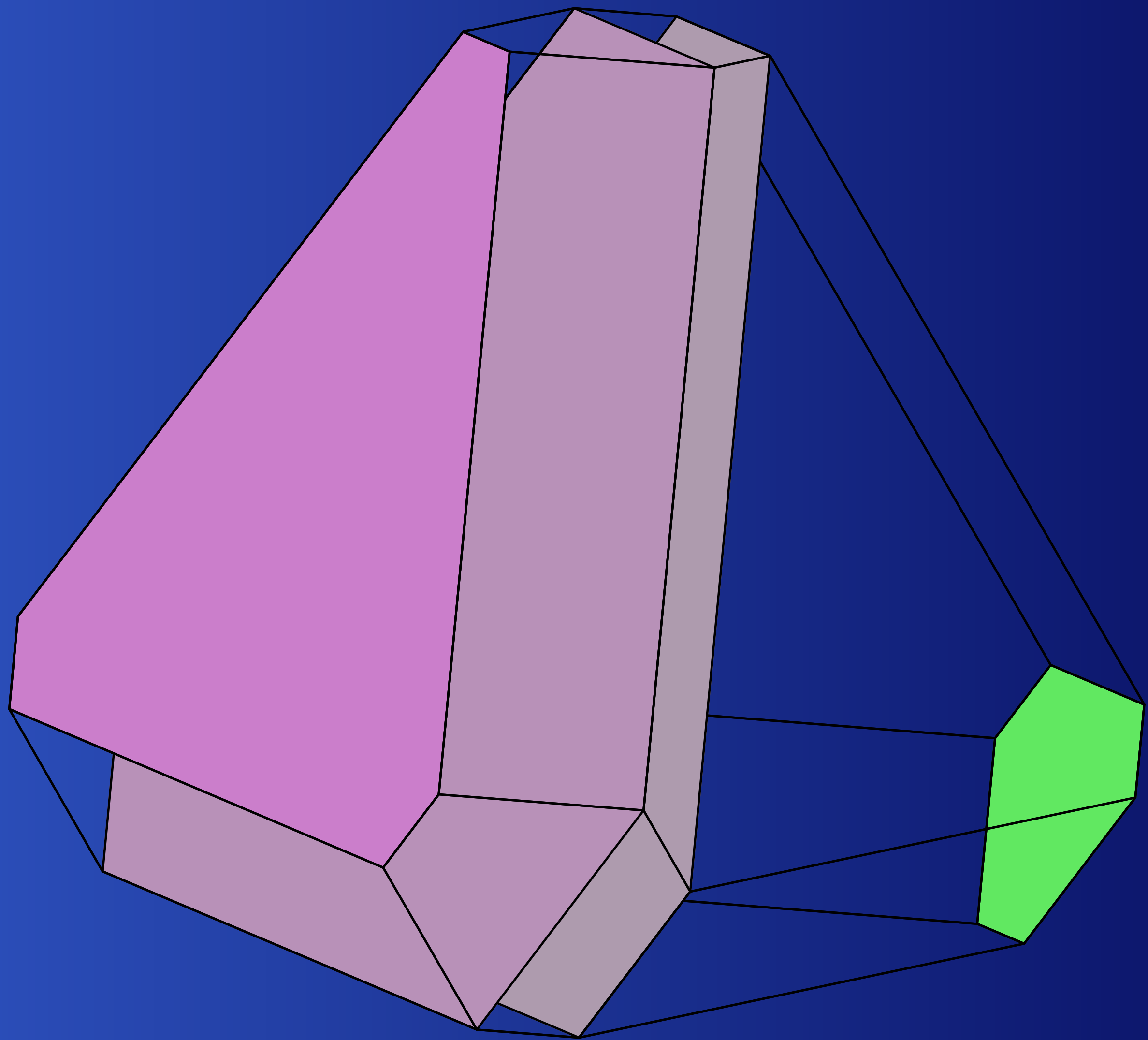
$$\mathrm{conv}(W \cdot \sigma(\lambda))$$

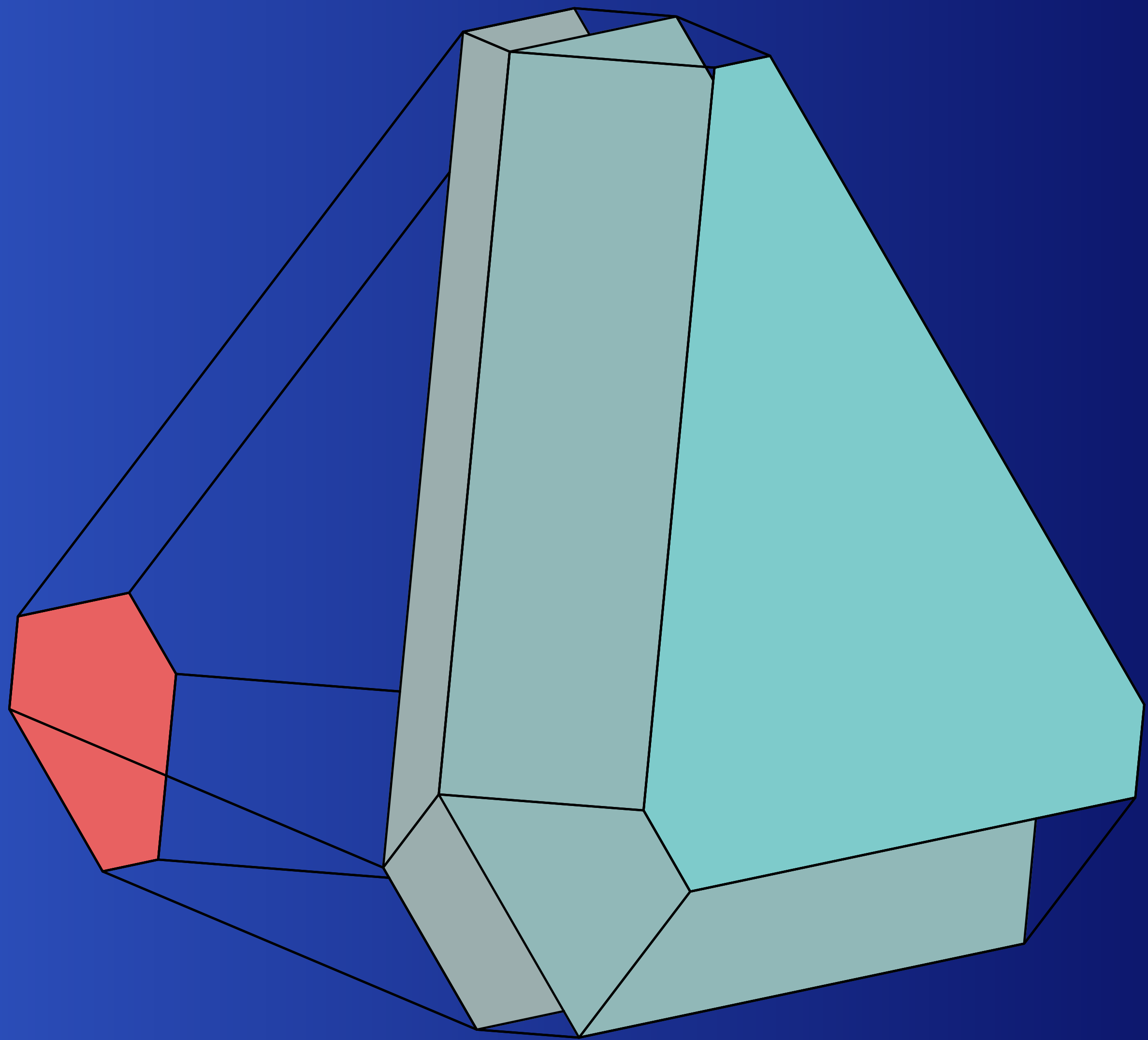
où $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ *et* W *est un sous-groupe de* $\mathfrak{S}_k$ *qui stabilise une facette de* $\mathrm{conv}(\mathfrak{S}_k \cdot \lambda)$*.*

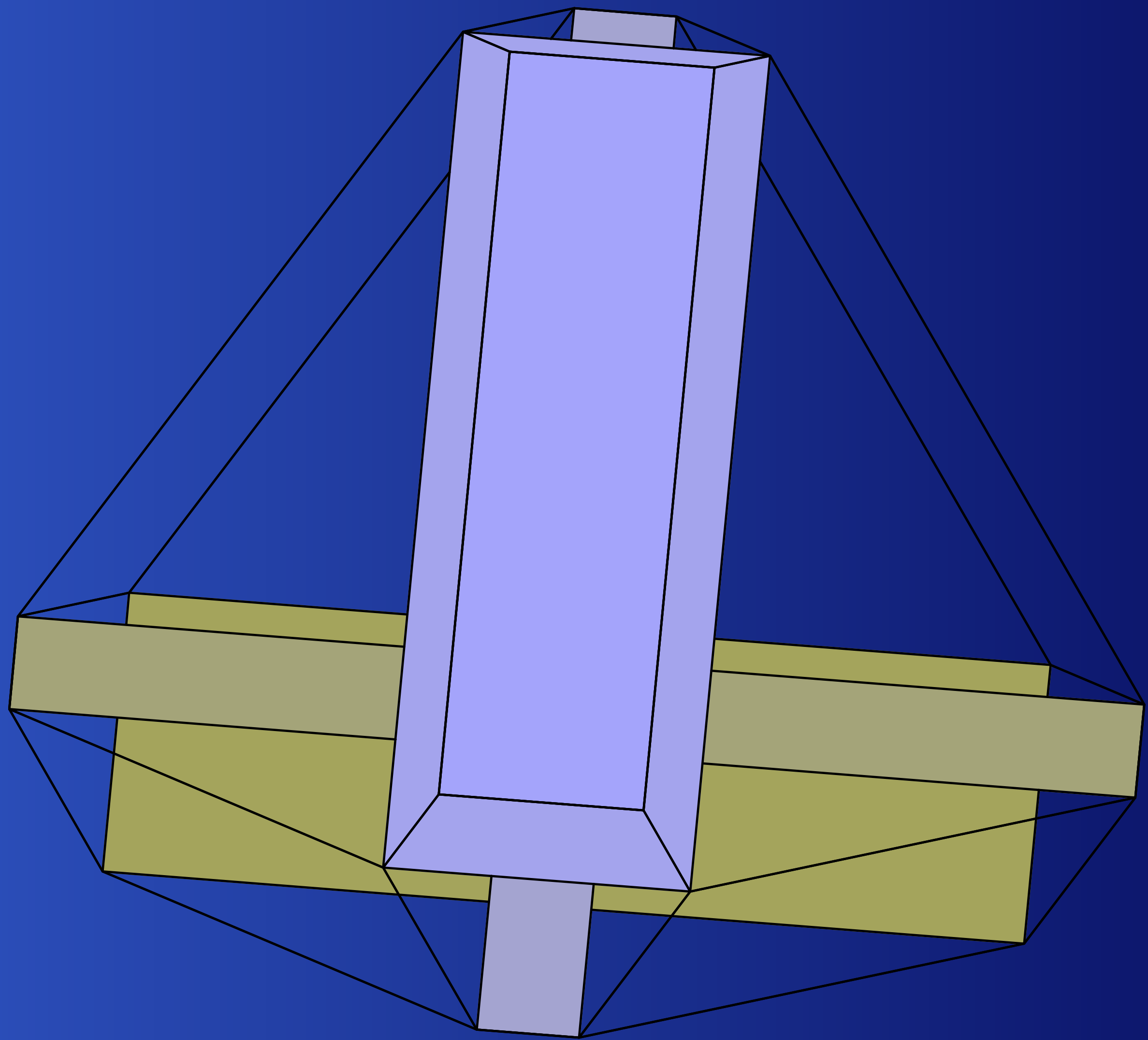
Ces polytopes forment des murs qui partitionnent $\mathrm{conv}(\mathfrak{S}_k \cdot \lambda)$ *en sous-polytopes convexes sur lesquels la fonction de Duistermaat-Heckman est polynomiale.*

