

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉNUMÉRATION DE CERTAINES CLASSES DE POLYOMINOS ET DE  
CHEMINS AUTOÉVITANTS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ETIENNE RASSART

SEPTEMBRE 1999

## Remerciements



Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur Pierre Leroux, non seulement pour les mathématiques qu'il m'a apprises ou fait apprendre, et pour le soin qu'il apporte à ses étudiants, mais aussi pour ses talents d'organiseurs, qui auront déteint sur moi un peu, j'espère. C'est lui qui m'a fait connaître le monde de la combinatoire en me permettant d'assister à des conférences; c'est aussi grâce à lui que j'ai pu faire un stage au LaBRI, à Bordeaux, pendant ma maîtrise.

Je tiens aussi à remercier Stéphanie Lanthier, la technicienne du LaCIM, pour son amitié et les conseils techniques qu'elle prodigue avec une gentillesse (et une patience) infatigable.

J'ai eu la chance de recevoir tout au long de ma maîtrise des conseils et des pistes de recherche, et je tiens à remercier en particulier Jacques Labelle (c'est lui qui m'a mis sur la piste des chemins autoévitants), Xavier-Gérard Viennot et Doron Zeilberger.

J'aimerais aussi dire merci à mes amis en mathématiques, les Montréalais: Benoit Charbonneau, Sylvie Hamel, Annie Ladouceur, François Lamontagne et Luigi Santocanale, les Bordelais: Andrew Rechnitzer, Cédric Chauve, Gilles Schaeffer et Philippe Duchon, ainsi que Sylvie Corteel, à Paris.

Je tiens aussi à souligner le support des gens du LaCIM, en particulier François Bergeron et Gilbert Labelle, qui m'ont permis de découvrir la combinatoire comme étudiant d'été, et pour leur dynamisme inspirant.

Finalement j'aimerais remercier spécialement mes amis de toujours, Chen, Benoît et Jean-Louis qui, sans jamais trop savoir exactement ce que je faisais, ont toujours eu confiance en moi.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX . . . . .	v
LISTE DES FIGURES . . . . .	vi
RÉSUMÉ . . . . .	viii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
NOTIONS PRÉLIMINAIRES . . . . .	5
1.1 Actions de groupes et lemme de Burnside . . . . .	6
1.2 Notions d'analyse asymptotique . . . . .	8
1.2.1 Asymptotique de certaines suites élémentaires . . . . .	11
1.2.2 Asymptotique des fonctions rationnelles . . . . .	12
1.3 Matrices de transfert . . . . .	15
1.3.1 Théorèmes principaux . . . . .	16
1.3.2 Résultats généraux sur les matrices non-négatives . . . . .	17
CHAPITRE II	
ÉNUMÉRATION DES CLASSES DE SYMÉTRIES DE POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES . . . . .	19
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 L'énumération des polyominos parallélogrammes . . . . .	22
2.3 L'action du groupe diédral $\mathfrak{D}_2$ sur les polyominos parallélogrammes . . . . .	24
2.4 Classes de symétries de polyominos parallélogrammes . . . . .	26
2.4.1 Symétrie rotationnelle . . . . .	26
2.4.2 Symétries réflexionnelles . . . . .	30
2.4.3 Polyominos parallélogrammes à symétries près . . . . .	37
2.4.4 Polyominos parallélogrammes asymétriques . . . . .	38
2.4.5 Comportement asymptotique . . . . .	39
CHAPITRE III	

CHEMINS AUTOÉVITANTS DIRIGÉS ET CHEMINS AUTOÉVITANTS À MÉMOIRE FINIE . . . . .	43
3.1 Introduction . . . . .	43
3.1.1 Définitions . . . . .	46
3.2 Chemins autoévitant dirigés . . . . .	46
3.3 Chemins autoévitant à mémoire finie . . . . .	53
CHAPITRE IV	
POLYOMINOS GÉNÉRAUX À HAUTEUR BORNÉE . . . . .	58
4.1 Introduction . . . . .	58
4.1.1 Hauteur 1 . . . . .	60
4.1.2 Hauteur 2 . . . . .	61
4.1.3 Hauteur 3 . . . . .	62
4.1.4 Hauteur 4 . . . . .	66
4.1.5 Hauteurs $> 4$ . . . . .	68
CONCLUSION . . . . .	70
APPENDICE A	
RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR L'ÉNUMÉRATION DE POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES . . . . .	73
APPENDICE B	
TABLE DE TRANSITIONS POUR LES POLYOMINOS DE HAUTEUR 4 . . . . .	75
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	76

## LISTE DES TABLEAUX

- A.1 Polyominos parallélogrammes énumérés selon leurs symétries et leur demi-périmètre. 73
- A.2 Polyominos parallélogrammes énumérés selon leurs symétries et leur aire. . . . 74

## LISTE DES FIGURES

2.1	Exemple de polyomino convexe (gauche) et polyomino parallélogramme (droite).	20
2.2	Polyomino parallélogramme et chemin de Dyck associé. . . . .	23
2.3	Treillis des sous-groupes de $\mathfrak{D}_2$ et la fonction de Möbius $\mu(0, H)$ sur le treilli. .	26
2.4	Polyominos parallélogrammes $r^2$ -symétriques de largeur (a) paire et (b) impaire.	28
2.5	Polyomino de Dyck (à gauche) et facteur gauche de polyomino de Dyck (à droite).	30
2.6	Construction récursive des polyominos $FGD$ , en ajoutant des rangées successi- vement. . . . .	31
2.7	Bijection entre les parallélogrammes $r^2$ -symétriques et les parallélogrammes $d_1$ - symétriques de même demi-périmètre. . . . .	33
2.8	Un polyomino parallélogramme $d_2$ -symétrique. . . . .	34
2.9	Un polyomino parallélogramme $\mathfrak{D}_2$ -symétrique. . . . .	35
2.10	Construction d'un polyomino parallélogramme $\mathfrak{D}_2$ -symétrique à partir de 4 co- pies d'un polyomino $FGD$ . . . . .	36
3.1	(a) Chemin autoévitant; (b) chemin autoévitant dirigé (dans $\mathbb{Z}^2$ ). . . . .	47
3.2	Chemin autoévitant dirigé de largeur 10 commençant avec un pas vers le haut et sa décomposition en configurations. . . . .	48
4.1	Polyomino général dans le réseau carré. . . . .	59

4.2 Un troisième type de cellules doit être introduit à la hauteur 5, et un quatrième  
à la hauteur 9. . . . . 69

## RÉSUMÉ

Les développements des dernières décennies en physique statistique ont fait apparaître divers modèles de changements de phase et de représentation de polymères, comme les modèles d'Ising et de Potts, pouvant non seulement s'étudier mais quelquefois se résoudre de manière purement combinatoire. Deux types de structures combinatoires, en particulier, apparaissent régulièrement sous une forme ou une autre dans ces modèles: les chemins autoévitant dans  $\mathbb{Z}^d$  et, dans une moindre mesure, les polyominos dans  $\mathbb{Z}^2$ . Le problème de l'énumération de ces deux types d'objets est, dans sa forme la plus générale, toujours ouvert malgré près de 50 ans d'efforts. Aussi l'étude de classes de ces objets sujettes à davantage de contraintes permet-elle d'approcher le problème en approximant les solutions recherchées.

Les polyominos parallélogrammes forment une sous-classe des polyominos convexes sur le réseau carré; cette classe a été étudiée en détail dans la littérature. Dans un travail récent (Leroux, Rassart et Robitaille, 1998), les classes de congruences des polyominos convexes sous les rotations et les réflexions ont été énumérées en dénombrant les orbites de l'action du groupe diédral  $\mathfrak{D}_4$ , le groupe des symétries du carré, sur les polyominos convexes (à translation près). L'inversion de Möbius dans le treillis des sous-groupes de  $\mathfrak{D}_4$  a aussi permis l'énumération des polyominos convexes asymétriques. L'une des parties de ce mémoire consiste en l'extension de ces résultats à la sous-classe des polyominos parallélogrammes, en faisant agir sur elle un sous-groupe ( $\mathfrak{D}_2$ ) de  $\mathfrak{D}_4$ .

Des résultats asymptotiques ont été obtenus pour les chemins autoévitant et les polyominos (quoique certaines des constantes demeurent inconnues) et des résultats précis quant à l'énumération sont connus pour des classes réduites d'objets, comme les polyominos convexes ou parallélogrammes, et les chemins autoévitant dirigés ou à mémoire finie. Dans ce mémoire, la méthode des matrices de transfert est utilisée pour approcher le problème des polyominos dans le cas où le plan discret est restreint à une bande de hauteur fixe, et des séries génératrices rationnelles pour l'aire et le périmètre sont obtenues jusqu'à hauteur 4. Il est connu que les matrices de transfert permettent l'énumération de chemins autoévitant avec une mémoire finie; nous adaptons ici cette méthode au calcul du rayon carré moyen des chemins.

### Mots clés

Mathématiques, Combinatoire énumérative, Physique statistique, Polyominos,  
Chemins autoévitant, Asymptotique



## INTRODUCTION

Les développements de la physique statistique depuis la fin du siècle dernier ont fait intervenir une quantité de nouvelles structures combinatoires. Beaucoup de modèles de divers phénomènes physiques ont des interprétations combinatoires intéressantes, entre autres les modèles de Potts et d'Ising pour les changements de phase. Certains problèmes de physique statistique sont donc devenus des problèmes de combinatoire, pouvant être étudiés sans trop se préoccuper des aspects physiques des phénomènes. Les travaux de Kasteleyn, par exemple, ont ramené la résolution de modèles de dimères dans des réseaux à l'énumération de couplages parfaits de graphes. Les modèles de Potts et d'Ising mentionnés ci-dessus, ainsi que plusieurs autres modèles se rattachant à l'étude des polymères, aux changements de phase et à la percolation, demandent, dans leur version combinatoire, l'énumération de polyominos et de chemins (ou marches) dans différents types de réseaux.

Les paragraphes suivants tracent un bref parcours historique de l'étude des chemins autoévitant et des polyominos, dont certaines classes feront l'objet de ce mémoire.

Rayleigh, dans l'étude du son à la fin du siècle dernier, a considéré le problème des marches aléatoires dans les réseaux hypercubiques ( $\mathbb{Z}^d$ ). Le rayon carré moyen  $\langle |\omega(n)|^2 \rangle$  pour ces marches, c'est-à-dire l'espérance mathématique du carré de la distance entre le point de départ et le point d'arrivée des chemins a la forme asymptotique

$$\langle |\omega(n)|^2 \rangle \sim a \cdot n,$$

quelle que soit la dimension. Plus tard, Pólya, en étudiant ces mêmes marches aléatoires, a remarqué que les probabilités de retour à l'origine sont 1 en dimensions 1 et 2, mais que pour les dimensions supérieures, il y a une probabilité non-nulle de non-retour à l'origine.

Kuhn a suggéré en 1934 que plusieurs propriétés physiques des polymères pouvaient être étudiées avec des modèles de “chaînes”, ce qu’on appelle aujourd’hui des chemins autoévitant (*self-avoiding walks*). Quelques unes des propriétés en question sont

- la diffraction de la lumière;
- les propriétés élastiques;
- la viscosité;
- la diffusion (à travers des membranes);
- la sédimentation;
- la biréfringence.

Ces propriétés font toutes intervenir  $\langle |\omega(n)|^2 \rangle$  principalement, quoique les moments supérieurs soient requis pour un traitement plus exact. Les chemins autoévitant ont été reliés par Sykes (entre autres) au modèle d’Ising pour le ferromagnétisme. Temperley a aussi établi un lien entre les chemins autoévitant et “l’interaction entre voisins immédiats sur un réseau” (utile dans l’étude des changements de phase).

Des formes asymptotiques ont été conjecturées pour les chemins autoévitant, à savoir

$$c_n \sim A\mu^n n^{\gamma-1},$$

où  $c_n$  est le nombre de chemins de longueur  $n$ , mais seule l’existence de la constante de connectivité  $\mu$  a été rigoureusement établie par Hammersley et Morton (ils ont prouvé que  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{1/n}$  existait). La constante de connectivité est toutefois inconnue pour la grande majorité des réseaux: elle est inconnue pour tous les réseaux hypercubiques, et des arguments de Nienhuis tendent à montrer qu’elle serait de  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  pour le réseau hexagonal. Les formes asymptotiques font aussi intervenir des *exposants critiques*  $\gamma$  qui seraient “universels”, c’est-à-dire qu’il sont conjecturés n’être dépendants que de la dimension du réseau et pas vraiment du réseau lui-même. Des résultats de Hara

et Slade en dimension plus grande ou égale à 5 montrent l'existence de ces exposants. Une bonne partie de la recherche sur les chemins autoévitant consiste à approximer ces constantes ou les borner. Par exemple, il est facile de montrer que

$$d \leq \mu \leq 2d - 1$$

pour les réseaux hypercubiques. Hara et Slade ont aussi montré que, quand  $d \rightarrow \infty$ ,

$$\mu = 2d - 1 - \frac{1}{2d} - \frac{3}{(2d)^2} + O\left(\frac{1}{(2d)^3}\right),$$

ce qui signifie qu'en grande dimension, l'autoévitement revient essentiellement à interdire les retours immédiats dans les chemins. Plusieurs chercheurs ont successivement conjecturé des valeurs pour la constante de connectivité dans le réseau carré, entre autres Temperley ( $\mu = 1 + \sqrt{2}$ ), et Lehman-Weiss ( $\mu = e$ ), mais toutes se sont révélées fausses.

Le dénombrement des polyominos est un problème relié à celui des chemins autoévitant. Encore ici, le comportement asymptotique du nombre de polyominos d'une aire donnée n'est que conjecturé, quoique le même raisonnement de Hammersley et Morton s'applique encore ici pour montrer l'existence d'une constante de connectivité. Celle-ci est toutefois encore moins bien connue que celles des chemins autoévitant: les meilleures bornes existantes à ce jour ne donnent même pas le premier chiffre de son développement décimal. Des résultats de Klarner, Rivest, Bender et Guttmann donnent des approximations et des bornes sur la constante de connectivité. Des classes restreintes de polyominos, comme les polyominos dirigés et les polyominos convexes, ont été étudiées. Les polyominos apparaissent aussi dans des problèmes de pavage, et en mathématiques récréatives, suite à leur popularisation par Golomb.

Les polyominos parallélogrammes ont été introduits comme une sous-classe énumérable des polyominos généraux. Ils ont été étudiés entre autres par Pólya, Bender, Delest, Fédou, Viennot et Bousquet-Mélou. Ce mémoire présente une étape suivante dans leur énumération: leur énumération à symétries près, en faisant appel à la théorie de Pólya et la théorie des espèces. Une autre sous-classe énumérable de polyominos est

celle des polyominos à hauteur bornée, et le présent travail présente une méthode pour les énumérer et trouver ainsi leur comportement asymptotique.

Ce travail étend aussi l'énumération de deux sous-classes bien connues de chemins autoévitant: les chemins autoévitant dirigés et les chemins autoévitant à mémoire finie. Les méthodes existantes sont adaptées pour obtenir le rayon carré moyen pour ces classes.

Le premier chapitre présente des notions préliminaires nécessaires pour la suite, à savoir quelques théorèmes sur les actions de groupes qui s'appliquent à l'énumération, quelques points d'analyse asymptotique, la méthode énumérative des matrices de transfert et quelques résultats sur les matrices non-négatives.

Le deuxième chapitre porte sur l'énumération des classes de symétries de polyominos parallélogrammes, ce qui permet d'énumérer ces derniers à symétries près. Les polyominos parallélogrammes n'ayant aucune symétrie sont aussi énumérés par inversion de Möbius, et on prouve qu'asymptotiquement, presque tous les polyominos parallélogrammes sont asymétriques.

Le troisième chapitre introduit deux classes de chemins: les chemins autoévitant dirigés et les chemins autoévitant à mémoire finie. Les deux classes s'énumèrent à l'aide de matrices de transfert, et on montre comment la méthode s'adapte pour obtenir le rayon carré moyen des chemins.

Le quatrième et dernier chapitre présente des résultats obtenus quant à l'énumération de polyominos dans des bandes de hauteur bornée du réseau carré pour les premières valeurs de hauteur, et indique comment la méthode continue de s'appliquer pour les hauteurs supérieures. Ici encore, des résultats asymptotiques sont donnés.

## CHAPITRE I

### NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre introduit les notions de base qui seront utilisées par la suite. Les symétries d'un objet ou d'un ensemble d'objets forment généralement un groupe, qui agit de façon naturelle sur cet ensemble d'objets, à condition que les images sous toutes les symétries de tous les éléments de l'ensemble soient aussi dans l'ensemble. Les orbites de cette action sont alors les classes d'équivalence d'objets, c'est-à-dire que deux objets seront dans la même orbite si et seulement si on peut obtenir l'un de l'autre par une symétrie du groupe. Si on regarde les orbites comme des éléments, elles correspondent à des objets "à symétries près". Compter des objets à symétrie près revient donc à compter des orbites d'actions de groupes. C'est pourquoi un rappel sur les actions de groupes et le lemme de Burnside sera présenté. On peut vouloir aussi compter les objets n'ayant pas une symétrie mais plusieurs ou aucune, ce qui peut se faire par inclusion-exclusion. Un rappel d'analyse asymptotique pour les séries rationnelles est ensuite donné, qui sera utile dans les chapitres sur les chemins autoévitant et sur les polyominos généraux car les séries génératrices trouvées seront rationnelles et on voudra étudier le comportement asymptotique des nombres d'objets. Finalement, une brève introduction à la méthode des matrices de transfert et à quelques théorèmes généraux sur les matrices non-négatives sera présentée. Là encore, elle sera utile dans le dénombrement des chemins et des polyominos.

## 1.1 Actions de groupes et lemme de Burnside

DÉFINITION 1 Une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est une application

$$\begin{aligned} \rho : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \rho(g, x) = g \bullet x \end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés suivantes:

- (i)  $e \bullet x = x$ ,  $\forall x \in X$ , où  $e$  est l'élément identité de  $G$ ,
- (ii)  $g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x$ ,  $\forall g, h \in G, x \in X$ , où  $gh$  est le produit de  $g$  et  $h$  dans  $G$ .

Pour cette action, on a les définitions suivantes qui introduisent les notions d'orbite, de stabilisateur et d'ensemble de points fixes.

DÉFINITION 2 L'orbite  $O(x)$  d'un élément  $x \in X$  est l'ensemble  $\{g \bullet x \mid g \in G\}$ . L'ensemble des orbites de l'action de  $G$  sur  $X$  est noté  $X/G$ .

DÉFINITION 3 Le stabilisateur  $\text{Stab}(x)$  d'un élément  $x \in X$  est l'ensemble

$$\{g \in G \mid g \bullet x = x\}.$$

C'est un sous-groupe de  $G$ .