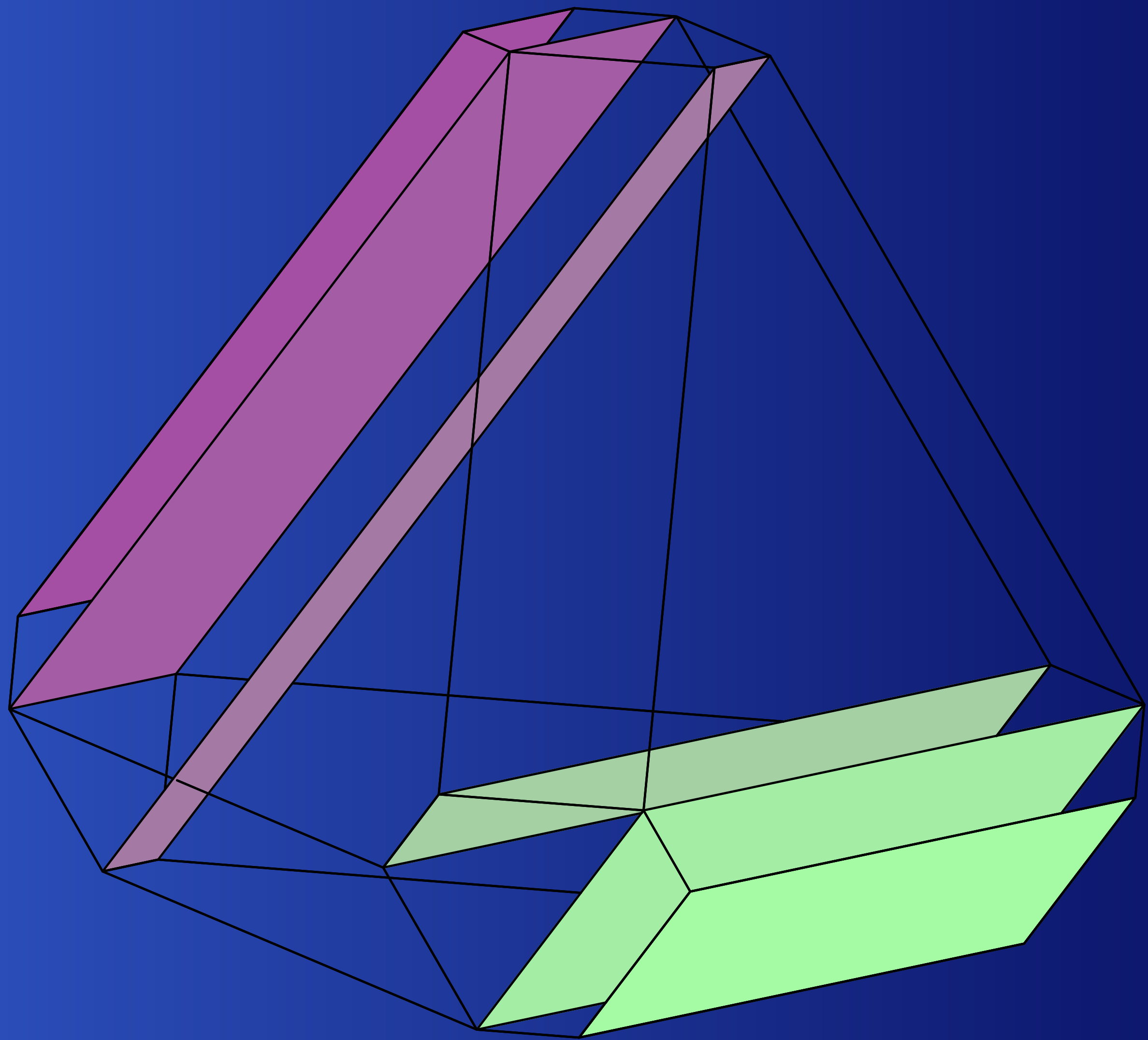


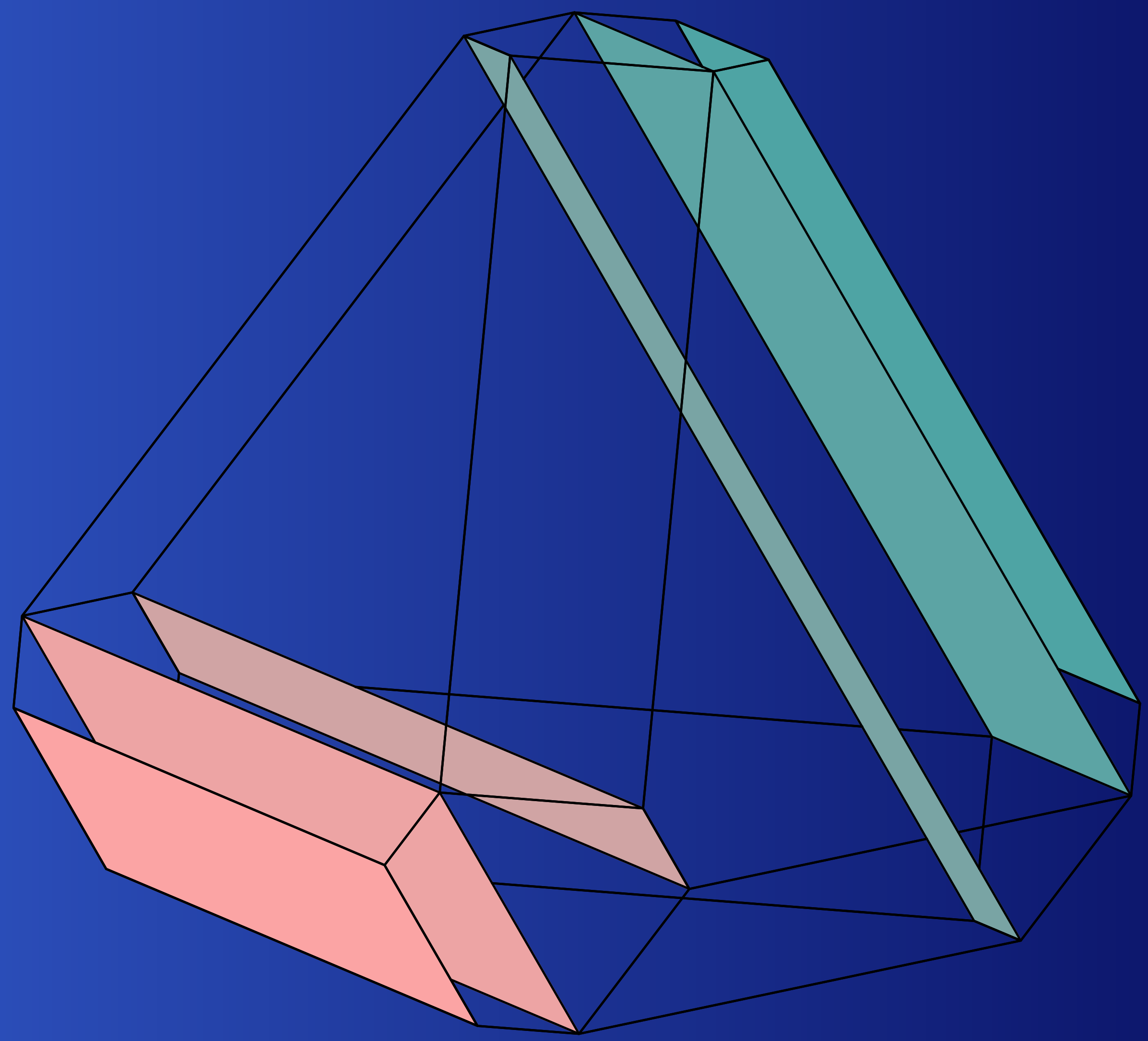


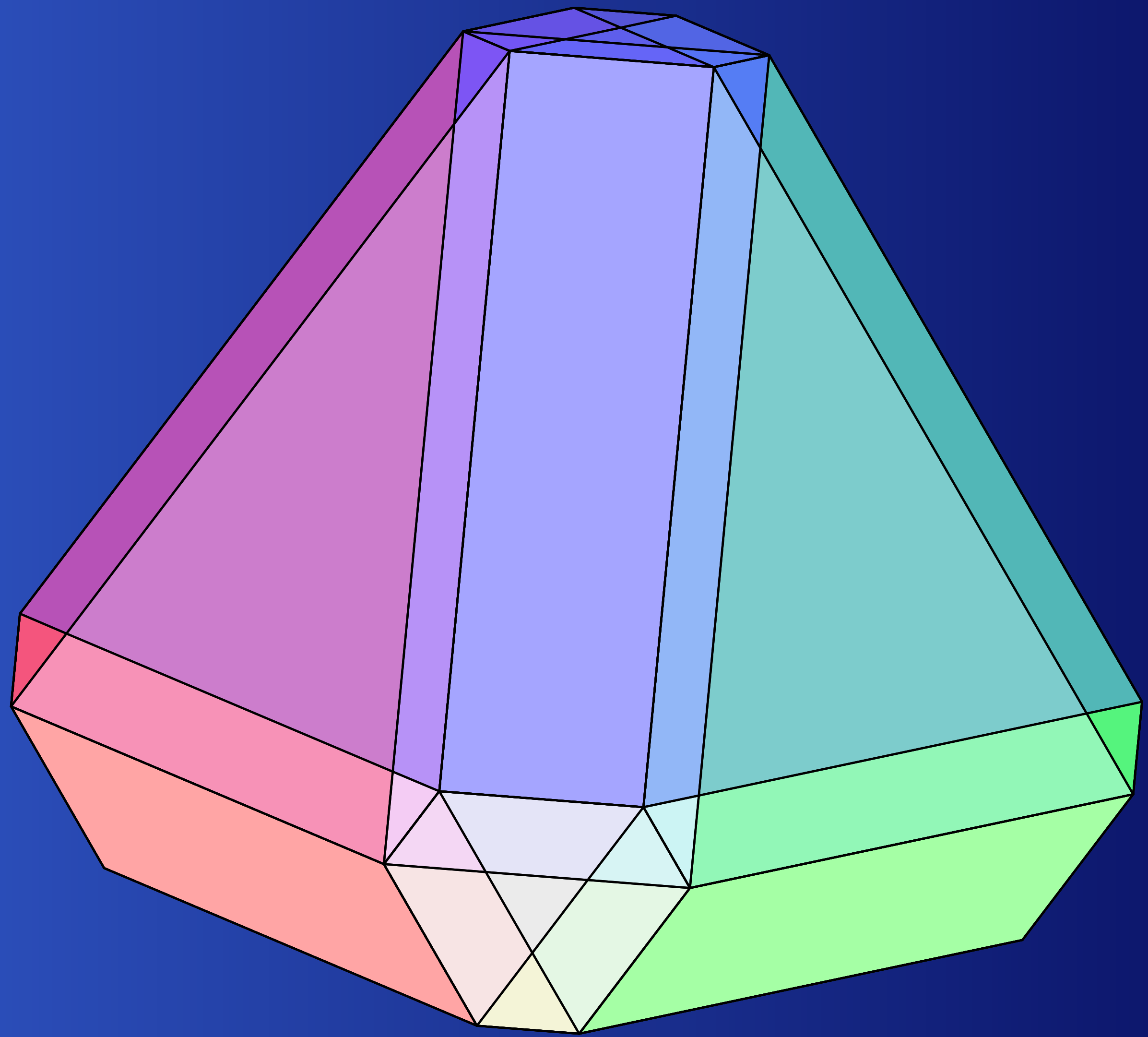












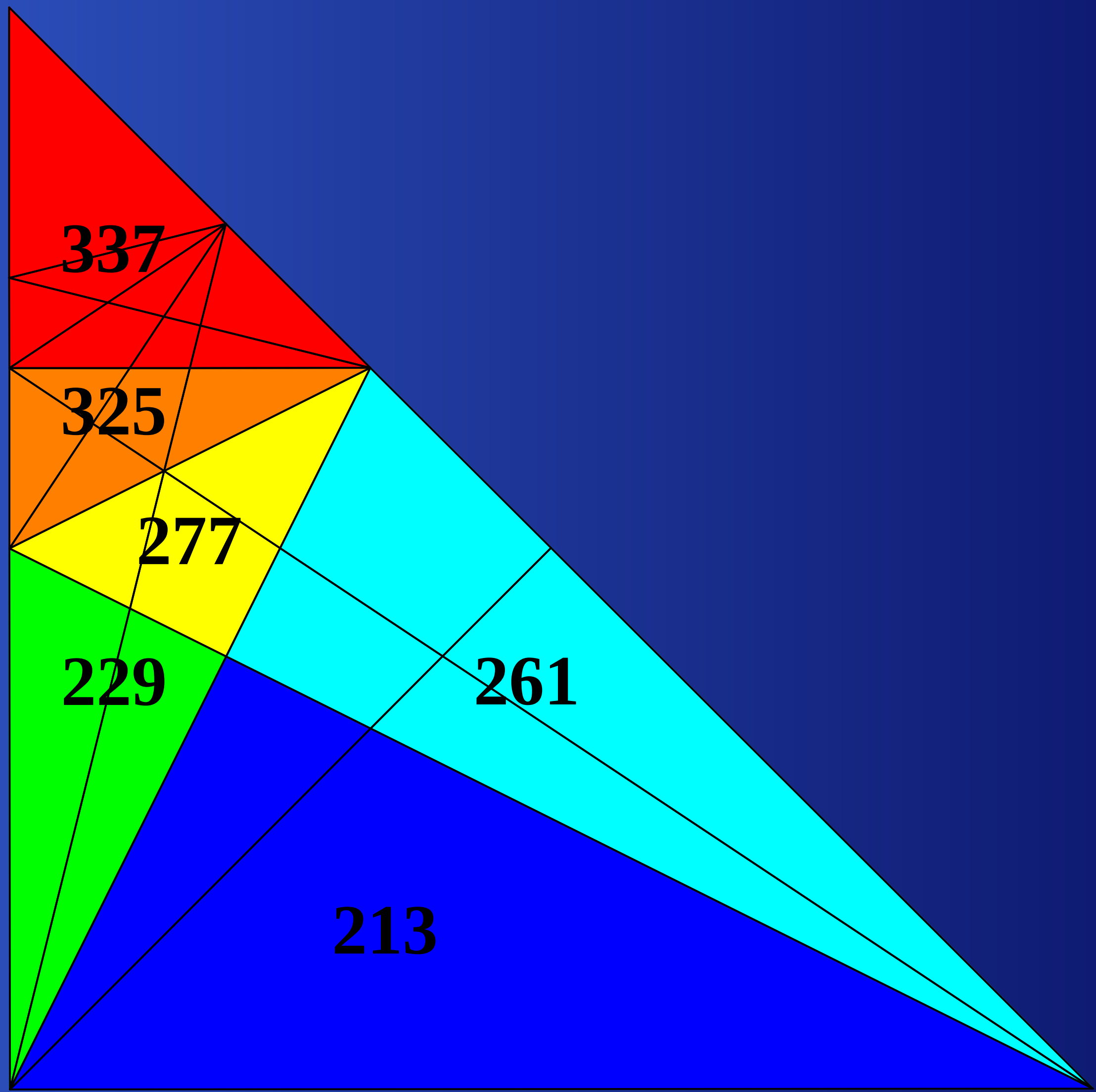
La fonction de D-H et les $K_{\lambda\beta}$

Théorème B

Les partitions du permutaèdre en ses domaines de quasipolynomialité pour les nombres de Kostka et ses domaines de polynomialité pour la fonction de Duistermaat-Heckman sont identiques.

Les domaines sont les sous-polytopes déterminés par le théorème de Heckman.

A_3



Du lien avec la fonction de
Duistermaat-Heckman function, on trouve

- une description combinatoire uniforme des murs qui partitionnent le permutaèdre en ses domaines de quasipolynomialité pour les nombres de Kostka;

Du lien avec la fonction de Duistermaat-Heckman function, on trouve

- une description combinatoire uniforme des murs qui partitionnent le permutaèdre en ses domaines de quasipolynomialité pour les nombres de Kostka;
- que ces domaines sont en fait des domaines de polynomialité.

Les arrangements de Kostant

Les arrangements de Kostant seront l'outil principal pour