DÉFINITION 4 L'ensemble des points fixes de  $g \in G$  est l'ensemble

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \bullet x = x\}.$$

LEMME 1.1 Pour tout  $x \in X$ , on a une bijection entre  $G/\text{Stab}(x)$  et l'orbite  $O(x)$ .

PREUVE On fixe  $x \in X$  et on pose  $S = \text{Stab}(x)$  et  $O = O(x)$ .  $G/S$  est l'ensemble des classes latérales à gauche  $\{gS \mid g \in G\}$ . On définit  $\phi : G/S \longrightarrow O$  par  $\phi(gS) = g \bullet x$ .

On doit d'abord vérifier que  $\phi$  est bien définie. Soient  $g$  et  $h$  dans  $G$  tels que  $gS = hS$ . Alors  $g^{-1}hS = S$  et donc  $g^{-1}h \in S$ . Puisque  $S$  est le stabilisateur de  $x$ , on a  $g^{-1}h \bullet x = x$  et donc  $h \bullet x = g \bullet x$ .

On montre ensuite que  $\phi$  est injective. Soit  $\phi(gS) = \phi(hS)$ . Par définition de  $\phi$ , on a alors  $g \bullet x = h \bullet x$  et  $g^{-1}h \bullet x = x$ . Ainsi,  $g^{-1}h \in S$  et donc  $gS = hS$ . Finalement,  $\phi$  est surjective: soit  $z \in O$ , alors  $z = g \bullet x$  pour un certain  $g$  et on aura  $\phi(gS) = z$ . ■

**COROLLAIRE 1.2** *Si  $G$  est un groupe fini, alors pour tout  $x \in X$ ,*

$$|O(x)| \cdot |\text{Stab}(x)| = |G|. \quad (1.1)$$

**PREUVE** Puisque  $\text{Stab}(x)$  est un sous-groupe de  $G$ , la formule de Lagrange donne

$$|G| = |\text{Stab}(x)| \cdot |G/\text{Stab}(x)|. \text{ Or } |G/\text{Stab}(x)| = |O(x)| \text{ par le lemme.} \quad \blacksquare$$

On peut maintenant énoncer le lemme de Burnside (aussi appelé formule de Cauchy-Frobenius).

**LEMME 1.3 (Lemme de Burnside)** *Soit une action de groupe avec  $G$  et  $X$  finis (dans les notations d'au-dessus). Alors*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Fix}(g). \quad (1.2)$$

**PREUVE**

$$\begin{aligned} |X/G| &= \sum_{O \in X/G} 1 && \text{(par définition de } X/G) \\ &= \sum_{O \in X/G} \sum_{x \in O} \frac{1}{|O|} \\ &= \sum_{x \in X} \frac{1}{|O(x)|} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| && \text{(par le lemme précédent)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} \sum_{g: g \bullet x = x} 1 && \text{(par définition de } \text{Stab}(x)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x: g \bullet x = x} 1 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Fix}(g) && \text{(par définition de } \text{Fix}(g)) \end{aligned}$$

■

REMARQUE Au lieu de simplement prendre la cardinalité usuelle dans le lemme de Burnside, on peut prendre des cardinalités pondérées, c'est-à-dire qu'au lieu de prendre  $|S|$  pour un ensemble  $S$ , on prend  $|S|_\omega = \sum_{s \in S} \omega(s)$ , où  $w$  est une fonction de poids  $S \rightarrow A$  avec  $A$  un anneau commutatif. Il faut toutefois que la fonction de poids soit compatible avec l'action de groupe, i.e. on doit avoir  $\omega(g \bullet x) = \omega(x)$ ,  $\forall g \in G, x \in X$ . On peut alors étendre le lemme de Burnside à des ensembles  $X$  infinis si les cardinalités pondérées sont sommables. Plus loin, on prendra comme cardinalité d'un ensemble de polyominos sa série génératrice.

## 1.2 Notions d'analyse asymptotique

L'idée générale de l'analyse asymptotique est d'étudier le comportement limite d'une suite ou d'une fonction; par exemple, évaluer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{pour une suite } (a_n)_{n \geq 0}$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad (\text{ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) \quad \text{pour une fonction (réelle) } f(x).$$

Il arrive souvent que  $(a_n)$  et  $f(x)$  divergent, et alors ces limites ne sont pas définies. On peut toutefois dans ces cas étudier de quelle manière la suite, série ou fonction diverge (par exemple, exponentiellement, quadratiquement, linéairement, etc.).

On veut alors pouvoir trouver une "expression analytique" simple qui "approche" (dans un sens défini plus loin)  $a_n$  ou  $f(x)$ . Par expressions simples on entend des expressions plus facilement évaluables, comme des puissances ( $n^\alpha$  ou  $x^\alpha$ ), des exponentielles ( $\mu^n$  ou  $\mu^x$ ) et autres fonctions relativement simples (la ligne entre ce qui est simple et ce qui ne l'est pas est floue; les fonctions élémentaires sont simples).

On définit tout d'abord des outils utiles pour représenter l'ordre de grandeur des éléments d'une suite (ou d'une fonction) relativement à une autre. Les notions présentées ici s'inspirent de la section sur l'asymptotique de (Bergeron, Labelle et Leroux, 1997).



NOTE On utilisera la notation  $[x^n]f(x)$  pour désigner le coefficient de  $x^n$  dans le développement en série de  $f(x)$ . On a donc  $[x^n]f(x) = a_n$  pour  $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ .

### Le grand $O$

DÉFINITION 5 Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites de nombres (complexes). On écrit

$$a_n = O(b_n) \quad \text{si} \quad \exists K \geq 0 \quad \text{tel que} \quad |a_n| \leq K |b_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

TERMINOLOGIE On dit que  $a_n$  est de l'ordre de  $b_n$ , ou que  $a_n$  est “grand  $O$ ” de  $b_n$ .

### Le petit $o$

DÉFINITION 6 Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites de nombres (complexes). On écrit

$$a_n = o(b_n) \quad \text{si} \quad \forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists N \quad \text{tel que} \quad n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon |b_n|.$$

NOTE On reconnaît ici une définition de limite. En fait, si  $b_n \neq 0 \forall n$ ,

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon \geq 0 \exists N \text{ t.q. } n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon |b_n|) &\Rightarrow (\forall \varepsilon \geq 0 \exists N \text{ t.q. } n \geq N \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq \varepsilon) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \end{aligned}$$

TERMINOLOGIE On dit que  $a_n$  est négligeable devant  $b_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ , ou que  $a_n$  est “petit  $o$ ” de  $b_n$ .

### Asymptotique

DÉFINITION 7 Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites de nombres (complexes). On écrit

$$a_n \sim b_n \quad \text{si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

TERMINOLOGIE On dit que  $a_n$  est asymptotique à  $b_n$ .

NOTE  $\sim$  est une relation d'équivalence.

NOTE Soit  $a_n = b_n(1 + f(n))$ . Alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(1 + f(n))}{b_n} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + f(n)) = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \\ &\Rightarrow f(n) = o(1). \end{aligned}$$

Donc  $a_n \sim b_n \Rightarrow a_n = b_n(1 + o(1))$  si  $b_n \neq 0$ .

REMARQUE En fait, les symboles  $O$  et  $o$  désignent des classes de suites:

$$\begin{aligned} O(b_n) &= \{(a_n)_{n \geq 0} \mid a_n = O(b_n)\}, \\ o(b_n) &= \{(a_n)_{n \geq 0} \mid a_n = o(b_n)\}. \end{aligned}$$

REMARQUE Les définitions ci-dessus ont été données pour des suites, mais elles peuvent être étendues facilement aux fonctions.

EXEMPLES

**Polynômes** Pour  $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$  avec  $b \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} an^\alpha &= O(bn^\beta) && \text{si } \beta \geq \alpha, \\ an^\alpha &= o(bn^\beta) && \text{si } \beta > \alpha, \\ an^\alpha &\sim bn^\beta && \text{si } \beta = \alpha \text{ et } a = b. \end{aligned}$$

**Polynômes – exponentielles** Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec  $\beta \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} n^\alpha &= o(\beta^n) && \text{si } |\beta| > 1, \\ \beta^n &= o(n^\alpha) && \text{si } |\beta| < 1, \\ n^\alpha &= O(\beta^n) && \text{si } \alpha \geq 0 \text{ et } |\beta| > 1. \end{aligned}$$

**Factorielles** Formule de Stirling:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

### 1.2.1 Asymptotique de certaines suites élémentaires

On a le résultat suivant, qui servira beaucoup par la suite:

LEMME 1.4 Soit  $\xi$  un nombre complexe non nul. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , si

$$\left(\frac{1}{1-x/\xi}\right)^k = \sum_{n \geq 0} a_n^{(k)} x^n,$$

alors

$$a_n^{(k)} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!\xi^n} \sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!\xi^n}. \quad (1.3)$$

PREUVE Par la série binomiale, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-x/\xi}\right)^k &= \sum_{n \geq 0} \binom{-k}{n} (-x/\xi)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{n+k-1}{n} (-1)^n \frac{x^n}{\xi^n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{(k-1)!} \frac{x^n}{\xi^n} \end{aligned}$$

On obtient le résultat en prenant le coefficient de  $x^n$  de chaque côté. Pour l'asymptotique, on remarque que le numérateur de la fraction est un polynôme en  $n$  de degré  $k-1$ ; son asymptotique est donc donnée par son terme dominant. ■

REMARQUE POUR LA SUITE Dans  $\left(\frac{1}{1-x/\xi}\right)^k$ ,  $\xi$  est un pôle d'ordre  $k$ . Aussi, pour  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , plus  $\xi$  est petit en module, plus  $1/\xi$ , et donc  $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!\xi^n}$ , est grand en module.

On peut attaquer maintenant l'asymptotique de suites plus compliquées. Quand on étudie une nouvelle structure combinatoire, celle-ci est généralement donnée par une équation combinatoire faisant intervenir d'autres structures. Au niveau des séries génératrices, on doit alors résoudre une équation fonctionnelle, et en résolvant, on trouve généralement la série génératrice du type de structures considérées plutôt que ses coefficients individuels. Il s'agit ensuite de déterminer les coefficients du développement en série de puissances.

Si on a déjà une forme close pour les coefficients, on peut essayer de déterminer l'asymptotique directement. Mais dans certains cas, on peut analyser le comportement asymptotique à partir de la série génératrice elle-même, sans passer par les coefficients, ou en ne calculant que les quelques premiers.

Un premier cas de séries génératrices simples à étudier est celui des fonctions rationnelles (le cas vraiment le plus simple, celui des polynômes, n'a pas d'asymptotique).

### 1.2.2 Asymptotique des fonctions rationnelles

#### Rappels d'analyse complexe

DÉFINITION 8 Une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite rationnelle si  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , où  $P, Q \in \mathbb{C}[x]$  (i.e.,  $P$  et  $Q$  sont des polynômes) et  $Q \neq 0$ .

NOTE Une telle fonction est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{\text{racines de } Q(x)\}$ , i.e. est analytique sauf en ses pôles.

Pour une fonction rationnelle  $P(x)/Q(x)$ , on trouve les pôles et leurs ordres en factorisant complètement  $Q(x)$ : si

$$Q(x) = k(x - \xi_1)^{m_1}(x - \xi_2)^{m_2} \dots (x - \xi_k)^{m_k}, \quad \xi_i \neq \xi_j \text{ si } i \neq j, \quad m_i > 0,$$

alors les pôles sont  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  et leurs ordres sont  $m_1, m_2, \dots, m_k$  respectivement.

Aussi, si  $\deg(P) > \deg(Q)$  alors  $f(\infty) = \infty$  et on dit que  $f$  a un pôle à l'infini d'ordre  $(\deg(P) - \deg(Q))$ .

DÉFINITION 9 Une fonction complexe  $f$  est dite méromorphe si elle peut être écrite comme  $g(z)/h(z)$  avec  $h(z) \not\equiv 0$ , où  $g$  et  $h$  sont des fonctions entières (analytiques partout dans le plan complexe).

En particulier, une fonction rationnelle est méromorphe.

Si  $f(x)$  est la série génératrice d'un ensemble de structures, on veut pouvoir la développer en série de puissances autour de  $x = 0$ .  $f(0)$  doit donc être défini, ce qui implique qu'on doit avoir  $Q(0) \neq 0$ . On peut exiger, de manière équivalente, que  $f(x)$  soit analytique à l'origine.

Dans ce cas on a un premier résultat:

PROPOSITION 1.5 *Soit  $f(x)$  une fonction rationnelle analytique à l'origine dont les pôles sont  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ , d'ordres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  respectivement. Alors il existe des polynômes  $\pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_k(n)$  et un entier  $n_0$  tels que si  $n \geq n_0$ ,*

$$[x^n] f(x) = \sum_{j=1}^k \pi_j(n) \frac{1}{\xi_j^n} \quad \text{avec } \deg(\pi_j(n)) = \alpha_j - 1. \quad (1.4)$$

De plus, s'il existe un unique pôle  $\xi_{j_0}$  de module minimum, alors

$$[x^n] f(x) \sim \pi_{j_0}(n) \frac{1}{\xi_{j_0}^n}. \quad (1.5)$$

PREUVE On suppose  $P$  et  $Q$  relativement premiers. On peut écrire  $f$  sous forme de fractions partielles:

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{\alpha_j} \frac{c_{ij}}{(1 - x/\xi_j)^i} + r(x)$$

avec  $r(x) =$  reste de la division de  $P$  par  $Q$  ( $\deg(r) = \deg(P) - \deg(Q)$ ).

On note que  $r(x)$  ne perturbe que les quelques premiers termes de  $([x^n] f(x))_{n \geq 0}$  et n'a pas d'influence sur les suivants, alors pour le comportement asymptotique (ou pour  $n \geq n_0 = \deg(r)$ ), on peut le négliger.

Ainsi, pour  $n$  assez grand, on a

$$\begin{aligned} [x^n] f(x) &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{\alpha_j} c_{ij} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+i-1)}{(i-1)! \xi_j^n} \quad \text{par le lemme plus haut,} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{\xi_j^n} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{\alpha_j} c_{ij} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+i-1)}{(i-1)!} \right)}_{\pi_j(n), \text{ de degré } \alpha_j - 1}, \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^k \pi_j(n) \frac{1}{\xi_j^n}.$$

Aussi, s'il y a  $\xi_{j_0}$  tel que  $|\xi_{j_0}| < |\xi_i| \quad \forall i \neq j_0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_i(n) \frac{1}{\xi_i^n}}{\pi_{j_0}(n) \frac{1}{\xi_{j_0}^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_i(n)}{\pi_{j_0}(n)} \left( \frac{\xi_{j_0}}{\xi_i} \right)^n = 0 \quad \text{car} \quad \left| \frac{\xi_{j_0}}{\xi_i} \right| < 1.$$

Ceci implique que  $\pi_i(n)/\xi_i^n = o(\pi_{j_0}/\xi_{j_0}^n) \quad \forall i \neq j_0$ , et on a donc

$$[x^n] f(x) \sim \pi_{j_0}(n) \frac{1}{\xi_{j_0}^n},$$

car on a une somme finie de termes négligeables par rapport au terme dominant. ■

NOTE On sait que toute série génératrice ordinaire dont les coefficients satisfont à partir d'un certain  $n_0$  une récurrence linéaire à coefficients constants est une fonction rationnelle analytique à l'origine. La proposition permet donc d'étudier l'asymptotique de toute suite dont les termes satisfont une telle récurrence.

On peut étendre la dernière proposition à certaines fonctions méromorphes.

PROPOSITION 1.6 *Soit  $R > 0$  et  $f(x)$  méromorphe dans le disque  $|x| < R$  et analytique sur la circonférence  $|x| = R$  ainsi qu'à l'origine. Supposons que les pôles de  $f(x)$  sont  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  avec ordres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  respectivement. Alors il existe des polynômes  $\pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_k(n)$  tels que*

$$[x^n] f(x) = \sum_{j=1}^k \pi_j(n) \frac{1}{\xi_j^n} + o(R^{-n}) \quad \text{avec} \quad \deg(\pi_j(n)) = \alpha_j - 1. \quad (1.6)$$

*De plus, s'il existe un unique pôle  $\xi_{j_0}$  de module minimum, alors*

$$[x^n] f(x) \sim \pi_{j_0}(n) \frac{1}{\xi_{j_0}^n}. \quad (1.7)$$

PREUVE Omise. ■

REMARQUE On avait  $\pi_j(n) = \sum_{i=1}^{\alpha_j} c_{ij} \frac{(n+1)\dots(n+i-1)}{(i-1)!}$ . Si  $\alpha_j = 1$  alors  $\pi_j(n) = c_{1j}$ .

Dans ce cas,

$$f(x) = \frac{c_{1j}}{1 - x/\xi_j} + \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

où  $\xi_j$  n'est pas une racine de  $\tilde{Q}(x)$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow \xi_j} (1 - x/\xi_j) f(x) = c_{1j} + \lim_{x \rightarrow \xi_j} (1 - x/\xi_j) \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} = c_{1j}.$$

Ainsi, si  $f(x)$  a un unique pôle de module minimal  $\xi_{j_0}$  et que ce pôle est simple, on calcule

$$c = \lim_{x \rightarrow \xi_{j_0}} (1 - x/\xi_{j_0}) f(x)$$

et on obtient

$$[x^n] f(x) \sim \frac{c}{\xi_{j_0}^n}.$$

### 1.3 Matrices de transfert

Une description générale de la méthode énumérative des matrices de transfert est donnée dans la section 4.7 du premier volume du livre de Richard Stanley, *Enumerative Combinatorics* (Stanley, 1997). Essentiellement, la méthode s'applique à l'énumération de structures qui peuvent être construites étape par étape à partir d'un nombre fini de configurations, de telle sorte que les configurations possibles à une étape donnée ne dépendent que de la configuration choisie à l'étape précédente. Le système est donc un automate.

Le contexte général est le suivant. On représente le système par un graphe dirigé  $G$  dont les sommets seront les configurations du système. Un arc entre deux sommets  $s_i$  et  $s_j$  signifie qu'on peut passer de la configuration  $s_i$  à la configuration  $s_j$ . On dira qu'on a une transition entre  $s_i$  et  $s_j$  et on pondérera cet arc par le poids  $\omega(s_i, s_j)$  de la transition. Dans le cas le plus simple, le poids est 1 pour toutes les transitions possibles.