- compléter la preuve que les nombres de Kostka sont donnés par des polynômes sur les chambres d'un complexe de cônes;

Les arrangements de Kostant

Les arrangements de Kostant seront l'outil principal pour

- compléter la preuve que les nombres de Kostka sont donnés par des polynômes sur les chambres d'un complexe de cônes;
- trouver des phénomènes de factorisation intéressants dans les polynômes donnant les nombres de Kostka.

- Formule de multiplicité de Kostant:

$$K_{\lambda\beta} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} K(\sigma(\lambda+\delta) - (\beta+\delta)) \,.$$

Fonc. de part. de Kostant poly. par morceaux

$$\Downarrow$$

Nombres de Kostka localement polynomiaux

- Formule de multiplicité de Kostant:

$$K_{\lambda\beta} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} K(\sigma(\lambda+\delta)-(\beta+\delta))\,.$$

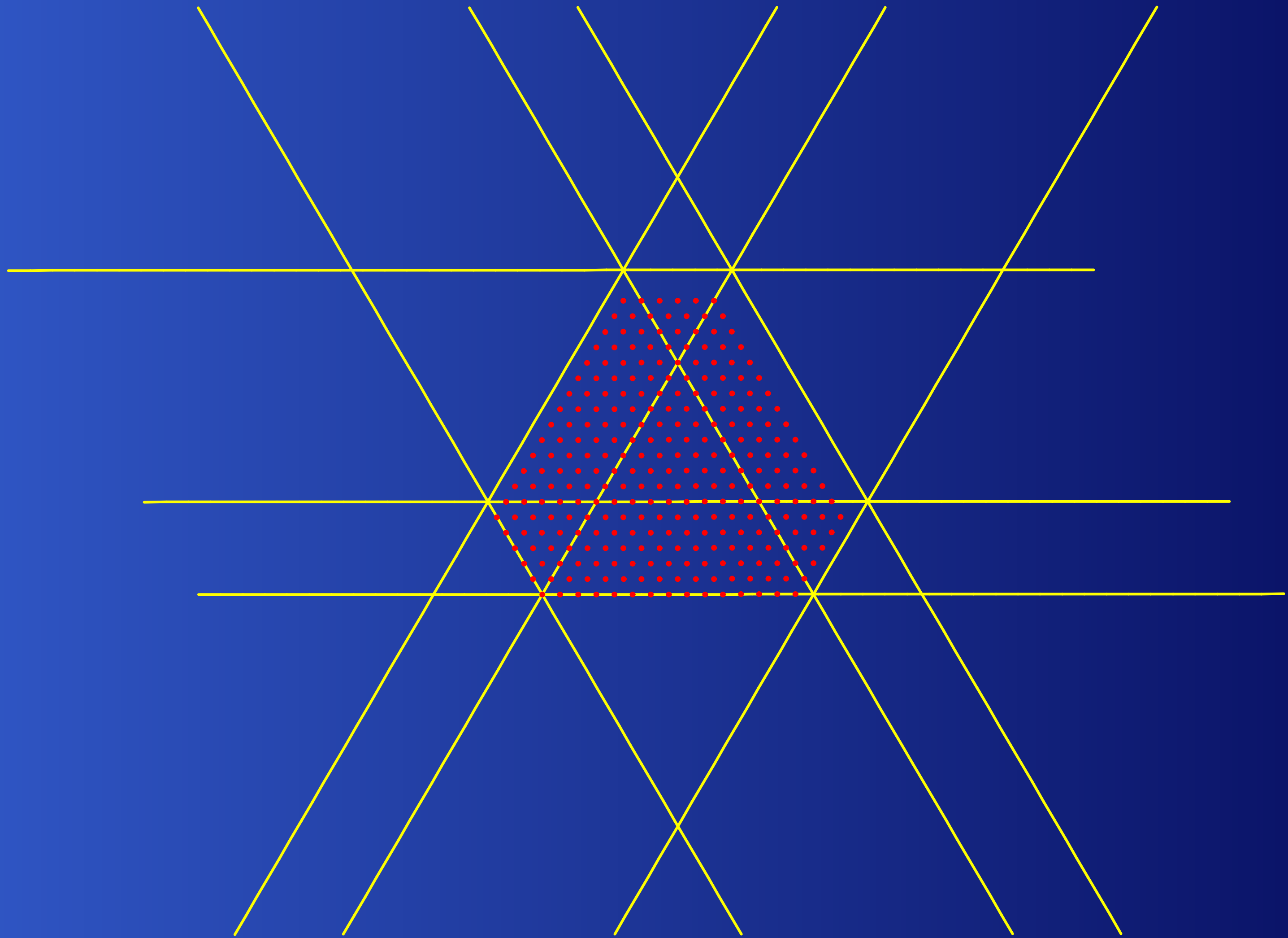
Fonc. de part. de Kostant poly. par morceaux

$$\Downarrow$$

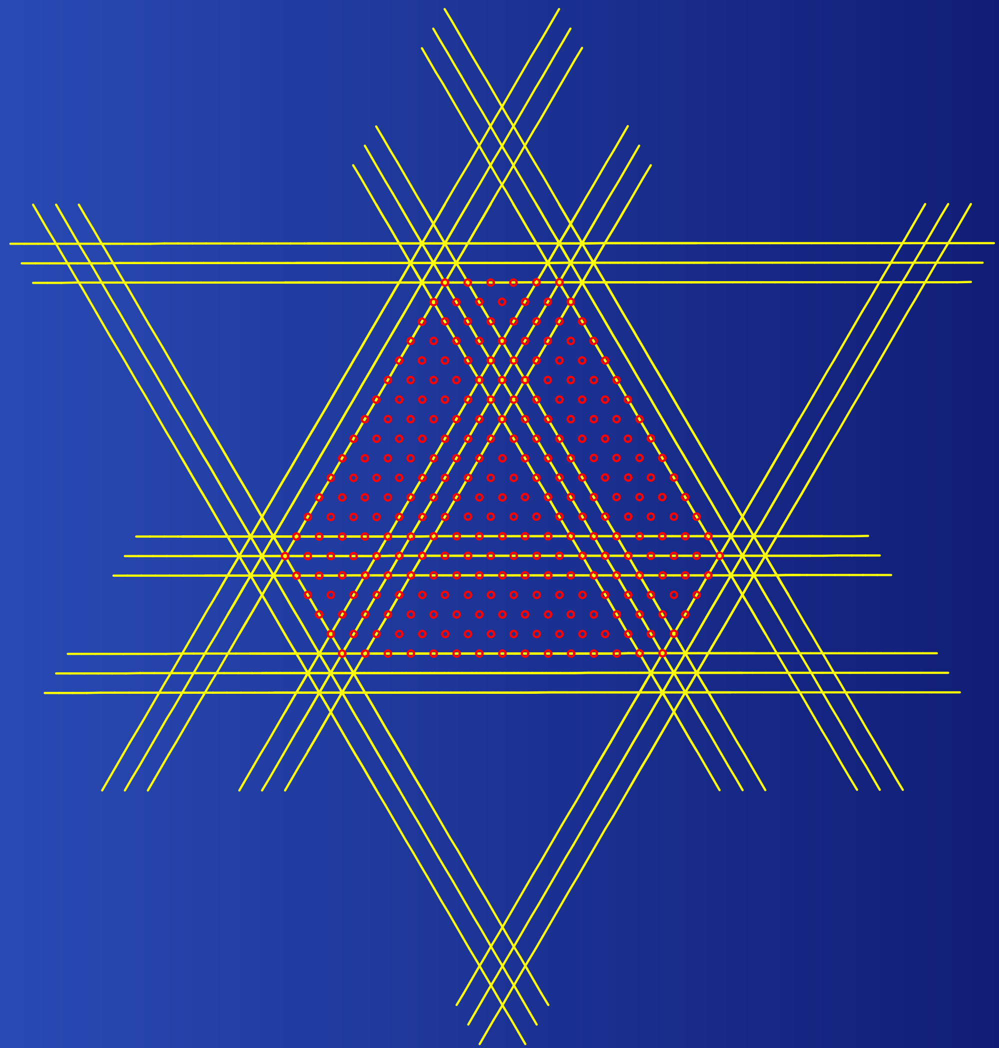
Nombres de Kostka localement polynomiaux

- On trouve une famille d'arrangements d'hyperplans sur les régions desquels les nombres de Kostka sont donnés par des polynômes.