DÉFINITION 10 *Soit un système combinatoire décrit par un graphe dirigé  $G$ . La matrice*

de transfert associée à ce système est la matrice  $T_G$  définie par

$$(T_G)_{i,j} = \begin{cases} \omega_{ij} = \omega(s_i, s_j) & \text{s'il y a un arc entre } s_i \text{ et } s_j \text{ dans } G, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.3.1 Théorèmes principaux

**THÉORÈME 1.7** *Soit  $T$  la matrice de transfert pour un système  $G$  et soit  $m \in \mathbb{N}$ . Alors l'entrée  $(i, j)$  de  $T^m$  est le nombre (ou poids total) des objets construits en  $m$  étapes, en commençant par la configuration  $s_i$  et en terminant par la configuration  $s_j$ .*

**PREUVE** En effet,

$$(T^m)_{i,j} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}} \omega_{ik_1} \omega_{k_1 k_2} \dots \omega_{k_{m-1} j}.$$

La somme est donc prise sur tous les chemins de longueur  $m$  dans  $G$  qui vont de  $s_i$  à  $s_j$ . Donc  $(T^m)_{i,j}$  est la somme des poids de ces chemins (puisque le poids d'un chemin est le produit des poids de ses pas). ■

**THÉORÈME 1.8** *Soit  $T$  une matrice de transfert. Si on définit la série génératrice  $F_{i,j}(\lambda)$  par*

$$F_{i,j}(\lambda) = \sum_{n \geq 0} (T^n)_{i,j} \lambda^n$$

alors

$$F_{i,j}(\lambda) = \frac{(-1)^{i+j} \det(I - \lambda T : j, i)}{\det(I - \lambda T)}, \quad (1.9)$$

où  $(I - \lambda T : j, i)$  est la matrice obtenue de  $(I - \lambda T)$  en lui enlevant la ligne  $j$  et la colonne  $i$ . De façon équivalente,  $F_{i,j}(\lambda)$  est l'entrée  $(i, j)$  de l'inverse de la matrice  $(I - \lambda T)$ .

**PREUVE** On a

$$\begin{aligned} F_{i,j}(\lambda) &= \sum_{n \geq 0} (T^n)_{i,j} \lambda^n = \sum_{n \geq 0} (\lambda^n T^n)_{i,j} = \sum_{n \geq 0} (\lambda T)^n_{i,j} \\ &= \left( \sum_{n \geq 0} (\lambda T)^n \right)_{i,j} \\ &= (I - \lambda T)^{-1}_{i,j} \end{aligned}$$



En extrayant l'entrée  $(i, j)$  de cette dernière matrice avec la règle de Cramer, on obtient la formule proposée. ■

### 1.3.2 Résultats généraux sur les matrices non-négatives

DÉFINITION 11 Une matrice réelle carrée  $A = (a_{ij})$  est  $\geq 0$  (resp.  $> 0$ ) si  $\forall i, j, a_{ij} \geq 0$  (resp.  $> 0$ ). Si  $A \geq 0$  (resp.  $> 0$ ), on dit que  $A$  est non-négative (resp. positive ou strictement positive).

DÉFINITION 12 Une matrice réelle carrée  $A$  est irréductible s'il n'existe pas de matrice de permutation  $P$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices carrées.

REMARQUE En particulier, une matrice strictement positive est forcément irréductible. D'autre part, on observe que si une matrice  $A$  est réductible, alors toutes ses puissances le sont, puisque si  $A$  est comme dans l'équation (1.10), alors pour tout entier  $k$ ,

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ * & A_2^k \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit qu'une matrice dont l'une des puissances est strictement positive est aussi irréductible.

DÉFINITION 13 Le rayon spectral d'une matrice (complexe)  $A$  est le maximum des modules de ses valeurs propres, son spectre est l'ensemble de ses valeurs propres, et son spectre périphérique est l'ensemble de ses valeurs propres ayant pour module son rayon spectral (i.e. l'ensemble des valeurs propres de module maximum).

REMARQUE La section précédente a montré que le comportement asymptotique d'une fonction rationnelle est déterminé par le pôle de module minimal s'il est unique. Or

l'équation (1.9) donnant les fonctions génératrices de systèmes combinatoires décrits par une matrice de transfert montre que les fonctions obtenues sont rationnelles. De plus, le dénominateur de ces fonctions est le polynôme réciproque du polynôme caractéristique de la matrice, ce qui veut dire que les racines du dénominateur (les pôles de la fonction génératrice, s'il n'y a pas d'annulations de termes avec le numérateur) sont les inverses des valeurs propres de la matrice de transfert. Ainsi, le pôle de module minimal et la valeur propre de module maximal se correspondent s'ils sont uniques et qu'il n'y a pas d'annulation de termes. Les résultats classiques suivants montrent l'unicité de la valeur propre de module maximal.

**THÉORÈME 1.9 (Frobenius)** *Soit  $A$  une matrice irréductible non-négative de rayon spectral  $r$ .*

1. *Le spectre périphérique de  $A$  est complètement cyclique et de la forme  $rH$ , où  $H$  est le groupe des racines  $n$ -ième de l'unité, pour un certain  $n \geq 1$ .*
2. *Chaque  $\lambda \in rH$  est une racine simple du polynôme caractéristique (et donc une valeur propre simple) de  $A$ .*
3. *Le spectre de  $A$  est invariant sous le groupe de rotations (dans le plan complexe) correspondant à  $H$ .*

■

**THÉORÈME 1.10 (Perron)** *Soit  $A$  une matrice positive. Alors le rayon spectral  $r(A)$  est une valeur propre de  $A$  et est une racine simple de son polynôme caractéristique. De plus,  $r(A)$  est la seule valeur propre du spectre périphérique.*

■

**COROLLAIRE 1.11** *Les conclusions du théorème de Perron demeurent valides si  $A$  est une matrice irréductible non-négative, à condition qu'au moins une entrée diagonale de  $A$  soit non-nulle.*

■

## CHAPITRE II

# ÉNUMÉRATION DES CLASSES DE SYMÉTRIES DE POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES

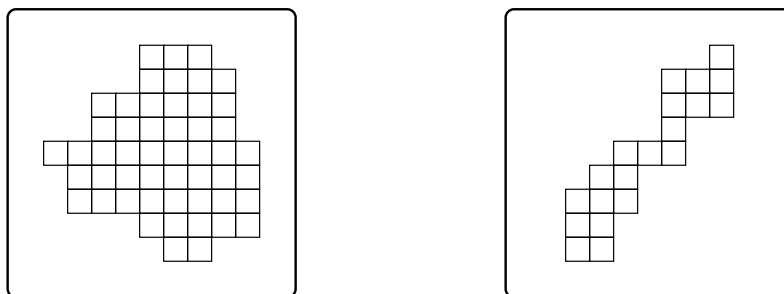
### 2.1 Introduction

Les polyominos parallélogrammes, qu'on appellera quelquefois simplement *parallélogrammes* pour alléger la terminologie, forment une sous-classe des polyominos convexes (horizontalement et verticalement) sur le réseau carré. Ils sont caractérisés par le fait qu'ils touchent les coins inférieur gauche et supérieur droit de leur rectangle minimal (voir la figure 2.1). En choisissant les deux autres coins du rectangle minimal, on obtiendrait une autre sous-classe de polyominos convexes, équivalente à celle des parallélogrammes toutefois puisque les éléments de cette sous-classe sont simplement les parallélogrammes tournés de  $90^\circ$ . Comme pour les polyominos généraux, l'aire d'un parallélogramme est définie comme le nombre de cellules qui le composent, et son demi-périmètre comme la somme de sa hauteur et de sa largeur.

La littérature sur l'énumération de nombreuses classes de polyominos ayant diverses propriétés de convexité et de croissance dirigée est considérable, cette étude étant motivée par la combinatoire, la physique statistique, l'informatique théorique et les mathématiques récréatives. Voir M. Bousquet-Mélou (Bousquet-Mélou, 1996c) pour une synthèse récente des résultats sur le sujet.

En particulier, l'étude des polyominos parallélogrammes selon leurs périmètre et aire a débuté avec Pólya (Pólya, 1969). Par la suite, d'autres ont apporté leur contribution

au sujet en donnant des énumérations plus raffinées: Bender, Klarner, Rivest, Delest, Fédou, Viennot et d'autres. Mireille Bousquet-Mélou, en utilisant la méthodologie de Temperley (Temperley, 1956), a trouvé une fonction génératrice selon la hauteur, la largeur, l'aire et les hauteurs des première et dernière colonnes ((Bousquet-Mélou, 1996a), (Bousquet-Mélou, 1996c)).



**Figure 2.1** Exemple de polyomino convexe (gauche) et polyomino parallélogramme (droite).

Les polyominos sont généralement considérés équivalents s'ils peuvent être obtenus les uns des autres par translation dans le réseau et sont quelquefois plus précisément appelés *polyominos à translations près* (voir D. A. Klarner (Klarner, 1981)). Il est naturel d'aussi considérer les polyominos à congruences près, c'est-à-dire les classes d'équivalence de polyominos sous rotations et réflexions. Ces polyominos ou classes de polyominos se présentent alors comme des pièces qui peuvent bouger librement dans l'espace, comme dans les problèmes de pavages du plan (voir S. W. Golomb (Golomb, 1994)). Dans (Leroux, Rassart et Robitaille, 1998) l'énumération des polyominos à congruences près est étudiée pour la classe des polyominos convexes.

Le problème revient au dénombrement des orbites de l'action du groupe diédral  $\mathfrak{D}_4$  des symétries du carré sur l'ensemble des polyominos convexes. Le groupe  $\mathfrak{D}_4$  contient huit éléments, habituellement représentés par  $1, r, r^2, r^3, h, v, d_1$  et  $d_2$ , où  $1$  dénote l'élément identité,  $r$  une rotation par un angle droit,  $h$  et  $v$  des réflexions par rapport à l'axe horizontal et l'axe vertical respectivement, et  $d_1$  et  $d_2$  des réflexions par rapport aux deux diagonales du carré (on prend la bissectrice du premier quadrant pour  $d_2$ ).

Le nombre d'orbites  $|X/G|$  de l'action d'un groupe fini  $G$  sur un ensemble fini  $X$  est donné par la formule de Cauchy-Frobenius (aussi appelée lemme de Burnside):

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|, \quad (2.1)$$

où  $\text{Fix}(g)$  dénote le sous-ensemble de  $X$  dont les éléments sont  $g$ -symétriques, c'est-à-dire invariants sous la symétrie  $g$ . Ainsi l'énumération des polyominos à congruences près se réduit à la détermination de la taille des classes de symétries de polyominos convexes, ceci pour chaque élément  $g \in \mathfrak{D}_4$ . La formule (2.1) s'étend aux ensembles infinis si une cardinalité pondérée  $|X|_\omega$  est utilisée, pour une certaine fonction de poids  $\omega$  qui soit  $G$ -invariante. Pour la classe  $\mathcal{P}$  des polyominos à translations près sur le réseau carré, cela peut vouloir dire par exemple l'utilisation de séries génératrices  $\mathcal{P}(t, q)$  selon le demi-périmètre et l'aire.

Le but de ce chapitre est de procéder à un énumération similaire pour la classe  $\mathbb{P}$  des polyominos parallélogrammes, en observant qu'un sous-groupe de  $\mathfrak{D}_4$  agit sur celle-ci. Ce sous-groupe est le groupe  $\langle r^2, d_1 \rangle = \{1, r^2, d_1, d_2\}$ , qu'on notera  $\mathfrak{D}_2$ . Les parallélogrammes à congruences près coïncideront alors avec les orbites  $\mathbb{P}/\mathfrak{D}_2$ . Dans les sections suivantes, on calculera donc les séries génératrices des classes de symétries  $\text{Fix}(g)$  de polyominos parallélogrammes pour tout  $g \in \mathfrak{D}_2$ . On utilisera ensuite (2.1) afin d'obtenir  $(\mathbb{P}/\mathfrak{D}_2)(t, q)$ .

Il est aussi possible de dénombrer des polyominos parallélogrammes asymétriques (ceux qui ne sont  $g$ -invariants pour aucun  $g$  autre que l'identité), en utilisant le principe d'inclusion-exclusion ou l'inversion de Möbius dans le treillis des sous-groupes de  $\mathfrak{D}_2$ . Ceci nécessitera l'énumération de la sous-classe  $\text{Fix}(\mathfrak{D}_2)$  de  $\mathbb{P}$ , des polyominos parallélogrammes totalement symétriques (qui ont toutes les symétries du groupe). Les polyominos parallélogrammes asymétriques seront ainsi dénombrés et on montrera que leur nombre pour une aire ou un périmètre donné est asymptotiquement équivalent au nombre de polyominos parallélogrammes, comme on s'y attendrait (intuitivement on a l'impression que la probabilité de tirer au hasard uniformément un parallélogramme de grande taille qui ait au moins une symétrie est faible).

Comme on le verra, l'énumération de toutes les classes de symétries selon le périmètre fait intervenir, sous une forme ou une autre, soit des chemins de Dyck (ou mots de Dyck, voir J. Labelle (Labelle, 1993)) dénombrés par les nombres de Catalan  $c_n$ , soit des facteurs gauches de chemins de Dyck, dénombrés à un facteur multiplicatif près par les coefficients binomiaux centraux  $b_n$  (voir (Cori et Viennot, 1983)), où

$$b_n = \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (2.2)$$

Quand on tient aussi en ligne de compte l'aire, des  $q$ -analogues (certains connus et d'autres nouveaux) de ces nombres apparaissent naturellement.

## 2.2 L'énumération des polyominos parallélogrammes

Il est connu depuis longtemps déjà (voir (Levine, 1959), (Pólya, 1969)) que le nombre de polyominos parallélogrammes de périmètre  $2n$  est donné par le nombre de Catalan  $c_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ . Il y a plusieurs preuves de ce fait, l'une d'entre elles étant la bijection suivante, due à Delest et Viennot (Delest et Viennot, 1984), entre les parallélogrammes de périmètre  $2n+2$  et les chemins de Dyck de longueur  $2n$ . Étant donné un polyomino parallélogramme  $P$  de périmètre  $2n+2$ , on définit la suite  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  des hauteurs des colonnes de  $P$ , et la suite  $(b_1, b_2, \dots, b_{k-1})$  où  $b_i$  est le nombre de cellules de contact entre les colonnes  $i$  et  $i+1$  de  $P$ . Le chemin de Dyck  $D$  associé à  $P$  sera l'unique chemin de Dyck avec  $k$  pics et  $k-1$  creux tel que les hauteurs des pics sont données dans l'ordre par la suite  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , et les hauteurs des creux par la suite  $(b_1-1, b_2-1, \dots, b_{k-1}-1)$  (l'axe horizontal est au niveau 0). La hauteur de  $P$  est  $n+1-k = n-(k-1)$ , et est aussi donnée par

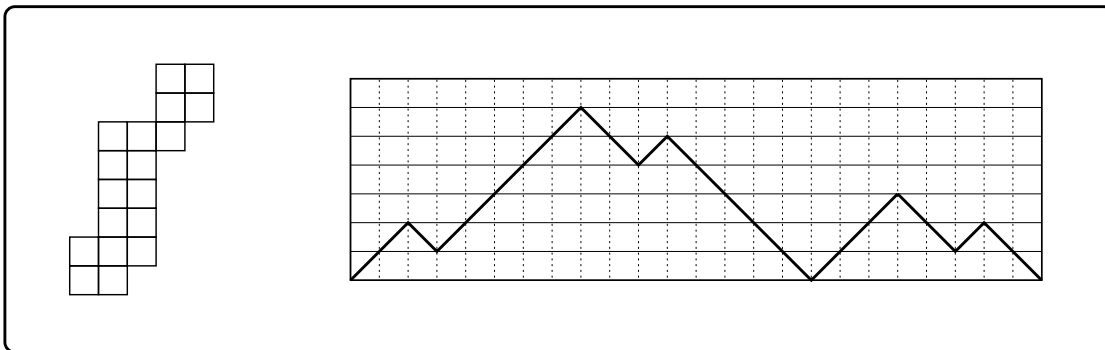
$$a_1 + (a_2 - b_1) + (a_3 - b_2) + \dots + (a_k - b_{k-1}) = \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{j=1}^{k-1} b_j.$$

D'un autre côté, le nombre de pas  $\nearrow$  dans  $D$ , c'est-à-dire la demi-longueur du chemin, est donné par

$$\sum_{i=1}^k a_i - \sum_{j=1}^{k-1} (b_j - 1) = \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{j=1}^{k-1} b_j + (k-1),$$

qui sera égal à  $n$  d'après l'équation précédente. Ainsi  $D$  est un chemin de Dyck de longueur  $2n$ .

On observe aussi que la somme des hauteurs des pics,  $\sum_{i=1}^k a_i$  est simplement l'aire de  $P$ . La figure 2.2 illustre la bijection.



**Figure 2.2** Polyomino parallélogramme et chemin de Dyck associé.

Il s'ensuit que la série génératrice  $\mathbb{P}(t)$  des polyominos parallélogrammes selon le demi-périmètre est

$$\mathbb{P}(t) = \sum_{n \geq 2} c_{n-1} t^n = \frac{1 - 2t - \sqrt{1 - 4t}}{2}. \quad (2.3)$$

Il est aussi connu depuis longtemps que lorsque l'aire est tenue en ligne de compte, les séries génératrices font apparaître des  $q$ -analogues des fonctions de Bessel (voir (Klarner et Rivest, 1974) et (Bender, 1974)). Pólya ((Pólya, 1969) et (Flajolet, 1991)) trouve une série de Laurent reliant la série génératrice des parallélogrammes selon l'aire et le périmètre à une variante d'elle-même où certaines variables sont spécialisées, et à partir de laquelle les termes de la série peuvent être extraits facilement. La série génératrice selon la largeur, la hauteur et l'aire s'exprime aussi comme une fraction continue (voir (Flajolet, 1980)). Nous utiliserons pour la suite une forme récente et plus générale de la série génératrice, due à Mireille Bousquet-Mélou (Bousquet-Mélou, 1996a), donnant la série génératrice  $\mathbb{P}(v, x, y, q)$  des polyominos parallélogrammes, où les variables  $v$ ,  $x$ ,  $y$  et  $q$  marqueront respectivement la hauteur de la colonne la plus à droite,

la largeur, la hauteur totale et l'aire des parallélogrammes.

PROPOSITION 2.1 (Bousquet-Mélou, 1996a) *La série génératrice  $\mathbb{P}(v, x, y, q)$  des polyominos parallélogrammes est donnée par*

$$\mathbb{P}(v, x, y, q) = vy \frac{J_1(v, x, y, q)}{J_0(x, y, q)}, \quad (2.4)$$

où

$$J_0(x, y, q) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_n} \quad (2.5)$$

et

$$J_1(v, x, y, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_{n-1} (1 - vyq^n)} \quad (2.6)$$

avec les notations usuelles  $(a)_n = (a; q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i)$ . ■

Notons que la série génératrice des parallélogrammes selon le demi-périmètre et l'aire  $\mathbb{P}(t, q)$  s'obtient de  $\mathbb{P}(v, x, y, q)$  en posant  $v = 1$ ,  $x = t$  et  $y = t$  dans (2.4).

### 2.3 L'action du groupe diédral $\mathfrak{D}_2$ sur les polyominos parallélogrammes

Les sous-groupes non-triviaux de  $\mathfrak{D}_2$  sont les sous-groupes cycliques d'ordre deux  $\langle r^2 \rangle$ ,  $\langle d_1 \rangle$  et  $\langle d_2 \rangle$ .

Le groupe  $\mathfrak{D}_2$  agit sur les polyominos (à translations près) de façon naturelle, en les faisant tourner ou se réfléchir. Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble fini de polyominos fermé sous l'action du groupe. On pourrait prendre, par exemple, l'ensemble des polyominos convexes ou parallélogrammes d'une aire ou d'un périmètre fixé. Alors tout sous-groupe  $G$  de  $\mathfrak{D}_2$  agit sur  $\mathcal{P}$  et les  $G$ -orbites sont les classes d'équivalence de polyominos modulo les transformations de  $G$ . L'ensemble des  $G$ -orbites de polyominos de  $\mathcal{P}$  est noté  $\mathcal{P}/G$ .

Le nombre de  $G$ -orbites distinctes de polyominos de  $\mathcal{P}$  est donné par la formule de Cauchy-Frobenius (aussi connue comme le lemme de Burnside)

$$|\mathcal{P}/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_{\mathcal{P}}(g)|, \quad (2.7)$$



où  $\text{Fix}_{\mathcal{P}}(g)$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{P}$  formé des polyominos invariants sous la transformation  $g$ . L'ensemble  $\text{Fix}_{\mathcal{P}}(g)$  est appelé la *classe de symétrie* de  $g$ , et on appelle ses éléments *polyominos  $g$ -symétriques*. La formule (2.7) s'étend aux classes infinies de polyominos en prenant une cardinalité pondérée, dans ce cas-ci en prenant les séries génératrices par rapport au demi-périmètre (variable  $t$ ) et l'aire (variable  $q$ ).

Le concept de classe de symétrie de polyominos est étendu à tout sous-groupe  $G$  de  $\mathfrak{D}_2$  en posant

$$\begin{aligned} S_{\geq G} &= \bigcap_{g \in G} \text{Fix}_{\mathcal{P}}(g) = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{Stab}(P) \supseteq G\}, \\ S_{=G} &= \{P \in \mathcal{P} \mid \text{Stab}(P) = G\}, \end{aligned}$$

où  $\text{Stab}(P)$  dénote le stabilisateur de  $P$ , c'est-à-dire le sous-groupe de  $\mathfrak{D}_2$  contenant les transformations laissant  $P$  inchangé. On observe en particulier que  $S_{=0}$  est l'ensemble des polyominos asymétriques (n'ayant aucune symétrie). On note  $F_{\geq G}$  et  $F_{=G}$  les séries génératrices des ensembles  $S_{\geq G}$  et  $S_{=G}$  respectivement. Les séries  $F_{\geq G}$  pour les sous-groupes  $G$  de  $\mathfrak{D}_2$  sont plus simples à calculer directement que les séries  $F_{=G}$ . On a évidemment la relation

$$F_{\geq G} = \sum_{H \supseteq G} F_{=H}, \quad (2.8)$$

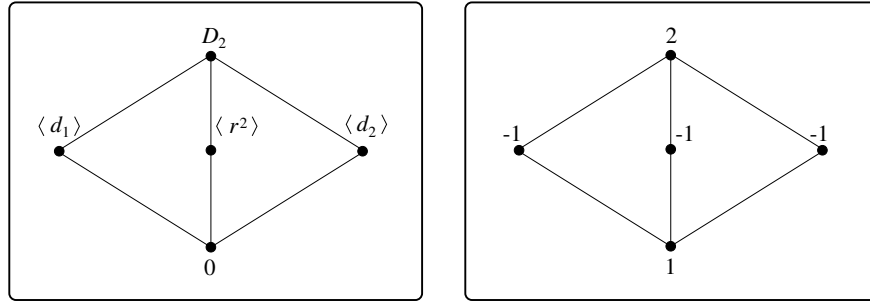
où  $H$  parcourt le treillis des sous-groupes de  $\mathfrak{D}_2$ , noté  $\mathcal{S}(\mathfrak{D}_2)$ .

En utilisant l'inversion de Möbius (voir Rota (Rota, 1964)) dans le treillis  $\mathcal{S}(\mathfrak{D}_2)$ , on trouve

$$F_{=G} = \sum_{H \supseteq G} \mu(G, H) F_{\geq H}, \quad (2.9)$$

où  $\mu(G, H)$  est la valeur de la fonction de Möbius sur  $\mathcal{S}(\mathfrak{D}_4)$ . En particulier, en prenant  $G = 0 = \{1\}$ , l'élément minimal de  $\mathcal{S}(\mathfrak{D}_2)$ , on obtient la série génératrice des polyominos parallélogrammes asymétriques:

$$F_{=0} = \sum_{H \in \mathcal{S}(\mathfrak{D}_4)} \mu(0, H) F_{\geq H}. \quad (2.10)$$



**Figure 2.3** Treillis des sous-groupes de  $\mathcal{D}_2$  et la fonction de Möbius  $\mu(0, H)$  sur le treilli.

La valeur de la fonction de Möbius  $\mu(0, H)$  est facile à calculer récursivement (voir Rota (Rota, 1964)), en utilisant les formules

$$\mu(0, y) = - \sum_{x < y} \mu(0, x) , \quad \mu(0, 0) = 1 . \tag{2.11}$$

Ces valeurs de  $\mu$  sur  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_2)$  sont données dans la figure 2.3.

Dans les sous-sections suivantes, on calculera les séries génératrices des classes de symétries  $\text{Fix}_{\mathcal{P}}(H)$  pour l'ensemble  $\mathbb{P}$  des polyominos parallélogrammes.

## 2.4 Classes de symétries de polyominos parallélogrammes

### 2.4.1 Symétrie rotationnelle

On observe d'abord que si on applique la bijection de Delest et Viennot à un polyomino parallélogramme  $r^2$ -symétrique de périmètre  $2k + 2$ , le chemin de Dyck qu'on obtient est symétrique par rapport à un axe vertical (ou, de façon équivalente, le mot de Dyck associé est un palindrome). Ainsi on n'a qu'à considérer la moitié du chemin, qui est simplement un facteur gauche de longueur  $k$  de chemin de Dyck.

*PROPOSITION 2.2* *Le nombre de polyominos parallélogrammes  $r^2$ -symétriques de demi-périmètre  $k + 1$  est égal au nombre de facteurs gauches de longueur  $k$  de chemins de Dyck.* ■

COROLLAIRE 2.3 *Le nombre de polyominos parallélogrammes  $r^2$ -symétriques de demi-périmètre  $k + 1$  est donné par*

$$r_{k+1}(1) = \begin{cases} \binom{k}{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2} \binom{k+1}{(k+1)/2} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \quad (2.12)$$

PREUVE Il est connu que le nombre de facteurs gauches de longueur  $2n$  de mots de Dyck de longueur  $2n$  est égal au nombre de mots sur l'alphabet  $\{0,1\}$  avec distribution  $0^n 1^n$ , d'où on peut tirer (2.12) facilement (voir (Cori et Viennot, 1983) pour une preuve bijective). On donne ici une preuve de (2.12) utilisant des fonctions génératrices. Les mots de Dyck et les facteurs gauches de mots de Dyck sont engendrés par la grammaire algébrique

$$\begin{aligned} C &\rightarrow \varepsilon + xC\bar{x}C \\ L &\rightarrow C + CxL, \end{aligned}$$

sur l'alphabet  $\{x, \bar{x}\}$ .  $C$  dénote les mots de Dyck et  $L$  les facteurs gauches de mots de Dyck. Sur les chemins  $x$  et  $\bar{x}$  marquent respectivement un pas  $\nearrow$  et un pas  $\searrow$ . La première règle de production donne  $C(x, \bar{x}) = 1 + x\bar{x}C(x, \bar{x})^2$ , qu'on résout pour

$$C(x, \bar{x}) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x\bar{x}}}{2x\bar{x}}.$$

La deuxième règle de production donne  $L(x, \bar{x}) = C(x, \bar{x})(1 + xL(x, \bar{x}))$ , qu'on peut maintenant résoudre, puisqu'on a  $C(x, \bar{x})$ :

$$L(x, \bar{x}) = \frac{\sqrt{1 - 4x\bar{x}} - 1}{x(1 - 2\bar{x} - \sqrt{1 - 4x\bar{x}})}.$$

On substitue alors  $x \mapsto t, \bar{x} \mapsto t$  dans  $L(x, \bar{x})$  pour obtenir la série génératrice  $L(t)$  des facteurs gauches de chemins de Dyck selon leur longueur:

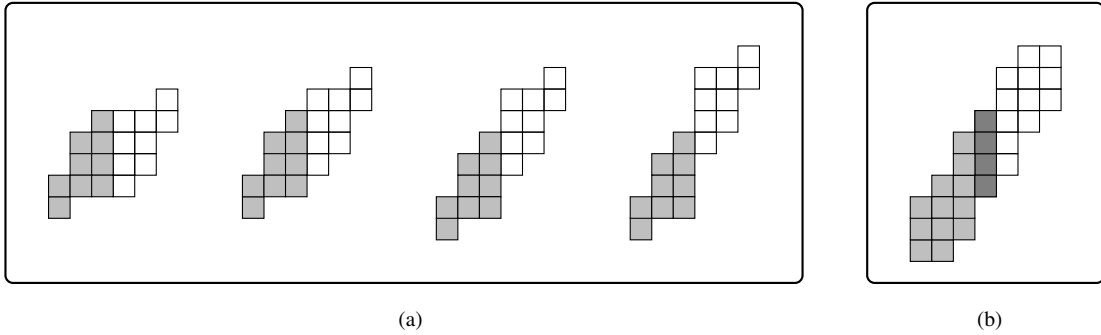
$$L(t) = \frac{2t - 1 + \sqrt{1 - 4t^2}}{2t(1 - t)},$$

d'où on tire (2.12). ■

Pour inclure l'aire dans l'énumération, on pourrait étendre une autre bijection entre parallélogrammes et chemins de Dyck, donnée dans (Bousquet-Mélou et Viennot, 1992), faisant intervenir des empilements de segments, aux facteurs gauches de chemins de Dyck. Il y a toutefois une approche plus directe. En effet, les polyominos parallélogrammes avec une symétrie rotationnelle peuvent s'obtenir de deux copies d'un même parallélogramme collés ensemble. Le processus de collage variera selon que la largeur de l'objet final sera paire ou non, comme le montre la figuree 2.4. Si  $R_2(x, y, q)$  est la série génératrice des polyominos parallélogrammes, alors

$$R_2(x, y, q) = R_2^{(e)}(x, y, q) + R_2^{(o)}(x, y, q) \tag{2.13}$$

où  $R_2^{(e)}(x, y, q)$  et  $R_2^{(o)}(x, y, q)$  sont respectivement les séries génératrices des parallélogrammes  $r^2$ -symétriques de largeur paire et impaire.



**Figure 2.4** Polyominos parallélogrammes  $r^2$ -symétriques de largeur (a) paire et (b) impaire.

PROPOSITION 2.4 *La série génératrice  $R_2^{(e)}(x, y, q)$  des polyominos parallélogrammes  $r^2$ -symétriques de largeur paire est donnée par*

$$R_2^{(e)}(x, y, q) = \frac{1}{1-y} \left( \mathbb{P}\left(\frac{1}{y}, x^2, y^2, q^2\right) - \mathbb{P}(1, x^2, y^2, q^2) \right) \tag{2.14}$$

où  $\mathbb{P}(v, x, y, q)$  est la série génératrice (2.4) des polyominos parallélogrammes.

PREUVE Soit  $P$  un parallélogramme  $r^2$ -symétrique de largeur paire. On définit la région fondamentale de  $P$  comme la moitié gauche de  $P$ . On appellera  $Q$  ce

sous-polyomino (voir la figure 2.4(a)). On remarque tout d'abord que  $Q$  est lui-même un parallélogramme. Pour obtenir  $P$  de  $Q$ , il suffit de tourner une copie de  $Q$  de  $180^\circ$  et de coller ce nouveau polyomino  $\overline{Q}$  à  $Q$  le long de sa colonne la plus à droite. Si cette colonne est de longueur  $k$ , il y aura  $k$  positions possibles de collage de  $\overline{Q}$  relativement à  $Q$ . La substitution  $v \mapsto 1/y$ ,  $x \mapsto x^2$ ,  $y \mapsto y^2$  et  $q \mapsto q^2$  dans la série génératrice  $\mathbb{P}(v, x, y, q)$  des polyominos parallélogrammes correspond à la plus haute position possible de  $\overline{Q}$ , qui minimise la hauteur totale de  $P$ . Toutes les positions possibles seront tenues en ligne de compte en multipliant par  $(1 + y + \dots + y^{k-1})$ . En d'autres mots, la substitution à faire dans  $\mathbb{P}(v, x^2, y^2, q^2)$  est

$$v^k \mapsto \frac{1 + y + \dots + y^{k-1}}{y^k} = \frac{1}{1-y} \left( \frac{1}{y^k} - 1 \right). \quad (2.15)$$

En prenant la somme sur toutes les valeurs possibles de  $k$ , on trouve la série génératrice proposée (2.14) des polyominos parallélogrammes  $r^2$ -symétriques. ■

PROPOSITION 2.5 *La série génératrice  $R_2^{(o)}(x, y, q)$  des polyominos parallélogrammes  $r^2$ -symétriques de largeur impaire est donnée par*

$$R_2^{(o)}(x, y, q) = \frac{1}{x} \mathbb{P}\left(\frac{1}{yq}, x^2, y^2, q^2\right) \quad (2.16)$$

où  $\mathbb{P}(v, x, y, q)$  est la série génératrice des polyominos parallélogrammes.

PREUVE La preuve est similaire à la précédente. La seule différence est qu'une seule position de collage de  $\overline{Q}$  à  $Q$  est possible, et que la colonne de  $Q$  la plus à droite et son image après rotation dans  $\overline{Q}$  sont superposées, de façon à obtenir une largeur totale impaire (voir la figure 2.4(b)). Les détails sont laissés au lecteur. ■

On voudrait aussi pouvoir trouver le nombre de parallélogrammes  $r^2$ -symétriques d'un demi-périmètre fixé, sans toutefois perdre l'information liée à l'aire. En d'autres termes, on voudrait pouvoir exprimer la série génératrice sous la forme

$$R_2(t, q) = R_2(t, t, q) = \sum_{k \geq 0} r_k(q) t^k. \quad (2.17)$$

Les expressions ci-haut pour la série génératrice des parallélogrammes  $r^2$ -symétriques peuvent être utilisées afin d'en extraire les polynômes  $r_k(q)$  (c.-à-d. la développer en puissances de  $t$  après y avoir effectué la substitution  $x \mapsto t, y \mapsto t$ ). On donne ici les quelques premiers de ces polynômes:

$$r_2(q) = q$$

$$r_3(q) = 2q^2$$

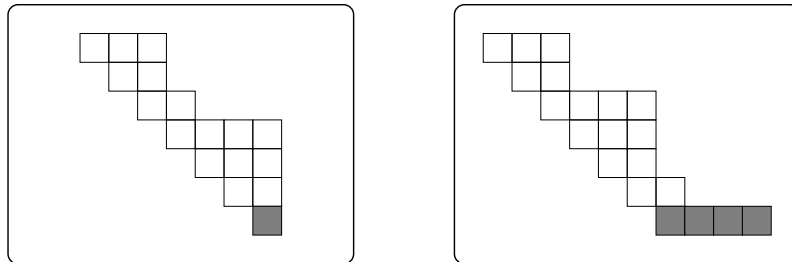
$$r_4(q) = q^4 + 2q^3$$

$$r_5(q) = 2q^6 + 4q^4$$

$$r_6(q) = q^9 + 2q^8 + q^7 + 2q^6 + 4q^5$$

### 2.4.2 Symétries réflexionnelles

On introduit tout d'abord une sous-famille de polyominos parallélogrammes qu'on appellera *polyominos de Dyck* car ils correspondent à des chemins de Dyck dessinés au-dessus d'une diagonale parallèle à  $d_1$ . On considérera aussi des polyominos de Dyck tronqués, qu'on appellera *facteurs gauches de polyominos de Dyck* (ou plus simplement polyominos *FGD*), par analogie encore avec les facteurs gauches de chemins de Dyck. Un polyomino de Dyck et un polyomino *FGD* sont illustrés dans la figure 2.5.



**Figure 2.5** Polyomino de Dyck (à gauche) et facteur gauche de polyomino de Dyck (à droite).

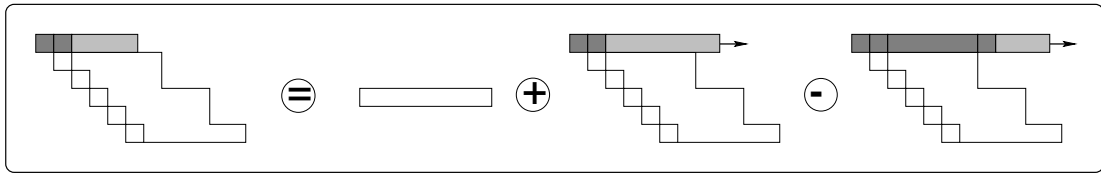
On introduit alors  $L_n(u) = L_n(u, y, q)$ , la série génératrice des polyominos *FGD* dont la base (en foncé dans la figure 2.5) a largeur  $n$ , en les variables  $u, y$  et  $q$  correspondant au nombre de cellules dans la rangée la plus élevée, à la hauteur et à l'aire respectivement.

$L_n(u)$  peut être définie récursivement par l'équation fonctionnelle suivante (la récursion est aussi illustrée dans la figure 2.6):

$$L_n(u) = u^n y q^n + \frac{y u^2 q^2}{1 - uq} (L_n(1) - L_n(uq)). \tag{2.18}$$

La série génératrice  $L(u)$  des tous le polyominos  $FGD$  est simplement la somme sur toutes les largeurs possibles de base,

$$L(u) = \sum_{n \geq 1} L_n(u). \tag{2.19}$$



**Figure 2.6** Construction récursive des polyominos  $FGD$ , en ajoutant des rangées successivement.

De plus, puisque les polyominos de Dyck sont les polyominos  $FGD$  de base unitaire, leur série génératrice  $D(y, q)$  selon leur hauteur et leur aire est donnée par

$$D(y, q) = L_1(1, y, q). \tag{2.20}$$

Un application directe du lemme 2.3 (Bousquet-Mélou, 1996a) (M. Bousquet-Mélou) permet de trouver la solution de l'équation fonctionnelle (2.18). Comme on n'a pas besoin de la variable  $u$  (largeur de la rangée du dessus) pour la suite, on la pose égale à 1, ce qui simplifie l'expression pour la série génératrice.