Exemple: $\lambda = (21,\ 7,\ 2)$



Exemple: $\lambda = (21,\, 7,\, 2)$



Les murs du permutaèdre

- Les murs qui supportent les facettes des domaines du permutaèdre (partition pour la fonction de Duistermaat-Heckman):

$$\langle\, \sigma(\lambda) - \psi(\beta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = 0\,.$$

Les murs du permutaèdre

- Les murs qui supportent les facettes des domaines du permutaèdre (partition pour la fonction de Duistermaat-Heckman):

$$\langle\, \sigma(\lambda) - \psi(\beta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = 0\,.$$

- Hyperplans des arrangements de Kostant:

$$\langle\, \sigma(\lambda+\delta) - (\psi(\beta)+\delta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = 0$$

Les murs du permutaèdre

- Les murs qui supportent les facettes des domaines du permutaèdre (partition pour la fonction de Duistermaat-Heckman):

$$\langle\, \sigma(\lambda) - \psi(\beta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = 0\,.$$

- Hyperplans des arrangements de Kostant:

$$\langle\, \sigma(\lambda+\delta)-(\psi(\beta)+\delta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = 0$$

Les murs du permutaèdre

- Les murs qui supportent les facettes des domaines du permutaèdre (partition pour la fonction de Duistermaat-Heckman):

$$\langle\, \sigma(\lambda) - \psi(\beta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = 0\,.$$

- Hyperplans des arrangements de Kostant:

$$\langle\, \sigma(\lambda \qquad) - (\psi(\beta) \qquad),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = \langle\, \delta - \sigma(\delta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle$$

Les murs du permutaèdre

- Les murs qui supportent les facettes des domaines du permutaèdre (partition pour la fonction de Duistermaat-Heckman):

$$\langle\, \sigma(\lambda) - \psi(\beta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = 0\,.$$

- Hyperplans des arrangements de Kostant:

$$\langle\, \sigma(\lambda) - \psi(\beta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = \langle\, \delta - \sigma(\delta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle$$

Les murs du permutaèdre

- Les murs qui supportent les facettes des domaines du permutaèdre (partition pour la fonction de Duistermaat-Heckman):

$$\langle\, \sigma(\lambda) - \psi(\beta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = 0\,.$$

- Hyperplans des arrangements de Kostant:

$$\langle\, \sigma(\lambda) - \psi(\beta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle = \underbrace{\langle\, \delta - \sigma(\delta),\ \theta(\omega_j)\,\rangle}_{\mathrm{shift}(\sigma,\ \theta,\ j)}$$

Polynomialité dans le complexe

Théorème C

Les quasipolynômes qui donnent les nombres de Kostka dans les cônes de $\mathcal{C}^{(k)}$ sont en fait des polynômes, de degré total $\binom{k-1}{2}$ en β, avec des coefficients de degré total $\binom{k-1}{2}$ en λ.

Lemme

Pour chaque cône C *du complexe pour les nombres de Kostka, on peut trouver une région* R *de l'arrangement de Kostant telle que* $C \cap R$ *contient une boule de rayon arbitraire.*

Lemme

Pour chaque cône C du complexe pour les nombres de Kostka, on peut trouver une région R de l'arrangement de Kostant telle que $C \cap R$ contient une boule de rayon arbitraire.

- Alors le polynôme sur R et le quasipolynôme sur C coïncident sur tous les points entiers (λ, β) de cette boule.

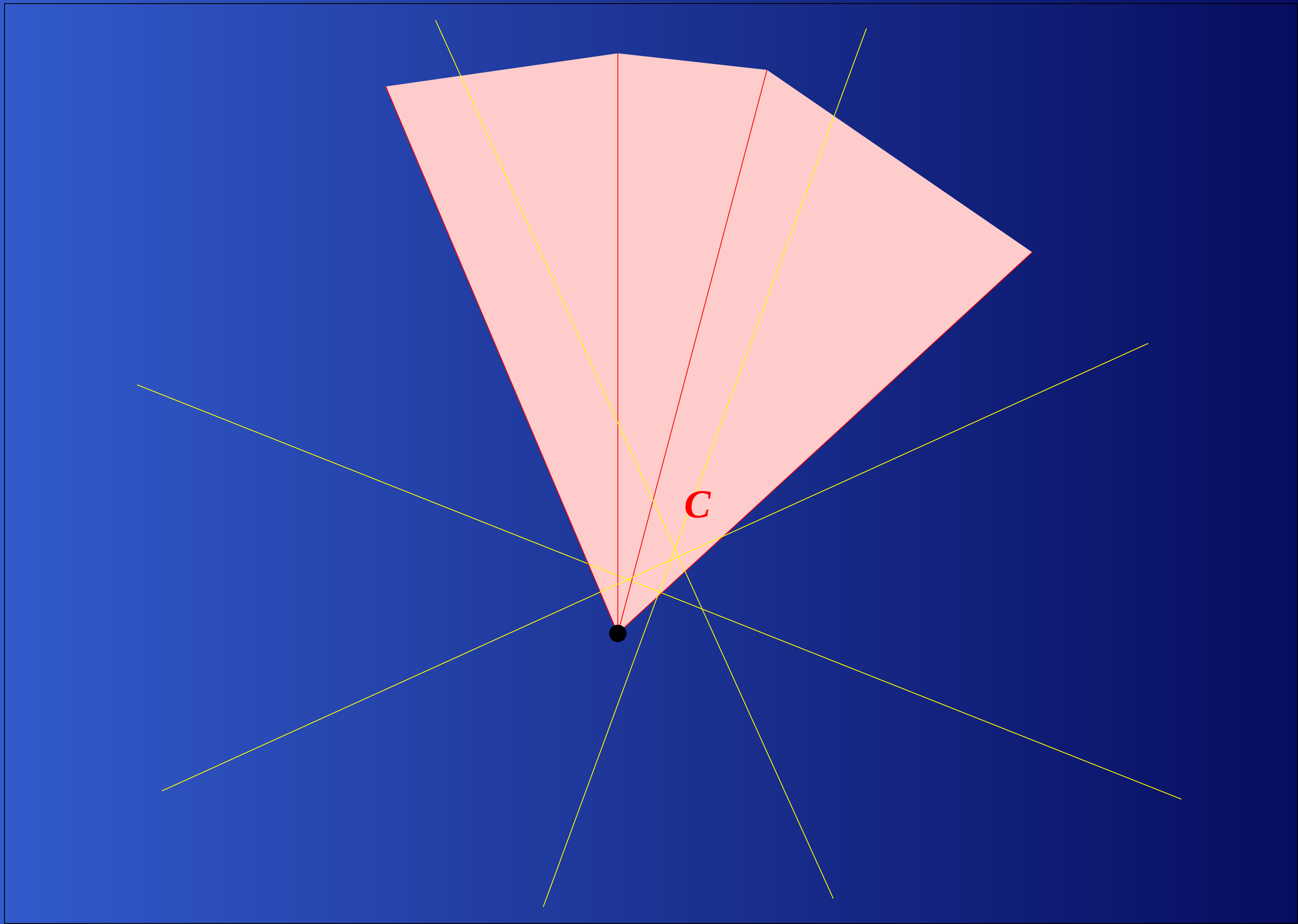
Lemme

Pour chaque cône C du complexe pour les nombres de Kostka, on peut trouver une région R de l'arrangement de Kostant telle que $C \cap R$ contient une boule de rayon arbitraire.

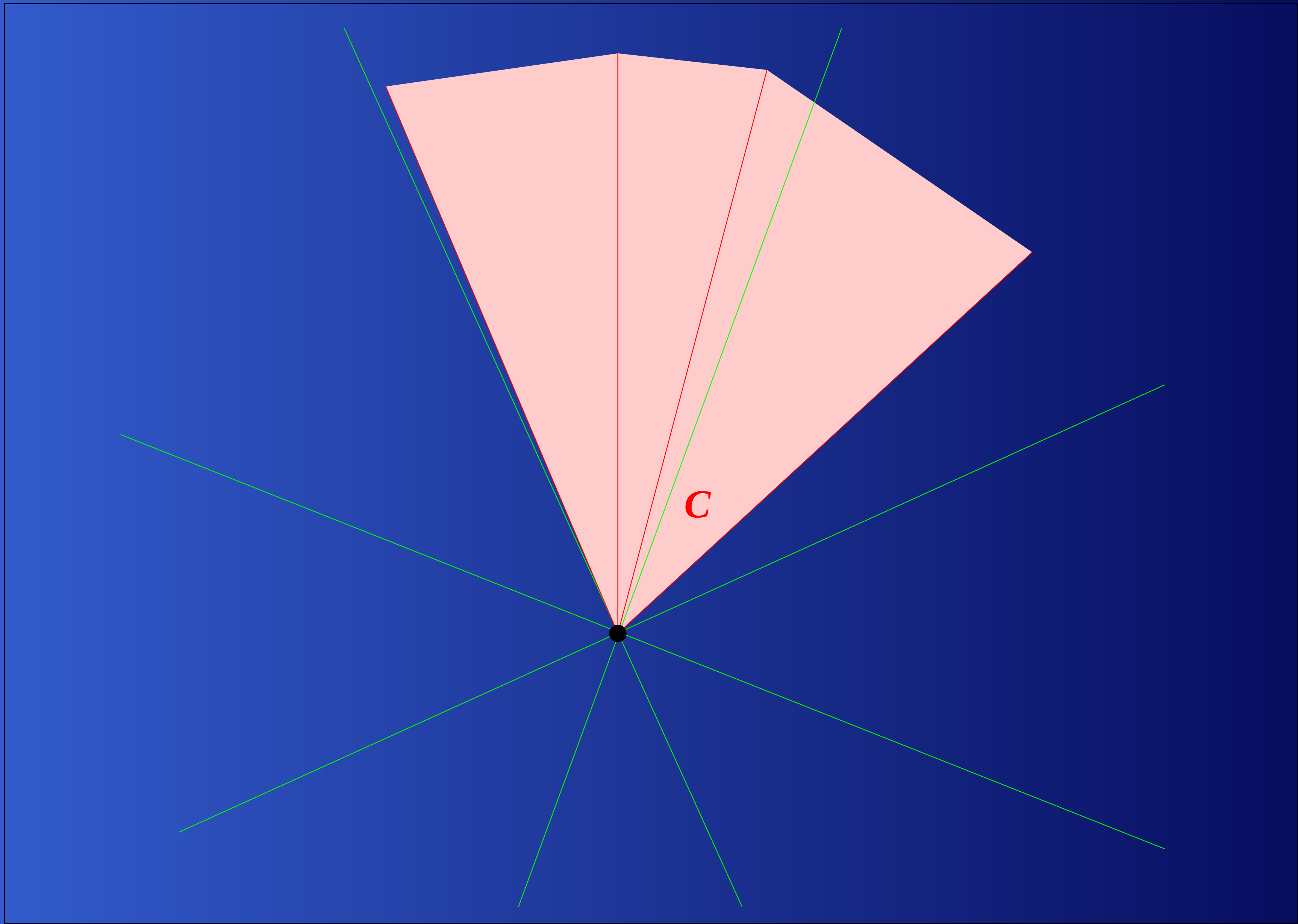
- Alors le polynôme sur R et le quasipolynôme sur C coïncident sur tous les points entiers (λ, β) de cette boule.

- Les bornes pour le degré se déduisent des bornes sur le degré de la fonction de partition de Kostant.