**PROPOSITION 2.6** *La série génératrice selon l'aire et la hauteur  $L_n(1, y, q)$  des polyominos  $FGD$  ayant une base de largeur  $n$  est*

$$L_n(1, y, q) = \frac{\sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m y^{m+1} q^{(m+n)(m+1)}}{(q)_m}}{\sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m y^m q^{m(m+1)}}{(q)_m}}. \tag{2.21}$$

■

Pour  $n = 1$ , on obtient

$$D(y, q) = \frac{\sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m y^{m+1} q^{(m+1)^2}}{(q)_m}}{\sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m y^m q^{m(m+1)}}{(q)_m}} \quad (2.22)$$

pour la série génératrice selon l'aire et la hauteur des polyominos de Dyck. Toutefois, on peut aussi exprimer  $D(y, q)$  en utilisant le  $q$ -analogue classique des nombres de Catalan,  $c_n(q)$ , défini par la récurrence

$$c_n(q) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k c_k(q) c_{n-1-k}(q), \quad (2.23)$$

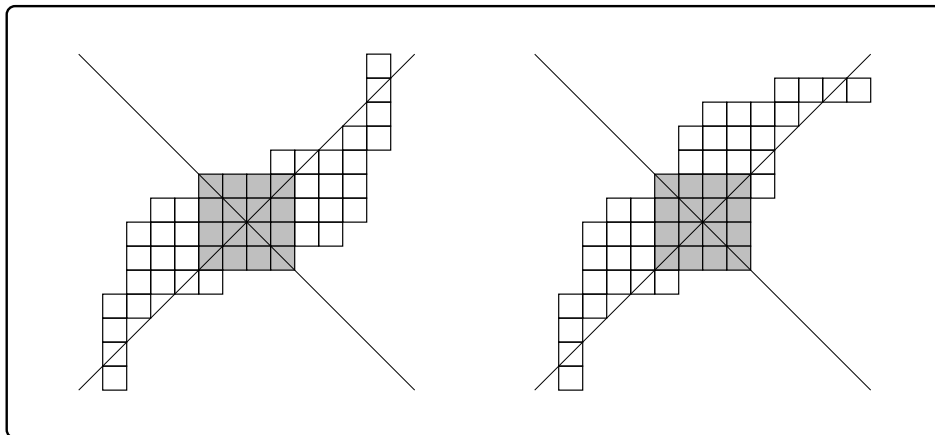
car il est bien connu que ce  $q$ -analogue énumère selon l'aire les chemins de Dyck de longueur  $2n$ . L'aire d'un chemin de Dyck dont il est question ici est le nombre de cellules sous le chemin et strictement au-dessus de la diagonale qui le supporte (les cellules sur la diagonale ne sont pas comptées dans l'aire). Pour obtenir un polyomino de Dyck d'un chemin de Dyck, il faut donc ajouter les cellules sur la diagonale. Si la longueur du chemin est  $2n$ , un facteur  $q^n$  doit ainsi être ajouté. Mais ce n'est pas suffisant car un chemin de Dyck peut toucher la diagonale, auquel cas on n'aurait pas la connexité par côtés. Alors une autre diagonale de cellules doit être ajoutée; pour un chemin de longueur  $2n$ ,  $n + 1$  cellules supplémentaires devront ainsi être additionnées, pour une contribution de  $q^{n+1}$  à l'aire. Cette dernière diagonale de cellules ajoute aussi une unité de hauteur au polyomino. On a donc

$$D(y, q) = \sum_{n \geq 1} y^n q^{2n-1} c_{n-1}(q). \quad (2.24)$$

### Symétrie réflexionnelle selon la première diagonale

Il y a une belle bijection préservant l'aire entre les parallélogrammes  $d_1$ -symétriques d'un demi-périmètre donné et les parallélogrammes  $r^2$ -symétriques avec ce même demi-périmètre. Comme le rectangle minimal d'un parallélogramme  $d_1$ -symétrique est forcément un carré, son périmètre est un multiple de 4, et donc son demi-périmètre est pair.





**Figure 2.7** Bijection entre les parallélogrammes  $r^2$ -symétriques et les parallélogrammes  $d_1$ -symétriques de même demi-périmètre.

Donc on aura

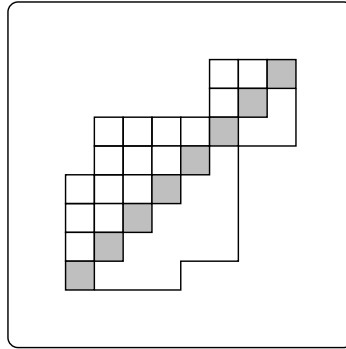
$$D_1(x, y, q) = \sum_{k \geq 0} r_{2k}(q) t^{2k}, \quad (2.25)$$

où  $D_1(x, y, q)$  est la série génératrice des polyominos parallélogrammes  $d_1$ -symétriques et où les  $r_{2k}(q)$  sont définis par (2.17). La bijection est illustrée sur un exemple dans la figure 2.7, et se définit comme suit: un parallélogramme  $r^2$ -symétrique possède un centre de rotation. Pour un parallélogramme de demi-périmètre pair, ce centre soit se trouvera dans le centre d'une cellule (si à la fois la hauteur et la largeur sont impairs), soit sera le coin commun à quatre cellules formant un carré (si à la fois la hauteur et la largeur sont pairs). Dans les deux cas, on considère la première diagonale (une droite parallèle à la bissectrice du second quadrant du plan cartésien) passant par le centre de rotation et la région sous la seconde diagonale passant par le centre de rotation (voir figure 2.7). Cette région n'est pas un polyomino, mais le parallélogramme  $r^2$ -symétrique initial est obtenu de cette région en lui collant une copie d'elle-même tournée de  $180^\circ$  de sorte à ce qu'il n'y ait pas de "demi-cellules" dans le résultat final (la position de collage est clairement unique). Supposons maintenant qu'au lieu de tourner une copie de cette région on la réfléchisse par rapport à la première diagonale, puis qu'on la colle de sorte qu'il n'y ait pas de demi-cellules; alors on obtient clairement un parallélogramme  $d_1$ -

symétrique qui aura le même demi-périmètre et la même aire que le parallélogramme  $r^2$ -symétrique initial. Par ailleurs, le processus est réversible: on peut commencer avec un parallélogramme  $d_1$ -symétrique arbitraire et lui faire correspondre un parallélogramme  $r_2$ -symétrique.

### Symétrie réflexionnelle selon la seconde diagonale

On considère maintenant les polyominos parallélogrammes  $d_2$ -symétriques, c'est-à-dire les parallélogrammes laissés invariants par une réflexion par rapport à la seconde diagonale. La figure 2.8 présente un exemple d'un tel parallélogramme. On note tout d'abord que le rectangle minimal d'un parallélogramme  $d_2$ -symétrique est toujours un carré dont le côté est le quart du périmètre du parallélogramme.



**Figure 2.8** Un polyomino parallélogramme  $d_2$ -symétrique.

On observe ensuite qu'un parallélogramme  $d_2$ -symétrique peut se construire à partir de deux copies d'un même polyomino de Dyck dont les diagonales sont collées ensemble (superposées; ce sont les cellules foncées sur la figure 2.8). L'aire de l'objet final sera le double de celle des polyominos de Dyck, moins l'aire de la diagonale qui a été comptée deux fois. On remarque de plus qu'il y a autant de cellules sur la diagonale que la hauteur du polyomino de Dyck, et que la largeur de l'objet final sera aussi la hauteur du polyomino de Dyck. On trouve donc la proposition suivante:

**PROPOSITION 2.7** *La série génératrice  $D_2(x, y, q)$  des polyominos parallélogrammes  $d_2$ -*

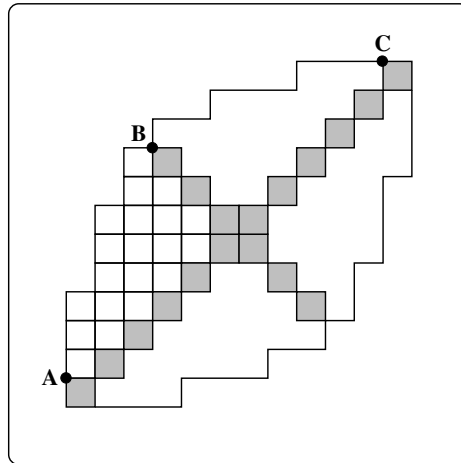
*symétriques est donnée par*

$$D_2(x, y, q) = D\left(\frac{xy}{q}, q^2\right). \quad (2.26)$$

■

### Symétrie réflexionnelle selon les deux diagonales

Le dernier sous-groupe (non-cyclique) dont on énumérera l'ensemble des points fixes est le groupe entier  $\mathfrak{D}_2$  lui-même. Ce groupe est engendré par n'importe quels deux éléments non triviaux, mais il est pratique de prendre comme générateurs les deux symétries diagonales. On peut alors caractériser simplement la région fondamentale d'un polyomino parallélogramme  $\mathfrak{D}_2$ -symétrique, comme le montre la figure 2.9.



**Figure 2.9** Un polyomino parallélogramme  $\mathfrak{D}_2$ -symétrique.

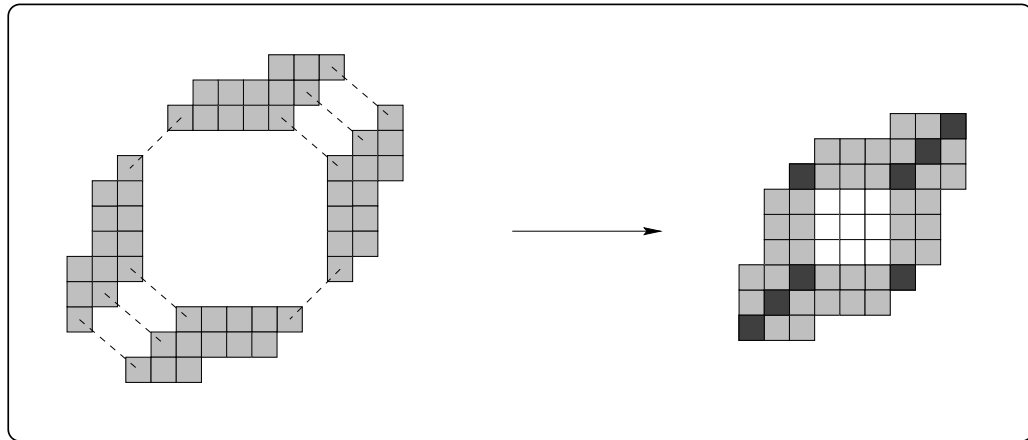
On note d'abord que le rectangle minimal d'un parallélogramme  $\mathfrak{D}_2$ -symétrique  $P$  est un carré. On observe aussi que le chemin extérieur allant de **A** à **C** (voir figure 2.9) est un chemin de Dyck qui a la propriété additionnelle d'être symétrique par rapport à la première diagonale passant par le centre de  $P$  (en d'autres termes, le mot de Dyck en  $x$  et  $\bar{x}$  associé au chemin de Dyck est un palindrome). On voit donc que  $P$  est complètement déterminé par "la moitié" d'un chemin de Dyck (le chemin allant de **A** à

**B** sur la figure). Si  $P$  est de demi-périmètre  $2k$  (son demi-périmètre est nécessairement pair puisque le rectangle minimal est un carré), alors le chemin  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$  est un chemin de Dyck symétrique de longueur  $2k - 2$ , et le chemin  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  est simplement un facteur gauche de longueur  $k - 1$  d'un chemin de Dyck. On a donc le résultat suivant:

PROPOSITION 2.8 *Le nombre de polyominos parallélogrammes  $\mathfrak{D}_2$ -symétriques de demi-périmètre  $2k + 2$  est donné par*

$$d_{2k+2}^{(1,2)}(1) = \begin{cases} \binom{k}{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2} \binom{k+1}{(k+1)/2} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \quad (2.27)$$

PREUVE Voir le corollaire 2.3. ■



**Figure 2.10** Construction d'un polyomino parallélogramme  $\mathfrak{D}_2$ -symétrique à partir de 4 copies d'un polyomino  $FGD$ .

On obtient la série génératrice selon l'aire et le demi-périmètre des parallélogrammes  $\mathfrak{D}_2$ -symétriques en les construisant à partir de 4 copies d'un polyomino  $FGD$ , comme l'illustre la figure 2.10. Certaines cellules doivent être superposées (les cellules foncées sur la figure) et d'autres doivent être ajoutées (le carré de cellules blanches au milieu); on devra en tenir compte lorsqu'on calculera l'aire de l'objet final. Si le polyomino  $FGD$  a aire  $A$ , hauteur (nombre de cellules sur la diagonale)  $d$  et base de largeur  $n$ , on trouve

que l'aire du parallélogramme  $\mathfrak{D}_2$ -symétrique obtenu par collage est  $4A - 2d + (n-2)^2 - 2$ , alors que son demi-périmètre est donné par  $2n + 4(d-1)$ . On a donc la proposition suivante:

PROPOSITION 2.9 *La série génératrice selon le demi-périmètre et l'aire  $D_{1,2}(t, q)$  des polyominos parallélogrammes  $\mathfrak{D}_2$ -symétriques est donnée par*

$$D_{1,2}(t, q) = t^2q + \sum_{n \geq 2} t^{2n-4} q^{n^2-4n+2} L_n\left(1, \frac{t^4}{q^2}, q^4\right) \quad (2.28)$$

où  $L_n(u, x, q)$  est la série génératrice des polyominos FGD avec base de largeur  $n$ . ■

COROLLAIRE 2.10

$$D_{1,2}(t, q) = t^2q + \frac{\sum_{n \geq 2} \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m t^{4m+2n} q^{4m^2+2m+4mn+n^2}}{(q^4)_m}}{1 - t^4 q^6 \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m t^{4m} q^{4m^2+10m}}{(q^4)_{m+1}}}. \quad (2.29)$$

PREUVE Ceci découle de l'équation (2.21). ■

Voici les premiers termes du développement de  $D_{1,2}(t, q)$ :

$$D_{1,2}(t, q) = t^2q + t^4q^4 + t^6q^7 + t^6q^9 + t^8q^{10} + t^8q^{14} + t^8q^{16} + t^{10}q^{13} + t^{10}q^{15} + \dots$$

### 2.4.3 Polyominos parallélogrammes à symétries près

Toutes les composantes nécessaires à l'énumération des polyominos parallélogrammes à symétries près ont maintenant été calculées. On pourra donc dénombrer les parallélogrammes à rotations et réflexions près en utilisant la formule (2.1) (lemme de Burnside) avec  $G = \mathfrak{D}_2$  et  $\mathcal{P} = \mathbb{P}$ , la classe de tous les polyominos parallélogrammes:

$$|\mathbb{P}/\mathfrak{D}_2|_w = \frac{1}{4} \sum_{g \in \mathfrak{D}_2} |\text{Fix}(g)|_w, \quad (2.30)$$

où  $|\text{Fix}(g)|_w$  est la série génératrice selon le demi-périmètre et l'aire des polyominos  $g$ -symétriques. On obtient donc:

PROPOSITION 2.11 *La série génératrice selon le demi-périmètre et l'aire  $(\mathbb{P}/\mathfrak{D}_2)(t, q)$  des polyominos parallélogrammes à symétries près est donnée par*

$$(\mathbb{P}/\mathfrak{D}_2)(t, q) = |\mathbb{P}/\mathfrak{D}_2|_w = \frac{1}{4} \left( \mathbb{P}(1, t, t, q) + R_2(t, t, q) + D_1(t, t, q) + D_2(t, t, q) \right). \quad (2.31)$$

■

Voici les quelques premiers termes de  $(\mathbb{P}/\mathfrak{D}_2)(t, q) = \sum_{k \geq 0} \tilde{p}_k(q) t^k$ :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2(q) &= q \\ \tilde{p}_3(q) &= q^2 \\ \tilde{p}_4(q) &= q^4 + 2q^3 \\ \tilde{p}_5(q) &= q^6 + q^5 + 3q^4 \\ \tilde{p}_6(q) &= q^9 + 2q^8 + 3q^7 + 4q^6 + 6q^5 \end{aligned}$$

#### 2.4.4 Polyominos parallélogrammes asymétriques

Il est aussi possible d'énumérer les polyominos parallélogrammes asymétriques, c'est-à-dire les parallélogrammes n'ayant aucune symétrie, en utilisant l'inversion de Möbius dans le treillis des sous-groupes de  $\mathfrak{D}_2$  (voir section 2.3).

Le lecteur est renvoyé à (Rota, 1964) pour une discussion générale de l'inversion de Möbius, et à (Leroux, Rassart et Robitaille, 1998) pour voir comment elle s'applique à l'énumération des polyominos convexes asymétriques. On trouve:

PROPOSITION 2.12 *La série génératrice selon le demi-périmètre et l'aire  $\overline{\mathbb{P}}(t, q) = F_{=0}$  des polyominos parallélogrammes asymétriques est donnée par*

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}(t, q) &= F_{\geq 0} - F_{\geq \langle r^2 \rangle} - F_{\geq \langle d_1 \rangle} - F_{\geq \langle d_2 \rangle} + 2F_{\geq \langle d_1, d_2 \rangle} \\ &= \mathbb{P}(1, t, t, q) - R_2(t, t, q) - D_1(t, t, q) - D_2(t, t, q) + 2D_{1,2}(t, t, q). \quad (2.32) \end{aligned}$$

■

Voici les quelques premiers termes de  $\bar{\mathbb{P}}(t, q) = \sum_{k \geq 0} \bar{p}_k(q) t^k$ :

$$\begin{aligned} \bar{p}_2(q) = \bar{p}_3(q) = \bar{p}_4(q) &= 0 \\ \bar{p}_5(q) &= 4q^5 + 4q^4 \\ \bar{p}_6(q) &= 8q^7 + 8q^6 + 8q^5 \\ \bar{p}_7(q) &= 4q^{11} + 8q^{10} + 20q^9 + 24q^8 + 32q^7 + 24q^6 \end{aligned}$$

On note aussi que la même méthode permettrait aussi l'énumération des polyominos parallélogrammes ayant exactement les symétries d'un sous-groupe donné de  $\mathfrak{D}_2$ .

#### 2.4.5 Comportement asymptotique

On montre ici un résultat sur l'asymptotique des polyominos parallélogrammes, à savoir que lorsque l'aire ou le demi-périmètre devient grand, presque tous les polyominos parallélogrammes sont asymétriques. En d'autres mots, la probabilité qu'un polyomino parallélogramme ait au moins une symétrie tend vers zéro quand son aire ou son demi-périmètre tend vers l'infini.

On trouve dans les travaux de Pólya (Pólya, 1969) que le nombre de polyominos parallélogrammes de demi-périmètre  $n$  est donné par

$$p_n^{(t)} = c_{n-1} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}}. \quad (2.33)$$

Pour l'aire, on a le résultat suivant de Bender:

**PROPOSITION 2.13 (Bender (Bender, 1974))** *Soit  $p_n^{(q)}$  le nombre de polyominos parallélogrammes d'aire  $n$ . Alors*

$$p_n^{(q)} \sim k \mu^n, \quad (2.34)$$

avec

$$k = 0.29745 \dots \quad \mu = 2.30913859330 \dots$$

■

PROPOSITION 2.14 Soit  $H$  un sous-groupe (différent de  $\langle 1 \rangle$ ) de  $\mathfrak{D}_2$  et soit  $P_H^{(q)}(n)$  (resp.  $P_H^{(t)}(n)$ ) le nombre de polyominos parallélogrammes  $H$ -symétriques d'aire (resp. de demi-périmètre)  $n$ . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_H^{(q)}(n)}{p_n^{(q)}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_H^{(t)}(n)}{p_n^{(t)}} = 0. \quad (2.35)$$

PREUVE La preuve de la proposition en ce qui a trait au demi-périmètre découle immédiatement des formes closes trouvées pour tous les coefficients. On peut donc vérifier que les limites sont zéro explicitement.

Pour l'aire, on remarque qu'il suffit de considérer les polyominos parallélogrammes  $r^2$ -symétriques et  $d_2$ -symétriques puisque les parallélogrammes  $d_1$ -symétriques sont en bijection avec une sous-classe des  $r^2$ -symétriques, et que les parallélogrammes  $\mathfrak{D}_2$ -symétriques forment une sous-classe de toutes les autres classes de symétries.

La même approche de preuve fonctionne pour les parallélogrammes  $r^2$ -symétriques et  $d_2$ -symétriques, qui utilise le fait que ces polyominos peuvent être construits de deux sous-polyominos congrus. Une colonne supplémentaire doit quelquefois être ajoutée dans le case des parallélogrammes  $r^2$ -symétriques, selon que la largeur du parallélogramme initial est paire ou impaire. Ces sous-polyominos sont des parallélogrammes dans tous les cas et ont au plus la moitié de l'aire de l'objet initial.

- **Polyominos parallélogrammes  $r^2$ -symétriques :** Un polyomino parallélogramme  $r^2$ -symétrique de largeur paire et d'aire  $n$  se construit de deux sous-parallélogrammes congrus d'aire  $n/2$ , qui peuvent être collés ensemble d'au plus  $n/2$  façons (la hauteur maximale des colonnes de contact). Alors  $P_{r^2}^{(q),\text{pair}}(n) \leq \frac{1}{2} n p_{n/2}^{(q)}$ , et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{r^2}^{(q),\text{pair}}(n)}{p_n^{(q)}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} n k \mu^{n/2}}{k \mu^n} = 0.$$

On considère ensuite en polyomino parallélogramme  $r^2$ -symétrique de largeur impaire et d'aire  $n$ . Ce parallélogramme est composé d'une colonne centrale



( $n$  choix pour sa hauteur) à laquelle sont collés deux sous-parallélogrammes congrus d'aire au plus  $\lfloor n/2 \rfloor$ , et qui peuvent être collés d'au plus  $n$  manières différentes à cette colonne (ils sont collés symétriquement). On a donc  $P_{r^2}^{(q), \text{impair}}(n) \leq n^2(1 + p_1^{(q)} + p_2^{(q)} + \dots + p_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(q)}) < n^3 p_{\lfloor n/2 \rfloor}^{(q)}$  et le résultat s'ensuit comme ci-dessus. Ainsi, le résultat tient pour le sous-groupe  $\langle r^2 \rangle$ ;

- **Polyominos parallélogrammes  $d_2$ -symétriques :** Soit  $P$  un parallélogramme  $d_2$ -symétrique et  $Q$  sa région fondamentale. On suppose que  $P$  a  $b$  cellules sur l'axe de symétrie diagonal. Alors l'aire minimale que  $P$  peut avoir est  $b + 2(b - 1)$ . Ceci donne une aire minimale de  $b + (b - 1)$  pour  $Q$ . On a donc

$$\frac{\text{Aire de } Q_{\min}}{\text{Aire de } P_{\min}} = \frac{2b - 1}{3b - 2}.$$

Si on ajoute ensuite une cellule à  $Q$  qui n'est pas sur la diagonale, deux cellules sont ajoutées à  $P$ , et on conclut que la proportion entre l'aire de  $Q$  l'aire de  $P$  ne peut que diminuer quand on transforme  $P$  en un plus grand parallélogramme  $d_2$ -symétrique en conservant le nombre de cellules diagonales  $b$ . On remarque que pour  $b \geq 2$ , la proportion sera plus petite que  $3/4$ . Comme approximation grossière, on peut considérer que  $Q$  est n'importe quel polyomino parallélogramme d'aire au plus  $\lceil 3n/4 \rceil$ . Aussi, pour  $n > 1$ ,  $P$  aura nécessairement plus d'une cellule sur sa diagonale. On obtient donc que  $P_{d_2}(n) \leq 1 + p_1^{(q)} + p_2^{(q)} + \dots + p_{\lceil 3n/4 \rceil}^{(q)} \leq n p_{\lceil 3n/4 \rceil}^{(q)}$ , et on aura aussi le résultat pour le sous-groupe  $\langle d_2 \rangle$ . ■

PROPOSITION 2.15 *Si on note par  $\bar{p}_n^{(q)}$  (resp.  $\bar{p}_n^{(t)}$ ) le nombre de polyominos parallélogrammes asymétriques d'aire (resp. de demi-périmètre)  $n$ , alors*

$$\bar{p}_n^{(q)} \sim p_n^{(q)}, \quad (2.36)$$

$$\bar{p}_n^{(t)} \sim p_n^{(t)}. \quad (2.37)$$

PREUVE Ce résultat découle directement de l'équation (2.32) et de la proposition précédente. ■

---

Deux tables peuvent être trouvées en annexe, qui présentent les nombres de polyominos parallélogrammes selon leurs types de symétries et leur aire et demi-périmètre. Les colonnes indicées par des sous-groupes de  $\mathfrak{D}_2$  donnent les nombres de polyominos parallélogrammes d'une aire ou d'un demi-périmètre donné qui sont laissés invariants par les symétries du sous-groupe. Les colonnes  $\# \textit{Orbites}$  et  $\textit{Asym}$  donnent respectivement le nombre de parallélogrammes à symétries près et le nombre de parallélogrammes asymétriques d'une taille donnée.

## CHAPITRE III

### CHEMINS AUTOÉVITANTS DIRIGÉS ET CHEMINS AUTOÉVITANTS À MÉMOIRE FINIE

#### 3.1 Introduction

L'énumération des chemins autoévitant (ou ne se coupant pas) dans  $\mathbb{Z}^d$  demeure un problème ouvert en physique statistique depuis plusieurs décennies. Le problème a été introduit par Kuhn en 1934 (Lehman et Weiss, 1958) dans l'étude des polymères. L'ensemble de ce qui est connu à ce jour peut être trouvé dans le livre *The Self-Avoiding Walk* de Madras et Slade (Madras et Slade, 1993). En particulier, il est conjecturé que le nombre  $c_n$  de chemins autoévitant de longueur  $n$  (débutant à l'origine) et leur rayon carré moyen  $\langle |\omega(n)|^2 \rangle$  sont donnés asymptotiquement par

$$\begin{aligned}c_n &\sim A\mu^n n^{\gamma-1} \\ \langle |\omega(n)|^2 \rangle &\sim Bn^{2\nu}\end{aligned}$$

où les constantes  $\mu$ ,  $\gamma$  et  $\nu$  dépendent de la dimension  $d$  du réseau ( $\mu$  est connue comme la *constante de connectivité*,  $\gamma$  et  $\nu$  sont des *exposants critiques*). Pour  $d = 2$ , la conjecture est que  $\gamma = 43/32$ , et  $\mu$  est estimée valoir  $2.6381585 \pm 0.0000010$ . La forme asymptotique pour  $c_n$  découle de la preuve par Hammersley (Hammersley, 1957) de l'existence d'une constante  $\mu$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{1/n} = \mu.$$

Il est facile de voir que la forme asymptotique pour le rayon carré moyen ne peut pas comporter une croissance exponentielle: le rayon des chemins croîtrait alors plus vite que leur longueur.

Des classes restreintes de chemins autoévitant ont été énumérées, en particulier celle des chemins autoévitant à mémoire finie, c'est-à-dire des chemins qui ne se recoupent pas sur une plage d'une longueur finie donnée (les "vrais" chemins autoévitant sont ceux à mémoire infinie). L'idée d'étudier les chemins à mémoire finie semble originer de Sykes, et a été reprise par de nombreux chercheurs. Montroll (Montroll, 1950), avec des chaînes de Markov, a étudié jusqu'à mémoire 4 les chemins autoévitant ne pouvant pas faire deux pas consécutifs dans une même direction, et a obtenu que le rayon carré moyen, pour toute mémoire finie, serait de la forme

$$\langle r_n^2 \rangle = An + B + \sum_j c_j e^{-nd_j}$$

où  $A$ ,  $B$ , les  $d_j$  et les  $c_j$  sont des constantes. Les résultats de Montroll ont par la suite été étendus par Frisch, Collins et Friedman (Frisch, Collins et Friedman, 1951) jusqu'à mémoire 12 (pour la même classe de chemins).

L'énumération de ces chemins permet de donner des bornes supérieures sur le comportement asymptotique de  $c_n$  et  $\langle |\omega(n)|^2 \rangle$ . Noonan (Noonan, 1997) et Noonan et Zeilberger (Noonan et Zeilberger, 1998) ont étudié ces chemins en faisant appel à la technique de Goulden-Jackson pour l'énumération de mots évitant certains motifs. Noonan a trouvé des bornes supérieures plus fines pour les constantes de connectivité de chemins autoévitant dans les réseaux hypercubiques de dimensions 2, 3, 4, 5 et 6 (les bornes précédentes étaient détenues par Alm (Alm, 1993)). Il trouve aussi les fonctions génératrices explicitement jusqu'à mémoire 8. Le cas de deux unités de mémoire dans  $\mathbb{Z}^d$  (pour les chemins qui n'ont pas de pas inverses consécutifs) est aussi présenté comme exemple d'un calcul utilisant le développement en lacets (*lace expansion* dans (Madras et Slade, 1993)), où des expressions explicites sont trouvées à la fois pour le nombre de chemins et leur rayon carré moyen. Fisher et Sykes (Fisher et Sykes, 1959) ont trouvé les constantes de connectivité (quelle que soit la dimension) pour les che-

mins de mémoire 4, de façon exacte comme racines de polynômes, et les constantes de connectivité dans le réseau carré jusqu'à mémoire 12 en analysant les rapports de termes successifs pour les premiers termes des séries génératrices.

Une autre classe restreinte de chemins autoévitant est celle où les chemins sont restreints à des bandes du plan discret  $\mathbb{Z}^2$ . D. Zeilberger (Zeilberger, 1996) a énuméré les chemins autoévitant dans une bande de hauteur 1 ( $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$ ), et J. Labelle dans la bande de hauteur 2 (Labelle, 1998). Zeilberger et Labelle ont tous deux utilisé une méthode de décomposition, consistant à briser les chemins autoévitant en “facteurs irréductibles”. Les chemins autoévitant dans des bandes de hauteur finie ont aussi été étudiées asymptotiquement par Klein dans (Klein, 1980) avec des matrices génératrices (de transfert). Alm et Janson (Alm et Janson, 1990) ont dégagé des résultats importants dans la génération aléatoire et l'énumération de chemins autoévitant dans les réseaux unidimensionnels (une généralisation des bandes de hauteur finie dans le plan discret), aussi avec des matrices de transfert.

Dans les sections qui suivent, la méthode des matrices de transfert est utilisée pour étendre ces résultats. La méthode est d'abord présentée sur la classe des chemins autoévitant dirigés dans le plan discret (l'une des quatre directions est interdite) et vient reformuler et généraliser des résultats connus depuis longtemps des gens en physique statistique (voir, par exemple, (Brak, Guttmann et Whittington, 1992)). Les définitions utilisées seront celles introduites par L. K. Williams dans (Williams, 1996). Ces résultats portent sur l'énumération des chemins, et la généralisation introduite permet d'obtenir à la fois les nombres de chemins et leurs rayons carrés moyens. Finalement, on montre que les matrices de transfert peuvent aussi être utilisées pour obtenir le rayon carré moyen des chemins autoévitant à mémoire finie.

### 3.1.1 Définitions

DÉFINITION 14 *Un chemin autoévitant de longueur  $n$  dans  $\mathbb{Z}^d$  est une suite de points  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$  de  $\mathbb{Z}^d$  telle que si*

$$z_i = (z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,d})$$

alors

$$\sum_{k=1}^d |z_{i,k} - z_{i+1,k}| = 1 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$$

et

$$z_i \neq z_j \quad \forall i, j, \quad i \neq j.$$

En d'autres termes, un chemin autoévitant dans  $\mathbb{Z}^d$  est un chemin avec des pas unitaires sur le réseau, qui ne se recoupe pas lui-même. Ici, la distance utilisée est la distance euclidienne.

Comme on considère généralement ces chemins à translations près, on requiert que le point de départ des chemins soit l'origine ( $z_0 = (0, 0, \dots, 0)$ ).

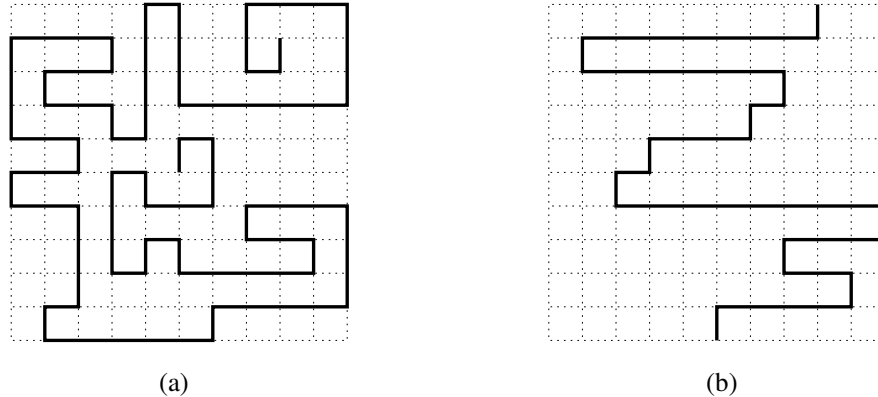
Un *chemin autoévitant dirigé* est un chemin autoévitant dans  $\mathbb{Z}^2$  qui ne contient pas de pas vers le bas (sud).

Un *polygone autoévitant* est un chemin autoévitant revenant à son point de départ avec le dernier pas.

La figure 3.1 illustre un chemin autoévitant et un chemin autoévitant dirigé.

## 3.2 Chemins autoévitants dirigés

Les chemins autoévitants dirigés (CAD) ont été introduits comme un cas simple de chemins autoévitants dans le plan discret dans lequel le mouvement dans l'une des quatre directions (typiquement, le "bas") est interdit. Ils ont été étudiés, entre autres, par Brak, Guttmann et Whittington (Brak, Guttmann et Whittington, 1992) et par



**Figure 3.1** (a) Chemin autoévitant; (b) chemin autoévitant dirigé (dans  $\mathbb{Z}^2$ ).

Williams (Williams, 1996); la série génératrice de ces chemins est connue depuis longtemps. Williams considère aussi les CAD de largeur bornée (des fonctions génératrices sont données jusqu'à largeur 9 dans (Williams, 1996)) en utilisant une méthode de décomposition analogue à celle utilisé par Zeilberger pour énumérer les chemins autoévitants dans une bande de hauteur 1, et donne une méthode pour passer récursivement de la largeur  $n$  à la largeur  $n + 1$ . Ses résultats comprennent aussi des formules pour le cas sans bornes sur la largeur, pour longueur et hauteur fixées, et une formule donnant la hauteur moyenne pour les CAD de longueur  $n$  dans la bande de largeur 1. Brak, Guttmann et Whittington donnent quant à eux une série génératrice tenant compte des interactions entre sommets voisins.

Le problème d'énumérer les CAD de largeur fixée a une solution très élégante en termes de matrices de transfert, qui permet en plus une énumération plus fine: plus de paramètres peuvent être incorporés aux matrices. On considérera les chemins commençant avec un pas vers le haut dans la bande  $[1, n]$  (c.-à.-d.  $[1, n] \times \mathbb{R}$ ).

On note qu'un tel chemin est complètement caractérisé par les points sur les lignes horizontales du réseau où le chemin saute à la ligne juste au dessus (voir figure 3.2).

Pour la largeur  $n - 1$ , il y a  $n$  configurations, données par les positions des points





On a alors le résultat plus général:

PROPOSITION 3.1 *La série génératrice des chemins autoévitant dirigés dans la bande de largeur  $n - 1$  débutant en position  $k$  est donnée par*

$$U_{n-1}(k; x, y, t) = \sum_{i=1}^n x^{i-k} t^{|i-k|} \sum_{j=1}^n U_{n-1,i,j}^{\uparrow}(x, y, t). \quad (3.3)$$

PREUVE Un CAD dans la bande  $[1, n]$  débutant en position  $k$  peut quitter la première ligne horizontale en n'importe laquelle des  $n$  positions possibles. S'il quitte cette ligne en position  $i$ , une correction  $x^{i-k} t^{|i-k|}$  doit être ajoutée au poids pour la distance horizontale parcourue entre les positions  $k$  et  $i$ . Ceci explique la première somme sur toutes les positions possibles pour  $i$ . Après avoir quitté la première ligne, le CAD est simplement un CAD commençant avec un pas  $\uparrow$  débutant en position  $i$  et se terminant en une certaine position  $j$ . Ces chemins sont énumérés par  $U_{n-1,i,j}^{\uparrow}(x, y, t)$ . Finalement, comme on ne veut pas spécifier la position finale, on prend la somme sur tous les cas possibles (deuxième somme). ■

Des puissances négatives de  $x$  peuvent apparaître dans le développement en série de  $U_{n-1}(k; x, y, t)$ . Un terme de ce développement pourrait être  $y^{10} t^{50} / x^2$  (qui correspondrait par exemple à l'image miroir du CAD de la figure 3.2), ce qui signifie qu'il y a un CAD de hauteur 10, de longueur 50 qui se termine en un point deux lignes verticales à gauche de son point de départ).

NOTE Pour la largeur  $n - 1$ , lorsqu'on veut calculer la série génératrice des chemins autoévitant dirigés, on doit inverser une matrice  $n \times n$ . Si on ne considère que la longueur (spécialisation  $x = y = 1$ ), on peut trouver les séries génératrices jusqu'à largeur 20 en quelques secondes seulement; en gardant tous les paramètres, le calcul est un peu plus long, mais pas beaucoup. Aussi, les séries génératrices seront clairement rationnelles en toutes les variables, quelle que soit la largeur.