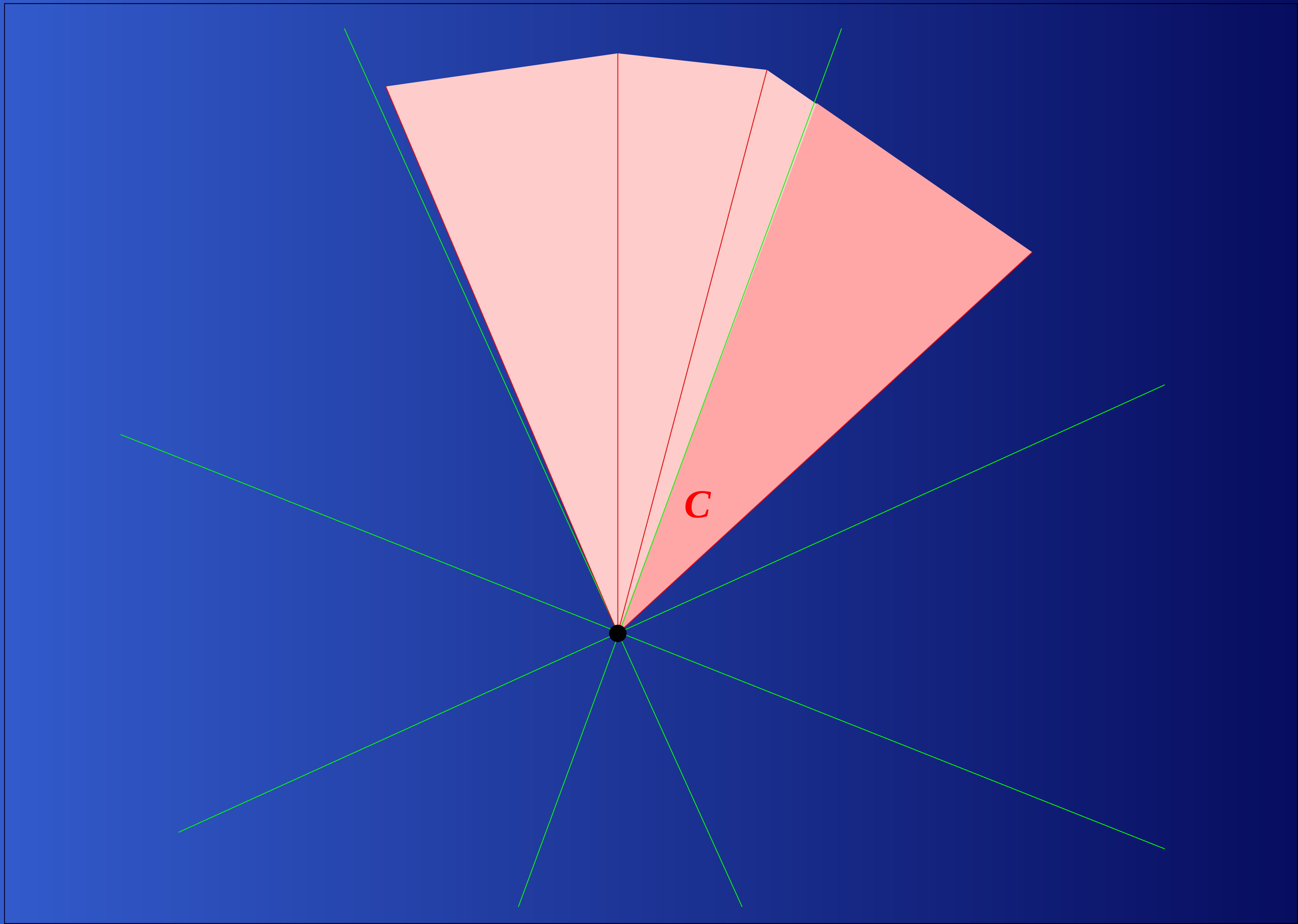
Idée de la preuve



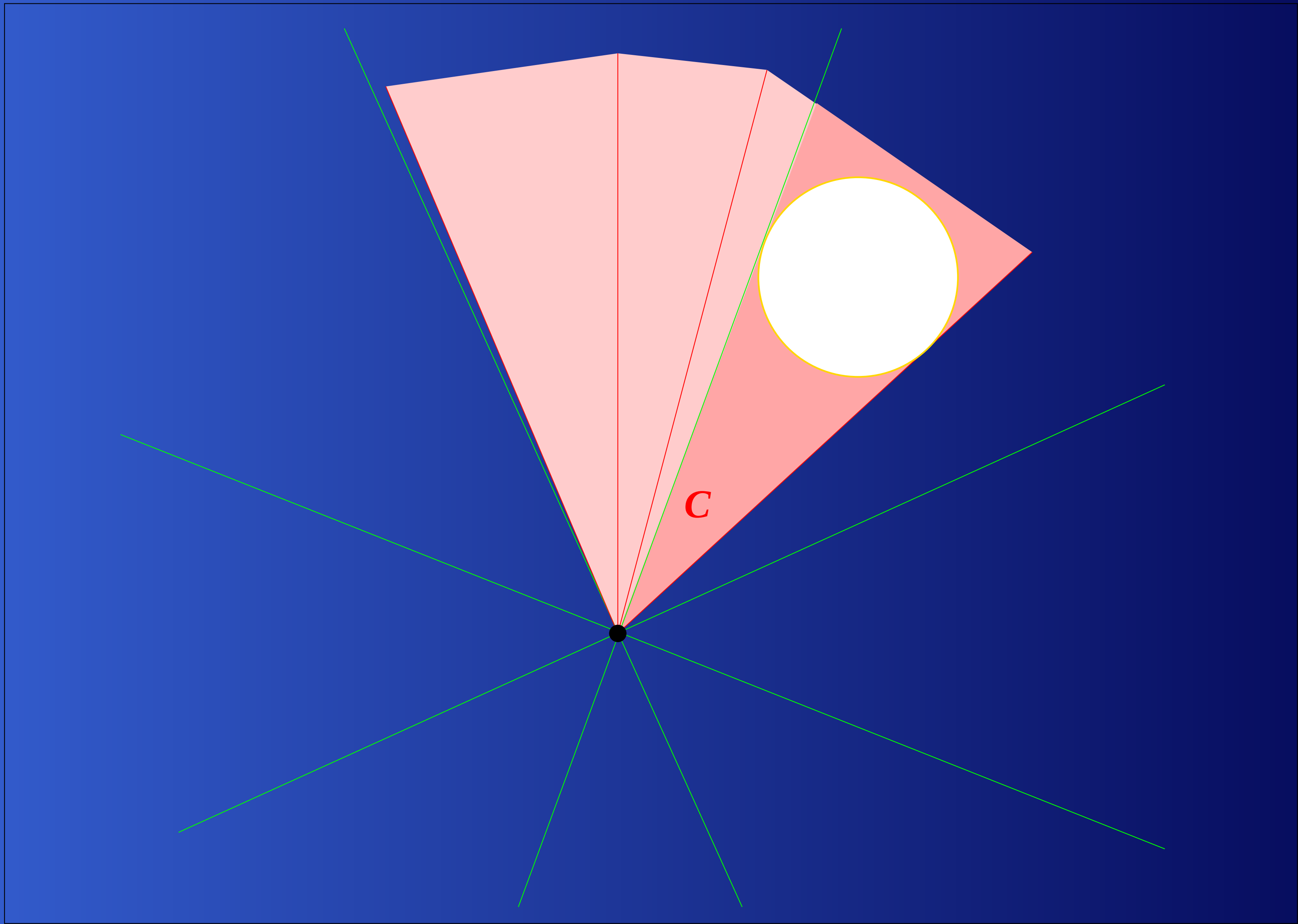
Idée de la preuve



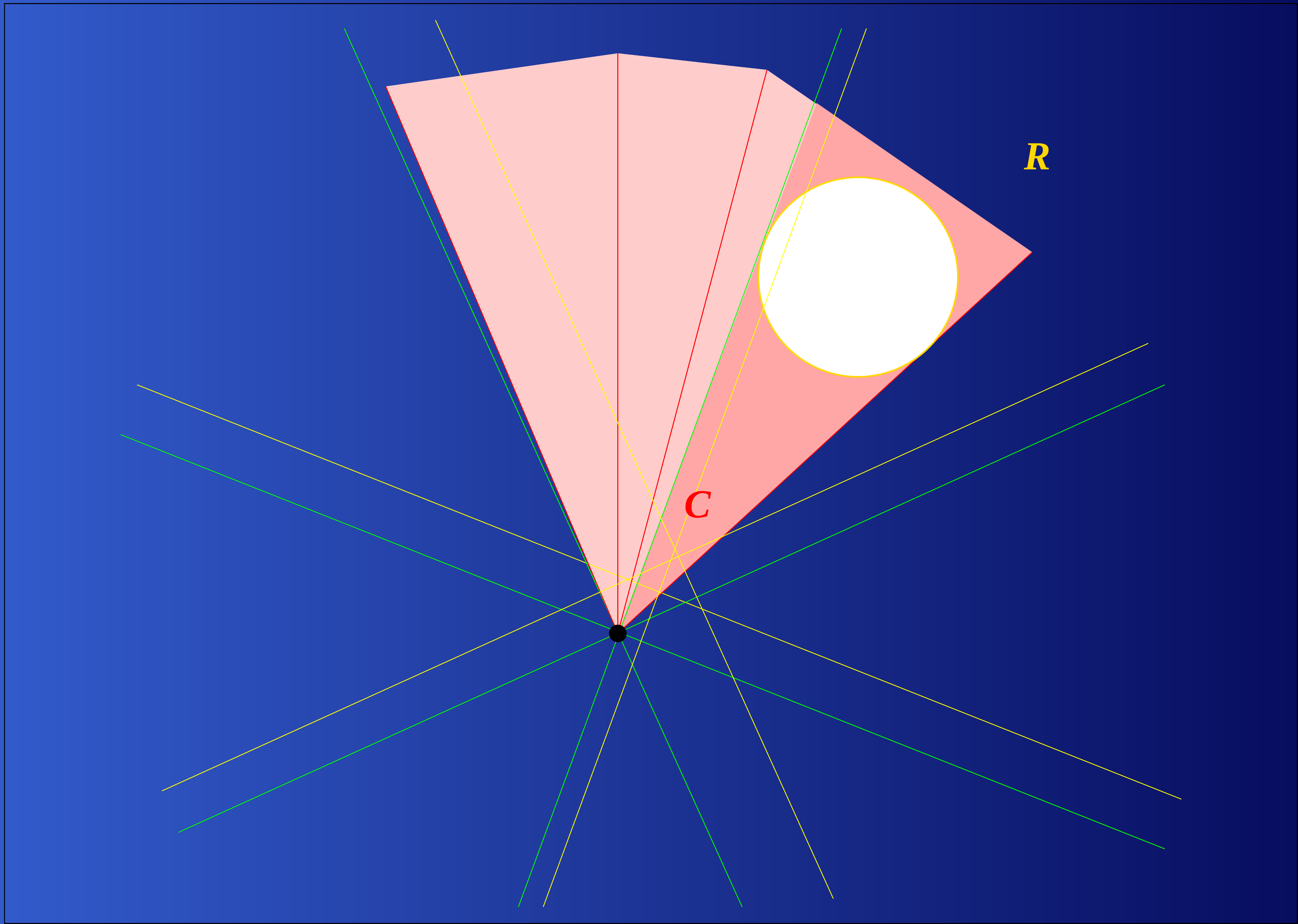
Idée de la preuve



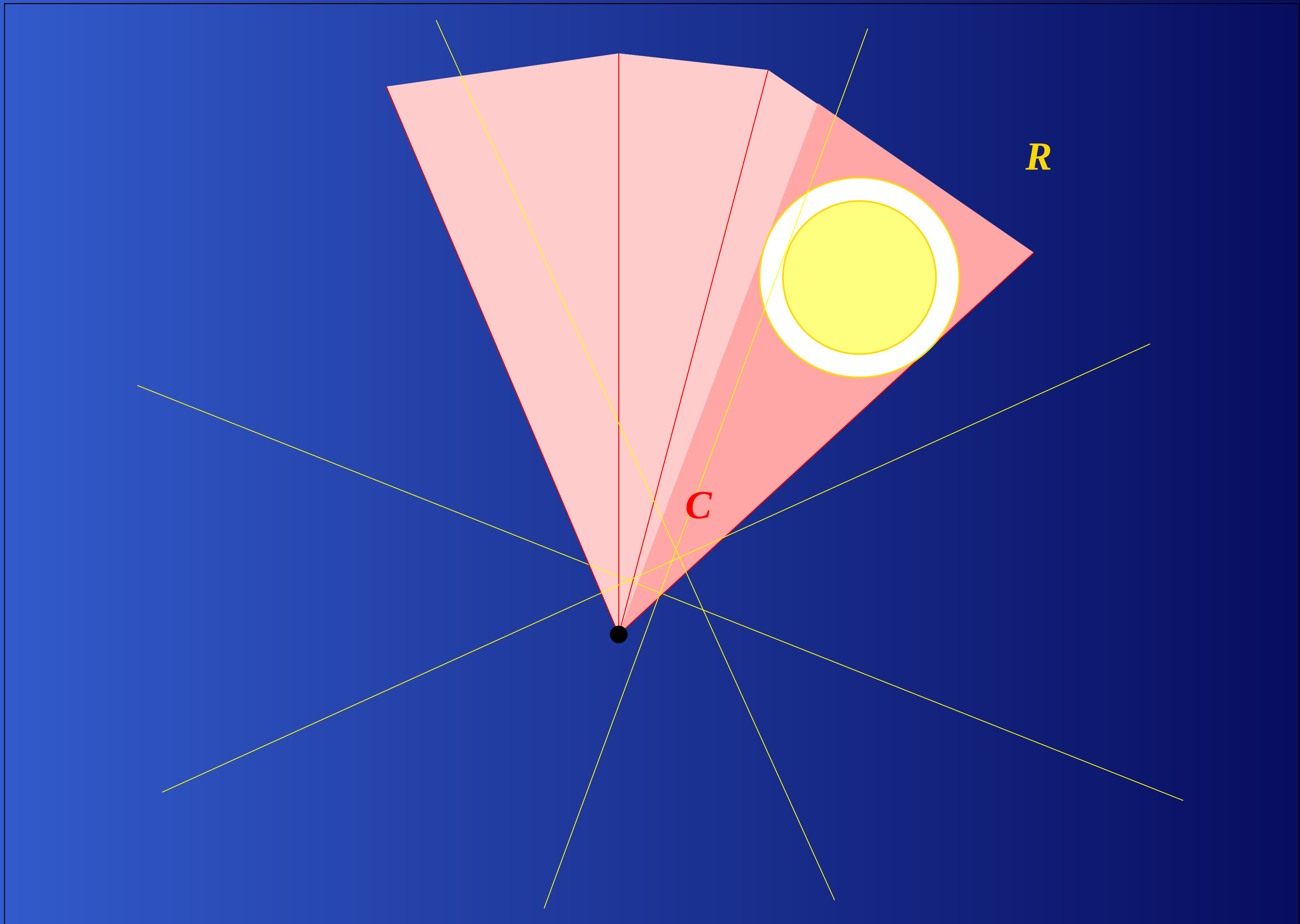
Idée de la preuve



Idée de la preuve



Idée de la preuve



Dilatation

Corollaire

Pour tous λ, β avec au plus k parts, la fonction

$$N \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad K_{N\lambda\, N\beta}$$

est polynomiale de degré au plus $2\binom{k-1}{2}$ en N.

Dilatation

Corollaire

Pour tous λ, β avec au plus k parts, la fonction

$$N \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad K_{N\lambda\, N\beta}$$

est polynomiale de degré au plus $2\binom{k-1}{2}$ en N.

- Cette fonction est le polynôme d'Ehrhart du polytope de Gelfand-Tsetlin $\mathrm{GT}_{\lambda\mu}$. (Kirillov)