Comme le paramètre hauteur (l'exposant de la variable  $y$ ) apparaît dans la série génératrice, on peut aisément calculer la hauteur moyenne  $\langle \mathcal{H}(n, m) \rangle$  des CAD de longueur

$m$  dans la bande  $[1, n] \times \mathbb{R}$  simplement en dérivant par rapport à  $y$ :

$$\langle \mathcal{H}(n, m) \rangle = \frac{[t^m] \left( \frac{\partial}{\partial y} U_n(1, y, t) \Big|_{y=1} \right)}{[t^m] U_n(1, 1, t)},$$

où  $U_n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n U_n(k; x, y, t)$  est la série génératrice des CAD dans  $[1, n] \times \mathbb{R}$ .

Similairement, il y a un opérateur différentiel qui donne la distance carrée totale entre les points de départ et d'arrivée d'un CAD. La distance carrée totale est la somme du carré de l'exposant de  $x$  et du carré de l'exposant de  $y$  dans le poids du chemin considéré (et donc le carré de la distance euclidienne entre son point de départ et son point d'arrivée). On considère le poids (la fraction rationnelle)  $Ax^h y^k$  ( $h$  et  $k$  peuvent être négatifs). Alors

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{x=y=1} Ax^h y^k = A(h^2 + y^2).$$

On a donc la proposition suivante:

**PROPOSITION 3.2** *Le rayon carré moyen  $\langle |\omega(m)|^2 \rangle_n$  pour les chemins autoévitant dirigés  $\omega$  de largeur au plus  $n$  et de longueur  $m$  est donné par*

$$\langle |\omega(m)|^2 \rangle_n = \frac{[t^m] \left( \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{x=y=1} U_n(x, y, t)}{[t^m] U_n(1, 1, t)}. \quad (3.4)$$

■

On peut aussi trouver le rayon carré moyen et la hauteur moyenne dans le cas où il n'y a pas de limites sur la largeur des chemins autoévitant dirigés, mais on doit d'abord obtenir leur série génératrice. Sans perte de généralité, on peut supposer que ces chemins commencent à l'origine du plan discret. On utilisera la variable  $y$  pour la hauteur (comme ci-dessus), mais deux variables seront maintenant nécessaires pour la largeur:  $x$  pour les déplacements à gauche et  $z$  pour les déplacements à droite (on ne peut plus prendre des puissances positives et négatives d'une seule variable car la somme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n$  n'a pas de forme close).

PROPOSITION 3.3 *La série génératrice  $S(x, z, y)$  des chemins autoévitant dirigés généraux est donnée par*

$$S(x, z, y) = \frac{1 - xz}{1 - x - z - y + xz + xzy}. \quad (3.5)$$

PREUVE Un peu comme la décomposition en configurations plus haut, on peut décomposer un CAD général en facteurs simples. Le premier facteur est un segment de droite horizontal débutant à l'origine et allant à droite ou à gauche. La série génératrice de ces facteurs est

$$\left( \frac{1}{1-x} + \frac{z}{1-z} \right).$$

Le premier terme de la somme donne tous les segments possibles allant à gauche:  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  (on inclut dans cette somme par convention le segment vide 1). Le deuxième terme donne les segments à droite, mais comme on ne veut pas compter le segment vide deux fois, on commence la somme avec  $z$ :  $z + z^2 + z^3 + \dots$ . Tous les autres facteurs des chemins auront la même forme: un pas vertical collé en bas à l'extrémité libre du facteur précédent et collé en haut à un segment horizontal allant à gauche ou à droite. Ces facteurs sont énumérés par

$$y \left( \frac{1}{1-x} + \frac{z}{1-z} \right).$$

La série génératrice des chemins entiers sera alors donnée par

$$\left( \frac{1}{1-x} + \frac{z}{1-z} \right) \sum_{k \geq 0} \left( y \left( \frac{1}{1-x} + \frac{z}{1-z} \right) \right)^k = \frac{\left( \frac{1}{1-x} + \frac{z}{1-z} \right)}{1 - y \left( \frac{1}{1-x} + \frac{z}{1-z} \right)}$$

qui se simplifie en l'expression proposée. ■

NOTE L'information sur la longueur des chemins n'est pas perdue: la série génératrice des CAD généraux selon leur longueur est  $S(t, t, t) = \frac{1-t^2}{1-3t+t^2+t^3}$ , ou, si on veut garder les autres paramètres,  $S(xt, zt, yt)$ .

On peut trouver la hauteur moyenne exactement comme ci-dessus, et le rayon carré moyen en appliquant l'opérateur différentiel

$$\mathfrak{D} = \left( \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) \Big|_{x=y=z=1} \quad (3.6)$$

à  $S(xt, zt, yt)$ , puisque

$$\mathfrak{D} A y^h x^k z^l = A(h^2 + k^2 + l^2 - 2kl) = A(h^2 + (k - l)^2).$$

PROPOSITION 3.4 *Le rayon carré moyen  $\langle |\omega(m)|^2 \rangle$  pour les chemins autoévitant dirigés généraux de longueur  $m$  est donné par*

$$\mathcal{MSD}(m) = \frac{A(m)(1 + \sqrt{2})^m + B(m)(1 - \sqrt{2})^m + 1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})^{m+1} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})^{m+1}} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{1}{16} \left( 2(1 + \sqrt{2})m^2 + 7(2 + \sqrt{2})m - (8 + 5\sqrt{2}) \right) \\ B(m) &= \frac{1}{16} \left( 2(1 - \sqrt{2})m^2 + 7(2 - \sqrt{2})m - (8 - 5\sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

PREUVE On a

$$\mathcal{MSD}(m) = \frac{[t^m] \mathfrak{D} S(xt, zt, yt)}{[t^m] S(t, t, t)} = \frac{[t^m] \frac{t(3 - 7t - t^2 + 9t^3 - 3t^4 - t^5 + t^6 - t^7)}{(1 - 3t + t^2 + t^3)^3}}{[t^m] \frac{1 - t^2}{1 - 3t + t^2 + t^3}}.$$

L'extraction des coefficients de fonctions rationnelles se fait en décomposant celles-ci en fractions partielles. On trouve alors la formule proposée. ■

COROLLAIRE 3.5 *Le rayon carré moyen  $\langle |\omega(m)|^2 \rangle$  pour les chemins autoévitant dirigés généraux de longueur  $m$  est donné asymptotiquement par*

$$\mathcal{MSD}(m) \sim \frac{1}{4} m^2. \quad (3.8)$$

PREUVE Le terme dominant du numérateur de  $\langle |\omega(m)|^2 \rangle$  est  $\frac{1}{8}(1 + \sqrt{2})m^2(1 + \sqrt{2})^m$ , alors que le terme dominant du dénominateur est  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})^{m+1}$  (voir équation (3.7)).

On obtient le résultat en prenant le quotient. ■

NOTE Malgré que les CAD soient effectivement autoévitant, leur propriété “d’autoévitement” est faible. En effet, on peut observer que les chemins autoévitant dirigés sont en bijection avec les marches aléatoires (bornées ou pas) unidimensionnelles (sur  $\mathbb{Z}$ ) avec des pas stationnaires permis, simplement en écrasant les pas verticaux (ou, en commençant d’une marche aléatoire, en ajoutant un pas vertical chaque fois que la marche change de direction). Les chemins autoévitant dirigés sont donc en quelque sorte plus proches d’une représentation bidimensionnelle de marches aléatoires unidimensionnelles que de chemins autoévitant bidimensionnels.

### 3.3 Chemins autoévitant à mémoire finie

Il est connu que les matrices de transfert sont aussi utiles à l’énumération des chemins autoévitant à mémoire finie. La construction standard est la suivante. On prend l’alphabet  $\mathcal{A} = \{N, E, S, W\}$  (correspondant à des pas unitaires dans les directions Nord, Est, Sud et Ouest); on peut alors représenter les chemins débutant à l’origine du plan discret par des mots de  $\mathcal{A}^*$  (le monoïde libre engendré par  $\mathcal{A}$ ). Un chemin  $a_1 a_2 \dots a_n$  sera *autoévitant avec mémoire  $M$*  si tous ses sous-chemins  $a_1 \dots a_M, a_2 \dots a_{M+1}, \dots, a_{n-M+1} \dots a_n$  (i.e. tous ses sous-chemins de longueur  $M$ ) sont autoévitant. Par exemple, deux unités de mémoire interdisent simplement les retours immédiats du chemin sur lui-même, alors qu’aucune ou une unité de mémoire donne les marches aléatoires, et une mémoire  $\infty$  correspond aux chemins autoévitant généraux. La matrice de transfert  $A_M(x, y)$  pour la mémoire  $M$  est indiquée par les chemins autoévitant de longueur  $M - 1$ , plus le chemin vide  $\varepsilon$ . Soient  $t_i = a_1 a_2 \dots a_{M-1}$  et  $t_j = b_1 b_2 \dots b_{M-1}$  deux chemins autoévitant arbitraires de longueur  $M - 1$ . Le poids  $\omega(i, j)$  de la transition  $t_i \rightarrow t_j$  est donné par

$$\omega(i, j) = \begin{cases} \phi(b_{M-1}) & \text{si } a_2 a_3 \dots a_{M-1} = b_1 b_2 \dots b_{M-2} \\ & \text{et } a_1 a_2 \dots a_{M-1} b_{M-1} \text{ est autoévitant,} \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

où  $\phi$  est la fonction  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Q}(x, y)$  définie par

$$\begin{aligned} N &\mapsto y & S &\mapsto 1/y \\ E &\mapsto x & W &\mapsto 1/x \end{aligned}$$

qu'on étend à tout le monoïde  $\mathcal{A}^*$  en posant  $\phi(c_1 c_2 \dots c_n) = \phi(c_1) \phi(c_2) \dots \phi(c_n)$ . Tout ce que ceci veut dire est qu'il y aura une transition si on peut ajouter la lettre (le pas)  $b_{M-1}$  au mot (chemin)  $a_1 \dots a_{M-1}$  pour former un mot (chemin) de  $M$  lettres (pas) qui ne se recoupe pas lui-même, et que le poids de cette transition dépend de la direction du dernier pas ajouté. L'état  $\varepsilon$  est l'état initial, et ne peut pas être atteint après première étape. Ainsi les transitions  $t_i \rightarrow \varepsilon$  ont toutes un poids nul. À cause de la façon dont les configurations s'enchaînent, les chemins engendrés par l'itération de la matrice de transfert commenceront avec une longueur  $M-1$ , alors on doit utiliser  $\varepsilon$  pour initialiser les poids des segments initiaux. On définit donc le poids de la transition  $\varepsilon \rightarrow t_i$  comme  $t^{M-2} \phi(t_i)$  (avec la convention que  $\phi(\varepsilon) = 0$ ). Voici, par exemple, la table de transition pour 3 unités de mémoire:

$\nearrow$	$\varepsilon$	$NN$	$EN$	$WN$	$NE$	$EE$	$SE$	$ES$	$SS$	$WS$	$NW$	$SW$	$WW$
$\varepsilon$	0	$ty^2$	$txy$	$ty/x$	$txy$	$tx^2$	$tx/y$	$tx/y$	$t/y^2$	$t/xy$	$ty/x$	$t/xy$	$t/x^2$
$NN$	0	$y$	0	0	$x$	0	0	0	0	0	$1/x$	0	0
$EN$	0	$y$	0	0	$x$	0	0	0	0	0	$1/x$	0	0
$WN$	0	$y$	0	0	$x$	0	0	0	0	0	$1/x$	0	0
$NE$	0	0	$y$	0	0	$x$	0	$1/y$	0	0	0	0	0
$EE$	0	0	$y$	0	0	$x$	0	$1/y$	0	0	0	0	0
$SE$	0	0	$y$	0	0	$x$	0	$1/y$	0	0	0	0	0
$ES$	0	0	0	0	0	0	$x$	0	$1/y$	0	0	$1/x$	0
$SS$	0	0	0	0	0	0	$x$	0	$1/y$	0	0	$1/x$	0
$WS$	0	0	0	0	0	0	$x$	0	$1/y$	0	0	$1/x$	0
$NW$	0	0	0	$y$	0	0	0	0	0	$1/y$	0	0	$1/x$
$SW$	0	0	0	$y$	0	0	0	0	0	$1/y$	0	0	$1/x$
$WW$	0	0	0	$y$	0	0	0	0	0	$1/y$	0	0	$1/x$

Maintenant que sont définies les matrices de transfert  $A_M(x, y)$ , on peut calculer les séries génératrices des chemins autoévitant à mémoire finie. Les fonctions obtenues seront rationnelles en toutes les variables, mais, lorsque développées en série, des puissances négatives de  $x$  et  $y$  pourront apparaître, puisque les paires

$$(\text{exposant de } x, \text{exposant de } y)$$

sont les coordonnées des points finaux des chemins.

PROPOSITION 3.6 *La série génératrice  $S_M(x, y, t)$  des chemins autoévitant de mémoire  $M$  est donnée par*

$$S_M(x, y, t) = \sum_{j=2}^{d_M} ((I - tA_M(x, y))^{-1})_{1,j} \quad (3.9)$$

où  $d_M$  est le nombre de configurations pour la mémoire  $M$  (un plus le nombre de chemins autoévitant de longueur  $M - 1$ ).

PREUVE L'état initial est  $\varepsilon$  (indiqué par 1), et toutes les configurations autres que  $\varepsilon$  peuvent être finales, alors on prend la somme sur celles-ci. ■

Les variables  $x$  et  $y$  introduites dans les poids des transitions donnent les coordonnées des points finaux des chemins, et on peut utiliser cette propriété pour obtenir le rayon carré moyen des chemins, comme dans le cas des chemins autoévitant dirigés. Le même opérateur différentiel

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{x=y=1}$$

s'applique, et on obtient le résultat suivant:

PROPOSITION 3.7 *Le rayon carré moyen  $\langle |\omega_M(m)|^2 \rangle$  des chemins autoévitant  $\omega_M$  de mémoire finie  $M$  et de longueur  $m$  est donné par*

$$\langle |\omega_M(m)|^2 \rangle = \frac{[t^m] \left( \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{x=y=1} S_M(x, y, t)}{[t^m] S_M(1, 1, t)}. \quad (3.10)$$

■

Pour la mémoire 4, on obtient les séries génératrices suivantes pour les chemins et leur distance de l'origine carrée totale:

$$S_4(1, 1, t) = 4t^3 \frac{3t^2 + 7t + 9}{1 - 2t - 2t^2 - t^3} \tag{3.11}$$

et

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{x=y=1} S_4(x, y, t) = 4t^3 \frac{A(t)}{(1+t)(1-t-t^2)(1-t+t^2)(1-2t-2t^2-t^3)^2} \tag{3.12}$$

où

$$A(t) = 8t^{10} + 41t^9 + 93t^8 + 98t^7 + 34t^6 + 13t^5 + 63t^4 + 36t^3 - 78t^2 - 29t + 41.$$

À partir de ces fractions rationnelles, on peut obtenir le comportement asymptotique de  $\langle |\omega_M(m)|^2 \rangle$ :

$$\langle |\omega_M(m)|^2 \rangle \sim (2.7583185555\dots) m. \tag{3.13}$$

Ceci découle de la théorie pour l'asymptotique des fonctions rationnelles, en ne considérant que les termes dominants (voir la proposition 1.5).

NOTE La méthode présentée ici est moins efficace que celle de Noonan, mais elle a l'avantage de permettre le calcul du rayon carré moyen des chemins. Même en posant  $x = y = 1$ , les matrices de transfert deviennent rapidement très difficiles à inverser, puisque leur taille augmente de façon exponentielle. Une approche alternative, heuristique, consiste à itérer la matrice de sorte à obtenir les premiers termes de la série génératrice. Comme la matrice est relativement vide (seules trois entrées par ligne, au plus, peuvent être non-nulles), il vaut mieux en fait la présenter comme un automate, qui s'itère alors plus facilement (les états de l'automate sont les configurations et les transitions sont données par les entrées non-nulles de la matrice). Comme d'après la théorie des matrices de transfert on s'attend à obtenir une série rationnelle, on peut tenter de reconstruire celle-ci à partir des premiers termes de son développement (en résolvant un système d'équations linéaires ou simplement en utilisant la librairie `gfund` de *Maple*). Ceci ne constitue pas une preuve que la fonction rationnelle ainsi obtenue est



bien celle que l'on cherche, quoique si on pouvait borner le degré des séries en fonction de la mémoire, on pourrait faire une recherche exhaustive et trouver l'unique fonction rationnelle dont le dénominateur a un degré inférieur à la borne, et dont le développement est celui donné. Toutefois, une fois conjecturée une série rationnelle, on peut itérer davantage l'automate pour trouver plus de termes et les comparer avec le développement de la série candidate. Il y a aussi moyen d'inclure de façon simple et efficace dans l'automate l'information sur les coordonnées des points finaux, ce qui fait qu'on peut aussi tenter de reconstruire la série génératrice de la distance à l'origine carrée totale des chemins. Cette technique nous a permis de conjecturer les séries génératrices pour le nombre de chemins jusqu'à mémoire 8, et les séries génératrices pour le rayon carré total jusqu'à mémoire 6.

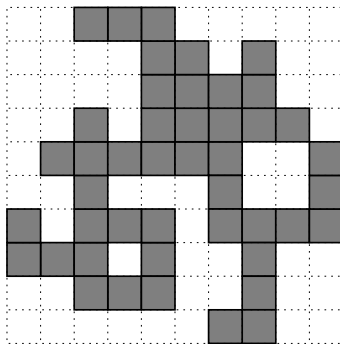
## CHAPITRE IV

### POLYOMINOS GÉNÉRAUX À HAUTEUR BORNÉE

#### 4.1 Introduction

Un problème relié à l'énumération des chemins autoévitant est celui de l'énumération des polyominos généraux dans le réseau carré (aussi un problème ouvert depuis longtemps). Cependant, comme pour les chemins autoévitant, des classes restreintes de polyominos peuvent être étudiées. Les polyominos des sous-classes considérées ont habituellement des propriétés de convexité (certains types de “trous” sont interdits), de direction (la “croissance” des polyominos dans certaines directions est interdite), ou sont bornés dans certains de leurs paramètres (largeur, hauteur, etc). La méthode des matrices de transfert s'applique à l'énumération des polyominos de hauteur bornée. R. C. Read, dans son étude des problèmes de la croissance des cellules (*cell growth problem*, (Read, 1962)), a étudié ces polyominos jusqu'à hauteur 5 selon l'aire et la largeur, mais (comme il faisait ses calculs à la main) n'a obtenu des séries génératrices selon l'aire et la largeur explicitement que jusqu'à hauteur 2.

La méthode présentée ici est essentiellement la même que celle de Read, mais est reformulée de sorte à tenir compte du périmètre en plus de l'aire et de la largeur. Des séries génératrices selon ces paramètres sont obtenues jusqu'à hauteur 4, mais la méthode s'applique à n'importe quelle hauteur: seules les capacités de calcul des ordinateurs limitent le processus. Des résultats sur le comportement asymptotique des séries sont aussi présentés.