Dilatation

Corollaire

Pour tous λ, β avec au plus k parts, la fonction

$$N \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad K_{N\lambda\, N\beta}$$

est polynomiale de degré au plus $2\binom{k-1}{2}$ en N.

- Cette fonction est le polynôme d'Ehrhart du polytope de Gelfand-Tsetlin $\mathrm{GT}_{\lambda\mu}$. (Kirillov)
- $\mathrm{GT}_{\lambda\mu}$ n'est pas un polytope entier en général (Clifford, King-Tollu-Toumazet, DeLoera-McAllister).

Phénomènes de factorisation

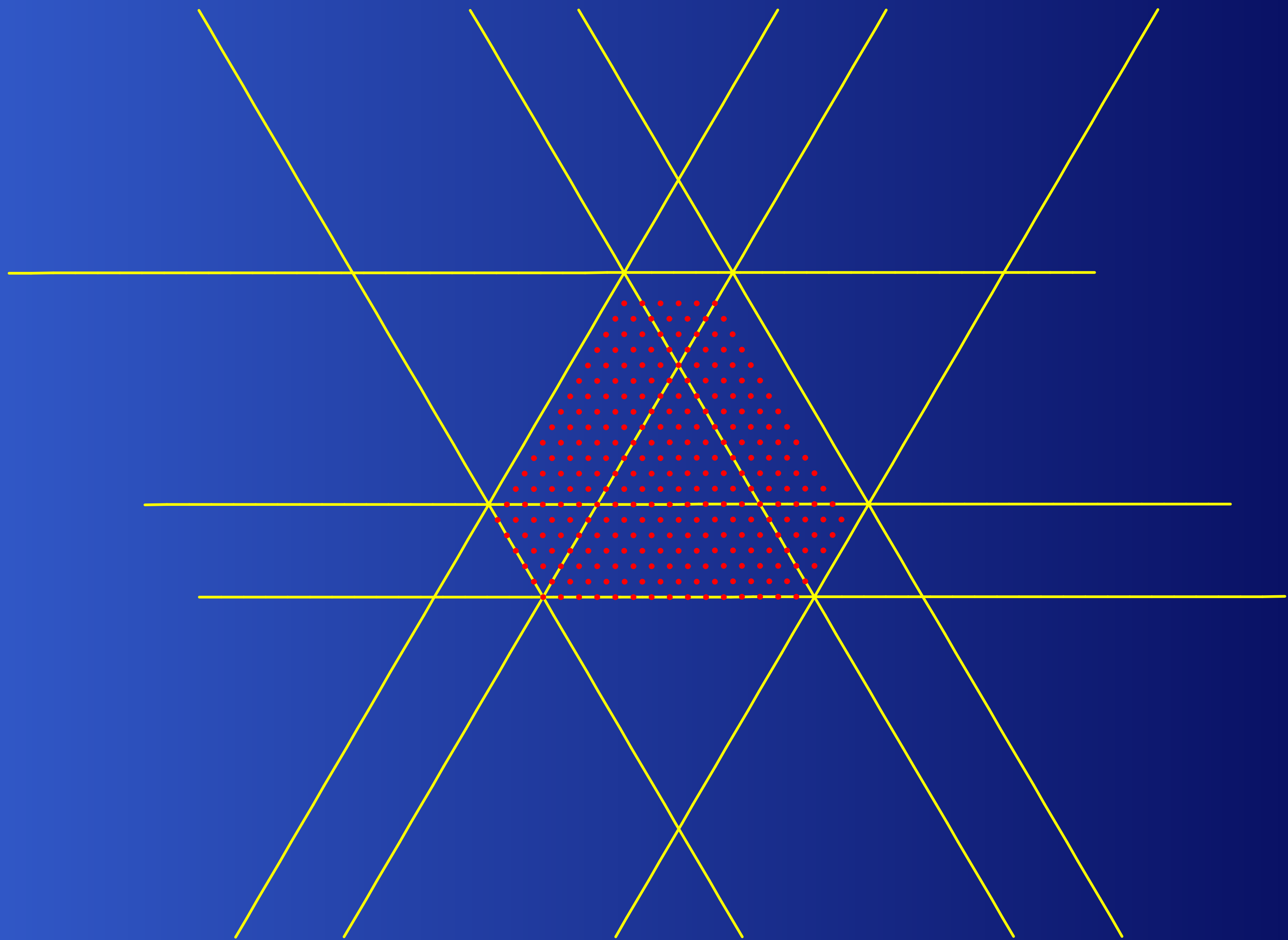
Théorème D

Soit H l'hyperplan qui supporte une facette du permutaèdre avec vecteur normal $\theta(\omega_j)$.

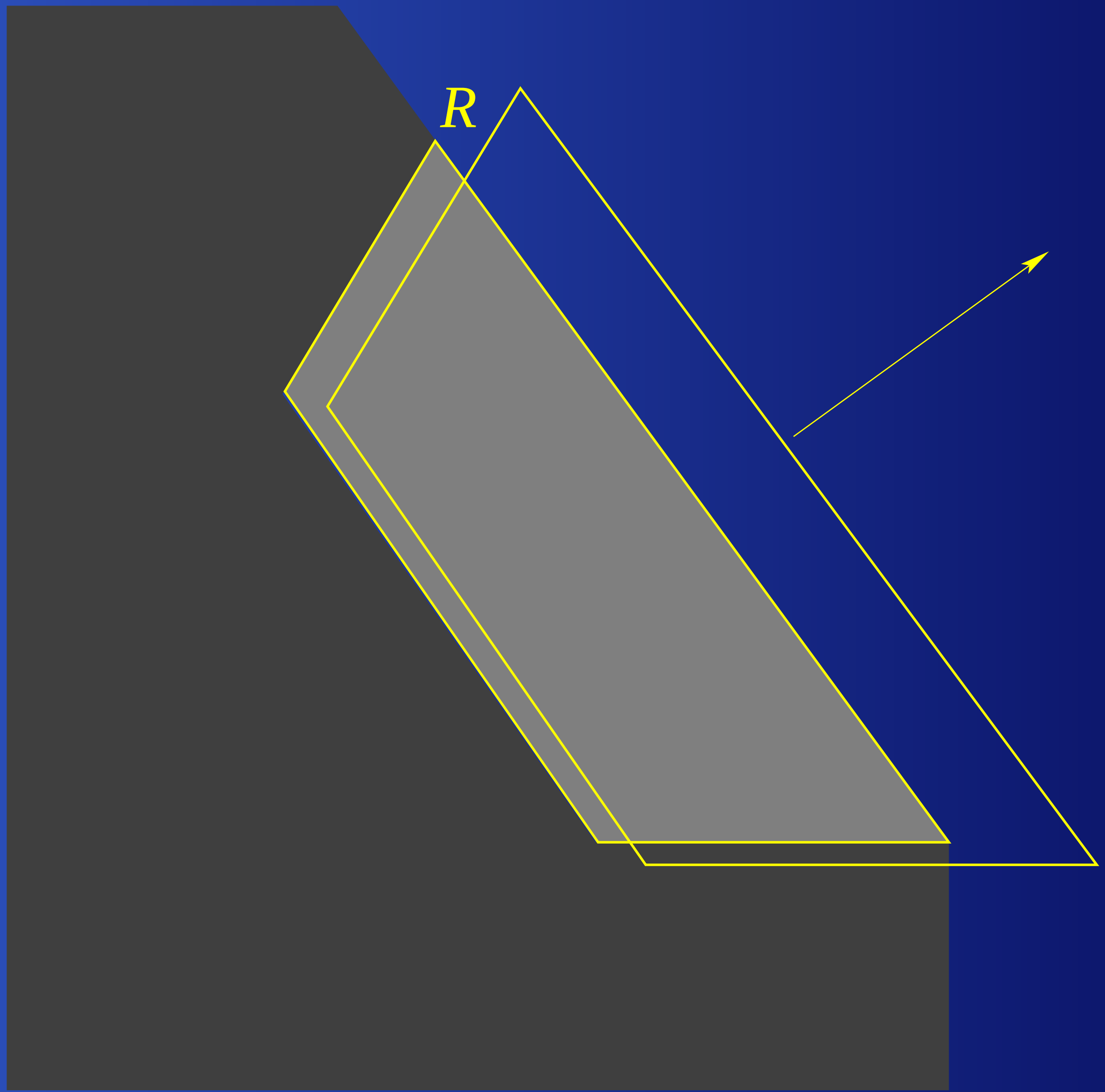
Alors les polynômes donnant les nombres de Kostka dans tous les domaines du permutaèdre avec une facette sur H sont divisibles par $j(k-j)-1$ facteurs linéaires.

Les diagrammes suivants expliqueront quels sont ces facteurs.

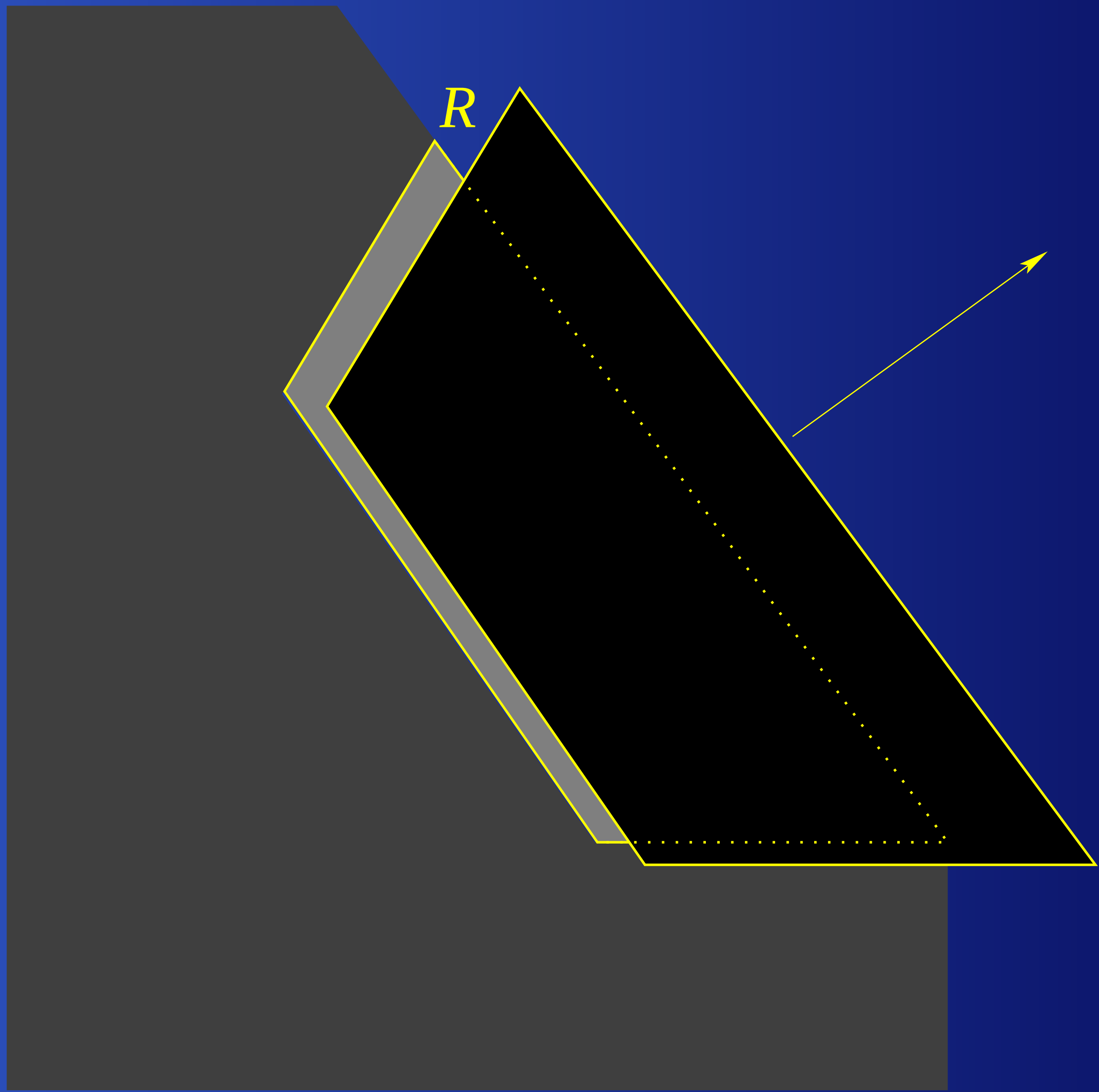
Idée de la preuve



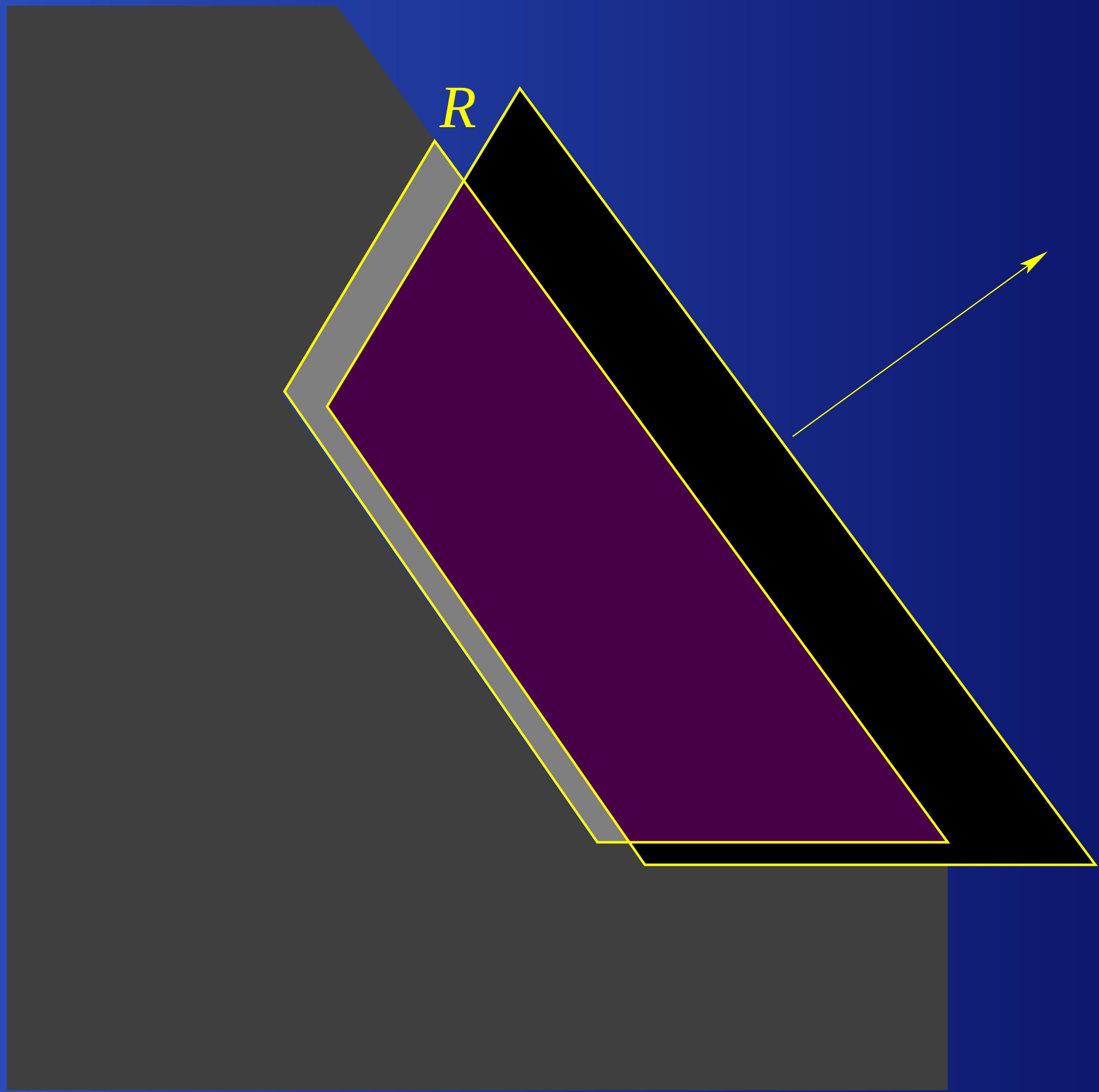
Idée de la preuve



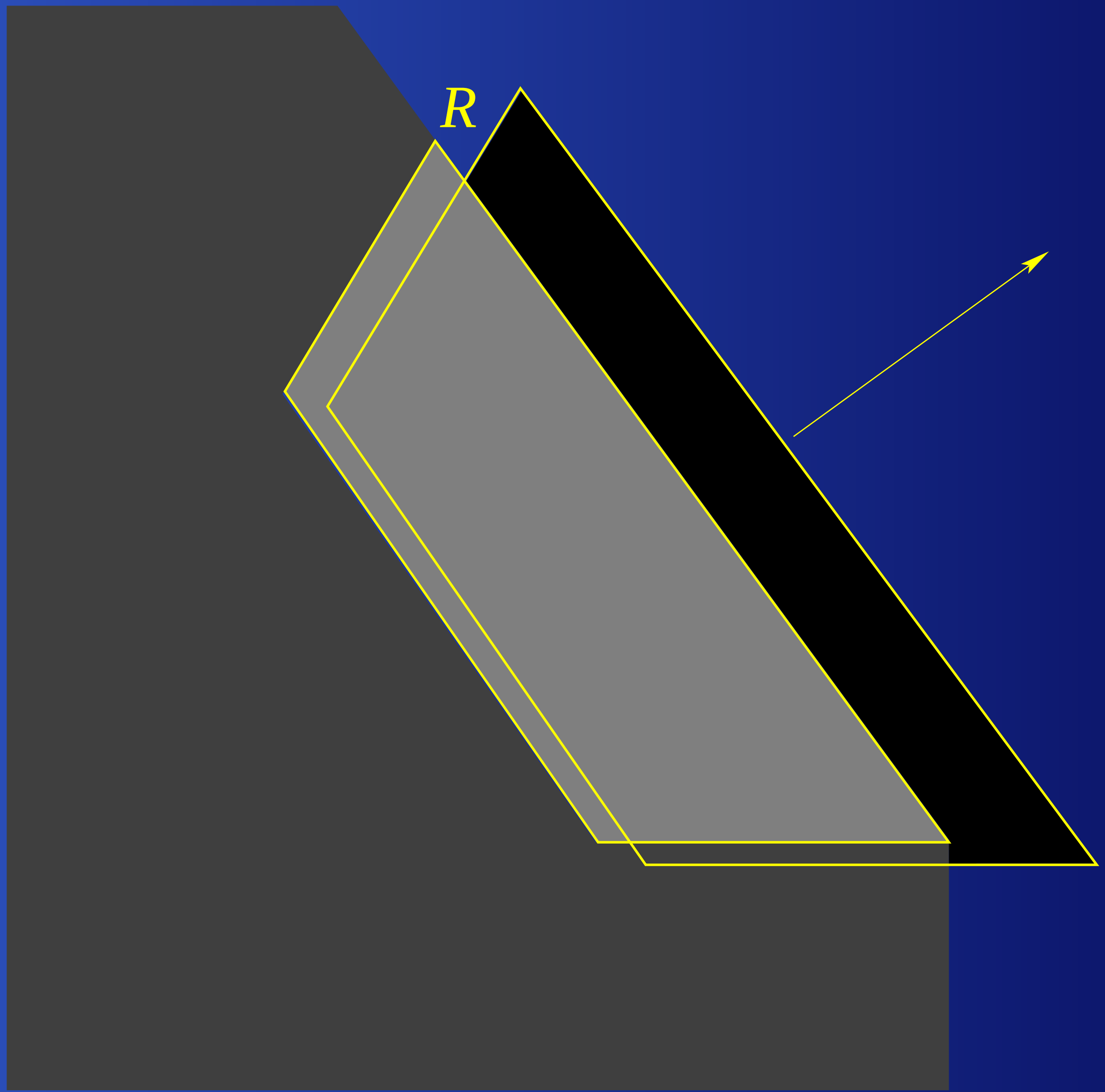
Idée de la preuve



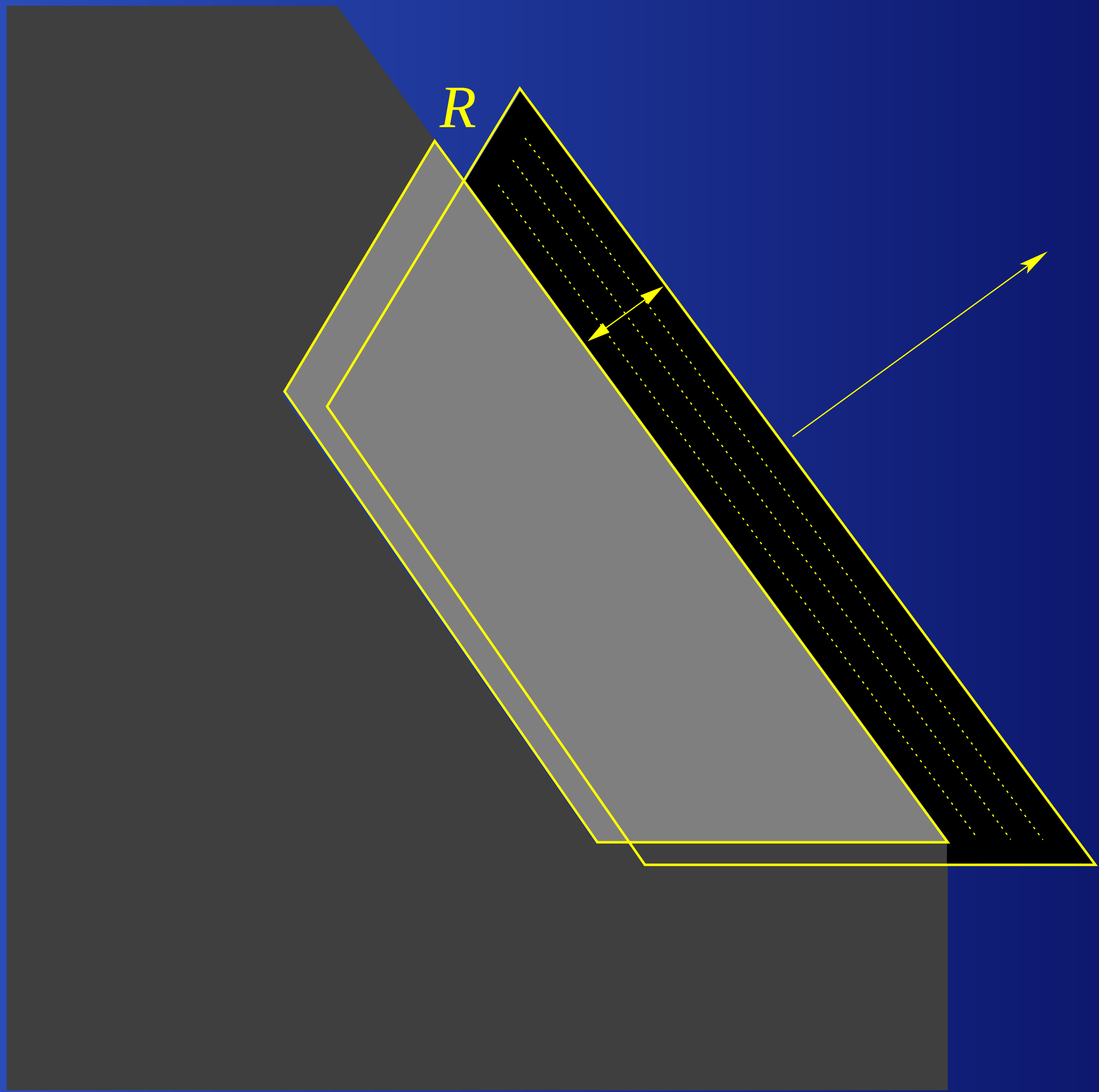
Idée de la preuve



Idée de la preuve



Idée de la preuve



Des phénomènes de factorisation similaires ont été observés récemment pour les fonctions de partition vectorielles générales par Szenes et Vergne.

Coefficients de Littlewood-Richardson

- Les coefficients de L-R expriment la règle de multiplication pour les fonctions de Schur:

$$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu \,.$$

Coefficients de Littlewood-Richardson

- Les coefficients de L-R expriment la règle de multiplication pour les fonctions de Schur:

$$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu \, .$$

- Dans la théorie des représentation de $\mathrm{GL}_k\mathbb{C}$, les caractères des représentations irréductibles polynomiales sont les fonctions de Schur (en des variables appropriées).

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda\mu} V_\nu \, .$$

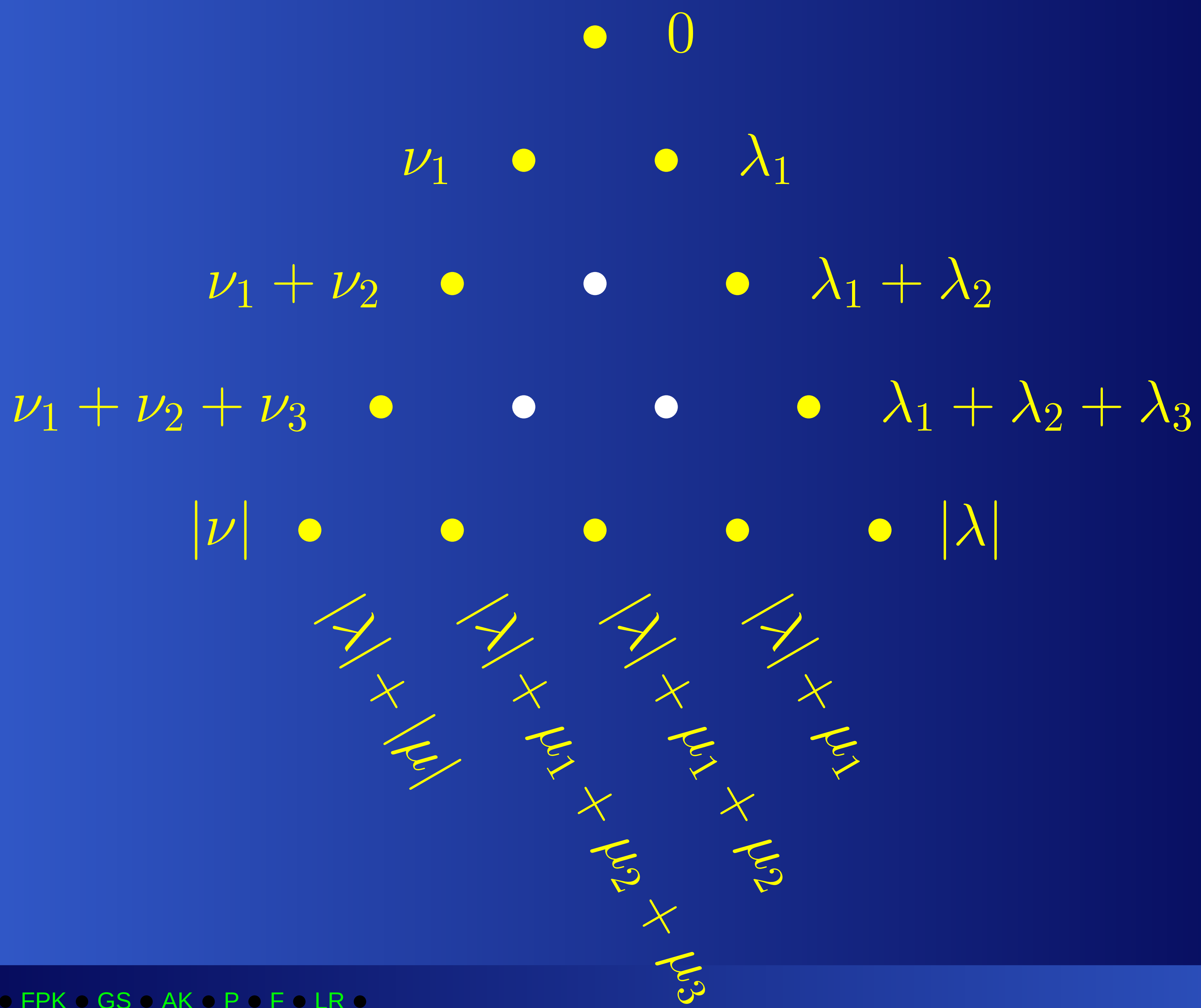
On veut trouver les constructions analogues aux

- diagrammes de Gelfand-Tsetlin, pour pouvoir écrire les coefficients de Littlewood-Richardson comme une fonction de partition vectorielle;

On veut trouver les constructions analogues aux

- diagrammes de Gelfand-Tsetlin, pour pouvoir écrire les coefficients de Littlewood-Richardson comme une fonction de partition vectorielle;
- arrangements de Kostant, sur les régions desquels les coefficients de Littlewood-Richardson seraient donnés par des polynômes.

Ruches



0
ν_1
λ_1
$\nu_1 + \nu_2$
$\lambda_1 + \lambda_2$
$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
$|\nu|$
$|\lambda|$
$|\lambda| + |\mu|$
$|\lambda| + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$
$|\lambda| + \mu_1 + \mu_2$
$|\lambda| + \mu_1$

Théorème **(Knutson-Tao, Fulton)**

Soient λ, μ et ν des partages avec au plus k parts, tels que $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$.

Le coefficient de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ est le nombre de k-ruches entières satisfaisant les conditions au bord et les conditions de ruche.

Formule de Steinberg

$$c_{\lambda\mu}^{\nu} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma\tau)} K(\sigma(\lambda+\delta)+\tau(\mu+\delta)-(\nu+2\delta))\,.$$

Fonctions de part. et polynomialité

- Avec les ruches, on trouve une fonction de partition pour les coefficients de L-R; ils sont donc donnés par des quasipolynômes en λ, μ et ν sur les cônes d'un complexe.

Fonctions de part. et polynomialité

- Avec les ruches, on trouve une fonction de partition pour les coefficients de L-R; ils sont donc donnés par des quasipolynômes en λ, μ et ν sur les cônes d'un complexe.
- Avec la formule de Steinberg, on construit un arrangement d'hyperplans sur les régions duquel les coefficients de L-R sont donnés par des polynômes en λ, μ et ν.

Fonctions de part. et polynomialité

- Avec les ruches, on trouve une fonction de partition pour les coefficients de L-R; ils sont donc donnés par des quasipolynômes en λ, μ et ν sur les cônes d'un complexe.

- Avec la formule de Steinberg, on construit un arrangement d'hyperplans sur les régions duquel les coefficients de L-R sont donnés par des polynômes en λ, μ et ν.

- En comparant le complexe et l'arrangement, on déduit que les quasipolynômes sont en fait des polynômes.

Dilatation pour les coefficients de L-R

- On déduit de ceci en particulier que la fonction

$$N \in \mathbb{N} \quad \longmapsto \quad c_{N\lambda\ N\mu}^{N\nu}$$

est polynomiale en N.

Ce résultat était connu précédemment. (Derksen-Weyman, Knutson).

- Cette fonction est le polynôme d'Ehrhart du polytope de ruche pour λ, μ et ν.

Conjectures

Conjecture **(Kirillov, King-Tollu-Toumazet)**

Pour tous partages λ, μ tels que $K_{\lambda\mu} > 0$, il existe un polynôme $P_{\lambda\mu}(N)$ en N avec des coefficients rationnels non-négatifs, tel que $P_{\lambda\mu}(0) = 1$ et $P_{\lambda\mu}(N) = K_{N\lambda\ N\mu}$ pour tout entier positif N.

Problème ouvert

k	#(facettes)	deg	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
3	6	1	1 (6)			
4	14	3	2 (8)	3 (6)		
5	30	6	3 (10)	5 (20)		
6	62	10	4 (12)	7 (30)	8 (20)	
7	126	15	5 (14)	9 (42)	11 (70)	
8	254	21	6 (16)	11 (56)	14 (112)	15 (70)
9	510	28	7 (18)	13 (72)	17 (168)	19 (252)

Problème Déterminer quels sont les autres facteurs en bordure du permutaèdre.

Conclusion

- On a trouvé une fonction de partition exprimant les nombres de Kostka et les coefficients de L-R comme quasipolynômes sur les chambres de complexes de cônes.
- On a trouvé une description combinatoire pour les domaines de polynomialité des nombres de Kostka.
- On a prouvé que ces quasipolynômes sont en fait des polynômes.
- Plusieurs de ces polynômes ont des factorisations intéressantes.