**Figure 4.1** Polyomino général dans le réseau carré.

**DÉFINITION 15** *Un polyomino (général) dans le réseau carré est une collection de cellules  $[i, i + 1] \times [j, j + 1], i, j \in \mathbb{Z}$ , connexe par les côtés (i.e. n'importe quelles deux cellules peuvent être connectées par un chemin de cellules dont chaque cellule touche la suivante par un côté). Un polyomino est convexe selon les colonnes (resp. selon les lignes) si son intersection avec n'importe quelle bande  $[i, i + 1] \times \mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{R} \times [i, i + 1]$ ) est connexe (ou vide). On dit qu'un polyomino est convexe s'il est à la fois convexe selon les lignes et selon les colonnes. Les polyominos généraux peuvent contenir des trous, mais on peut demander qu'ils soient simplement connexes; leur bord est alors un polygone autoévitant. Comme les chemins autoévitants, les polyominos sont habituellement considérés à translations près dans le plan discret.*

**DÉFINITION 16** *Le périmètre d'un polyomino est le nombre de côtés de ses cellules qui ne sont pas communs à deux cellules.*

L'énumération des polyominos à hauteur bornée se fait par matrices de transfert. Pour une hauteur donnée, les configurations sont l'ensemble des colonnes pouvant apparaître dans un polyomino d'au plus cette hauteur, et les transitions  $i \rightarrow j$  correspondent à coller une colonne de type  $j$  directement à droite d'une colonne de type  $i$ . Le poids d'une telle transition est nul si coller une colonne  $j$  à la suite d'une colonne  $i$  ne produit pas un objet admissible (ce qu'on entend par "admissible" sera défini plus bas), et sera autrement le gain en aire et en périmètre de l'objet se construisant. Pour les

hauteurs 1 et 2, les types de colonnes possibles sont toujours connexes et l'énumération se fait très simplement. Cependant, à partir de la hauteur 3, on doit tenir en ligne de compte que l'objet puisse débuter déconnecté et ne se connecte que quelques colonnes (quelques étapes) plus loin lors de la construction; l'information quant à la connexion éventuelle devra donc être encodée d'une certaine façon dans les configurations.

#### 4.1.1 Hauteur 1

Ce cas est trivial et ne nécessite pas l'usage de matrices de transfert, puisque les seuls polyominos de hauteur 1 sont les lignes  $\square\square\square\dots\square\square$ , dont on peut calculer la fonction génératrice directement:

$$P_1(x, t, q) = \frac{xt^4q}{1 - xt^2q}, \quad (4.1)$$

où les variables  $x$ ,  $t$  et  $q$  dénotent respectivement la largeur, le périmètre et l'aire des polyominos.

Néanmoins, on calcule quand même leur série génératrice avec des matrices de transfert, à titre d'exemple et pour illustrer ce qui se passera pour les hauteurs plus grandes. Il y a une seule colonne possible de hauteur 1: une cellule simple. Il est toutefois nécessaire d'introduire une configuration supplémentaire, qu'on appellera la *colonne vide*, pour initialiser le périmètre. On doit introduire ce nouvel état parce que contrairement à l'aire ou la largeur d'un polyomino qui sont simplement la somme des aires ou des largeurs de ses colonnes constituantes, le périmètre d'un polyomino n'est pas égal à la somme des périmètres de ses colonnes. Le périmètre sera calculé de cette façon: on utilise la colonne vide pour initialiser le périmètre à  $t^4$  (4 est le périmètre de la première cellule, nécessairement). Ensuite, dans les poids des transitions, on n'aura qu'à tenir à jour le périmètre: chaque nouvelle cellule collée ajoute deux unités au périmètre. Par ailleurs, comme la largeur est le nombre de colonnes de l'objet, c.-à.-d. le nombre de configurations nécessaires à l'obtention de l'objet final, on n'a pas à en tenir compte dans le poids. La table de transition et la matrice de transfert  $T_1(t, q)$  pour la hauteur

1 sont

$$\begin{array}{c|c|c}
 \nearrow & \square & \blacksquare \\
 \hline
 \square & 0 & t^4q \\
 \hline
 \blacksquare & 0 & t^2q
 \end{array}
 \quad
 T_1(t, q) = \begin{pmatrix} 0 & t^4q \\ 0 & t^2q \end{pmatrix}
 \quad (4.2)$$

Les objets que l'on dénombre sont ceux commençant par la colonne vide et se terminant par une cellule, alors la série génératrice que l'on cherche est l'entrée (1, 2) de

$$(I - xT_1(t, q))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{xt^4q}{1-xt^2q} \\ 0 & \frac{1}{1-xt^2q} \end{pmatrix}$$

On obtient, comme prévu, la même série génératrice que ci-dessus.

### 4.1.2 Hauteur 2

Les choses en hauteur 2 se comportent à peu près comme en hauteur 1: il y aura une colonne vide et trois colonnes non-triviales. Les poids des transitions de la colonne vide aux trois autres seront les périmètres et aires des polyominos-colonnes correspondants. La table de transition et la matrice de transfert  $T_2(t, q)$  sont donnés par

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 \nearrow & \square & \blacksquare & \square & \square \\
 \hline
 \square & 0 & t^6q^2 & t^4q & t^4q \\
 \hline
 \blacksquare & 0 & t^2q^2 & t^2q & t^2q \\
 \hline
 \square & 0 & t^4q^2 & t^2q & 0 \\
 \hline
 \square & 0 & t^4q^2 & 0 & t^2q
 \end{array}
 \quad
 T_2(t, q) = \begin{pmatrix} 0 & t^6q^2 & t^4q & t^4q \\ 0 & t^2q^2 & t^2q & t^2q \\ 0 & t^4q^2 & t^2q & 0 \\ 0 & t^4q^2 & 0 & t^2q \end{pmatrix}
 \quad (4.3)$$

Les objets qu'on cherche à dénombrer sont ceux débutant par la colonne vide et se terminant par n'importe laquelle des colonnes non-triviales; ceci correspond aux entrées (1, 2), (1, 3) et (1, 4) de la matrice  $(I - xT_2(t, q))^{-1}$ . On a donc

PROPOSITION 4.1 *La série génératrice  $P_{\leq 2}(x, t, q)$  des polyominos généraux d'au plus deux unités de hauteur est donnée par*

$$P_{\leq 2}(x, t, q) = \frac{xt^4q(t^2q - 2xt^2q^2 + 3xt^4q^2 + 2)}{1 - xt^2q - xt^2q^2 + x^2t^4q^3 - 2x^2t^6q^3}. \quad (4.4)$$

■

COROLLAIRE 4.2 *La série génératrice  $P_2(x, t, q)$  des polyominos généraux d'exactly deux unités de hauteur est*

$$P_2(x, t, q) = \frac{xt^6q^2(2xt^2q + x^2t^4q^2 + 1)}{(1 - xt^2q - xt^2q^2 + x^2t^4q^3 - 2x^2t^6q^3)(1 - xt^2q)}. \quad (4.5)$$

PREUVE Les polyominos de hauteur au plus 2 qui n'atteignent pas la hauteur 2 sont ceux de hauteur 1. Aussi, chaque polyomino de hauteur 1 est compté deux fois puisqu'il peut être dans n'importe laquelle des deux lignes admissibles. Alors on obtient  $P_2(x, t, q)$  de  $P_{\leq 2}(x, t, q)$  en lui soustrayant deux fois  $P_1(x, t, q)$ . ■

COROLLAIRE 4.3 *La fonction génératrice selon l'aire des polyominos d'au plus deux unités de hauteur est donnée par*

$$P_{\leq 2}(1, 1, q) = \frac{q(q^2 + q + 2)}{1 - q - q^2 - q^3}. \quad (4.6)$$











■

NOTE Cette formule a été trouvée par R. C. Read dans (Read, 1962), avec le paramètre additionnel de largeur. La formule (4.5) a été retrouvée par J. Labelle (Labelle, 1998) en utilisant la méthode de décomposition de Zeilberger.

### 4.1.3 Hauteur 3

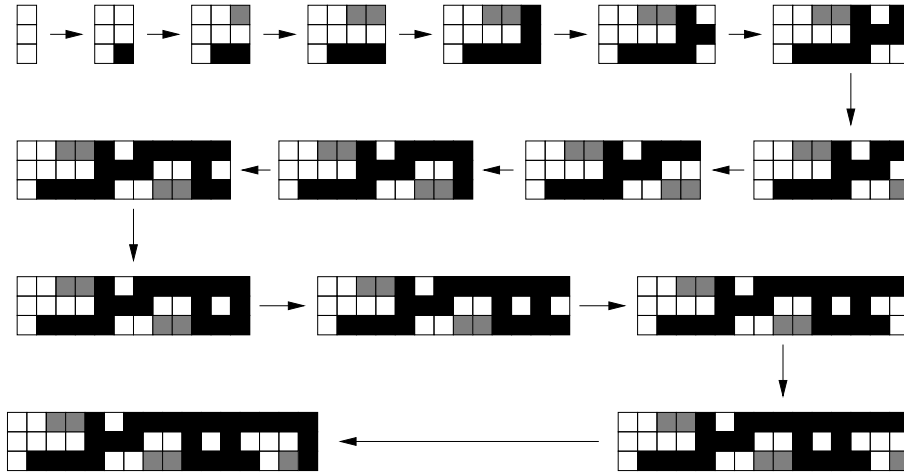
Les choses se compliquent à partir de la hauteur 3 parce que les cellules d'une même colonne du polyomino ne sont plus nécessairement connectées entre elles. On évite ce problème en introduisant un nouveau type de cellules qu'on appellera *cellules déconnectées* (on les représente graphiquement comme des cellules grises; Read utilisait les lettres

U et V pour les distinguer). Les configurations contenant des cellules déconnectées seront appelées *transitoires*, puisqu'elles ne peuvent pas être des configurations terminales. L'objet à construire peut se terminer par une colonne non-connecte, mais cette colonne devra être admissible comme configuration terminale (contenant seulement des cellules noires), c'est-à-dire que les cellules de cette colonne seront connectées entre elles par un chemin dans la partie de l'objet à leur gauche. Le processus de construction, tel qu'il sera donné par la table de transition ci-dessous, permettra de construire tous les polyominos de hauteur au plus 3, sans ambiguïté, i.e. étant donné un tel polyomino, il y aura une unique façon de le colorer en noir et gris de sorte à ce que chacune de ses colonnes soit une configuration et qu'on puisse passer d'une colonne à l'autre vers la droite par une transition admissible. On donne d'abord la table des configurations possibles. La numérotation des colonnes (en indice) correspondra à la numérotation des entrées de la matrice de transfert.

Type de configuration	Configurations
Vide	 (1)
Connexe	 (2)  (3)  (4)  (5)  (6)  (7)
Non-connexe	 (8)
Transitoire	 (9)  (10)

Comme plus haut, la colonne vide est la configuration initiale; elle n'ajoute rien au périmètre à l'aire ou au nombre de colonnes, mais on en a besoin pour initialiser le périmètre. La colonne vide déterminera aussi quelles sont les "vraies" configurations initiales. Toutes les configurations connexes peuvent débiter la construction de l'objet, mais la configurations non-connexe ne peut pas. Les objets qui débutent déconnectés commenceront par une configuration transitoire, mais pour éviter de surcompter on doit choisir l'une des deux. Par convention (la convention demeurera la même pour la hauteur 4), on choisit celle dont la cellule la plus basse est noire (dans ce cas-ci, la configuration # 9). Les configurations finales sont les configurations connexes et non-

connexes (ici, les configurations # 2–8). On illustre ici la construction d'un polyomino de hauteur 3:



Ceci donne l'objet final



La table de transition pour la hauteur trois est

	0	$t^4q$	$t^4q$	$t^4q$	$t^6q^2$	$t^6q^2$	$t^8q^3$	0	$t^8q^2$	0
	0	$t^2q$	0	0	$t^4q^2$	0	$t^6q^3$	0	$t^6q^2$	0
	0	0	$t^2q$	0	$t^4q^2$	$t^4q^2$	$t^6q^3$	0	0	0
	0	0	0	$t^2q$	0	$t^4q^2$	$t^6q^3$	0	0	$t^6q^2$
	0	$t^2q$	$t^2q$	0	$t^2q^2$	$t^4q^2$	$t^4q^3$	0	$t^6q^2$	0
	0	0	$t^2q$	$t^2q$	$t^4q^2$	$t^2q^2$	$t^4q^3$	0	0	$t^6q^2$
	0	$t^2q$	$t^2q$	$t^2q$	$t^2q^2$	$t^2q^2$	$t^2q^3$	$t^4q^2$	0	0
	0	$t^2q$	0	$t^2q$	$t^4q^2$	$t^4q^2$	$t^4q^3$	$t^4q^2$	0	0
	0	0	0	0	0	0	$t^4q^3$	0	$t^4q^2$	0
	0	0	0	0	0	0	$t^4q^3$	0	0	$t^4q^2$

(4.7)

L'intérieur de la table est la matrice de transfert  $T_3(t, q)$ .



On conclut cette section en donnant les fonctions génératrices des polyominos de hauteur au plus 3 et de hauteur exactement 3. On trouve la première en inversant la matrice  $(I - xT_3(t, q))$  et en prenant la somme des entrées  $(1, j)$  pour  $j \in \{2, 3, \dots, 8\}$ . Les fonctions génératrices seront rationnelles en  $x$ ,  $t$ , et  $q$ , mais sont données ici seulement en  $q$  et en  $t$  séparément (elles sont très grosses).

PROPOSITION 4.4 *La fonction génératrice selon l'aire  $P_{\leq 3}(1, 1, q)$  et la fonction génératrice selon le périmètre  $P_{\leq 3}(1, t, 1)$  pour les polyominos généraux de hauteur au plus 3 sont données par*

$$P_{\leq 3}(1, 1, q) = \frac{q(3 - q - 7q^2 + 2q^3 + 5q^4 + q^5 - q^6 - 3q^7 - 5q^8 - 2q^9 + 2q^{10})}{1 - 2q - 3q^2 + 4q^3 + 3q^4 - q^5 - 2q^6 - 2q^7 + q^8 + 4q^9 + 2q^{10} - q^{11}} \quad (4.8)$$

et

$$P_{\leq 3}(1, t, 1) = \frac{t^4(3 - 7t^2 + 3t^4 + 7t^6 - 4t^8 + 3t^{10} - 29t^{12} + 34t^{14} + 4t^{16} - 34t^{18} + 14t^{20})}{1 - 4t^2 + 3t^4 + 2t^6 - 5t^8 + 5t^{10} - 6t^{12} + 15t^{14} - 13t^{16} - 6t^{18} + 18t^{20} - 6t^{22}}. \quad (4.9)$$

■

COROLLAIRE 4.5 *La fonction génératrice selon l'aire  $P_3(1, 1, q)$  la fonction génératrice selon le périmètre  $P_3(1, t, 1)$  pour les polyominos généraux de hauteur exactement 3 sont données par*

$$P_3(1, 1, q) = \frac{(1 + q)(1 + 2q - 5q^2 - 3q^3 + 7q^4 - 2q^5 - q^6 + 2q^7 - 3q^8 - q^9 + q^{10})}{(1 - q)(1 - q - q^2 - q^3)(1 - 3q + 4q^3 - q^4 - 2q^6 + q^8 + 3q^9 - q^{10})} \quad (4.10)$$

et

$$P_3(1, t, 1) = \frac{t^8(1 + 4t^2 - 12t^4 - 4t^6 + 36t^8 - 36t^{10} - 5t^{12} + 32t^{14} - 18t^{16} - 4t^{18} + 4t^{20})(1 + t^2)^2}{R_3(t)(1 - 4t^2 + 3t^4 + 2t^6 - 5t^8 + 5t^{10} - 6t^{12} + 15t^{14} - 13t^{16} - 6t^{18} + 18t^{20} - 6t^{22})}. \quad (4.11)$$

où  $R_3(t) = (1 + t)(1 - t)(1 - 2t^2)(1 + t^4)$ .

PREUVE On obtient ces fonctions en soustrayant de  $P_{\leq 3}(x, t, q)$  deux fois  $P_2(x, t, q)$  (pour les polyominos de hauteur 2, qu'on peut mettre en deux positions possibles) et trois fois  $P_1(x, t, q)$  (pour les polyominos de hauteur 1), puis en spécialisant les variables de façon appropriée. ■

COROLLAIRE 4.6 *Les nombres  $p_3^{(q)}(n)$  et  $p_3^{(t)}(n)$  de polyominos de hauteur exactement 3 qui ont respectivement aire  $n$  et périmètre  $n$  sont donnés asymptotiquement par*



























$$p_3^{(q)}(n) \sim .88902426505\dots(2.39723972830\dots)^n \tag{4.12}$$

$$p_3^{(t)}(n) \sim .23349739747\dots(1.69011186676\dots)^n . \tag{4.13}$$

PREUVE Ceci découle de la théorie générale des fonctions rationnelles, en utilisant l’ordinateur pour obtenir une décomposition des fonctions en fractions partielles et en prenant les termes dominants. ■

#### 4.1.4 Hauteur 4

Les choses en hauteur 4 se comportent comme en hauteur 3; il y a plus de configurations possibles, mais on n’a toujours besoin que de deux types de cellules (connectées (en noir) et déconnectées (en gris)) pour représenter la connexité ou non-connexité de l’objet en cours de construction. On donne d’abord la table des configurations.

Type de configuration	Configurations
Vide	 (1)
Connexe	 (2)  (3)  (4)  (5)  (6)  (7)  (8)  (9)  (10)  (11)
Non-connexe	 (12)  (13)  (14)  (15)  (16)
Transitoire	 (17)  (18)  (19)  (20)  (21)  (22)  (23)  (24)  (25)  (26)

Comme plus haut, la configuration initiale est la colonne vide, mais les “vraies” configurations initiales sont les configurations connexes (# 2–11) et la première configuration de chaque paire de configurations transitoires (# 19,21,23,25). Les configurations finales sont celles qui sont non-vide et non-transitoires (# 2–16). La table de transition est donnée en Annexe A.

La fonction génératrice en  $x$ ,  $t$  et  $q$  pour exactement 4 unités de hauteur a été calculée, mais remplit plus d'une page. On donne ici les spécialisations  $x = t = 1$  et  $x = q = 1$ .

PROPOSITION 4.7 *La fonction génératrice selon l'aire  $P_4(1, 1, q)$  et la fonction génératrice selon le périmètre  $P_4(1, t, 1)$  pour les polyominos de hauteur exactement 4 sont données par*

$$P_4(1, 1, q) = \frac{q^4 N(q)}{D_1(q) D_2(q) D_3(q)} \quad (4.14)$$

et

$$P_4(1, t, 1) = \frac{t^{10} n(t)}{d_1(t) d_2(t) d_3(t)} \quad (4.15)$$

où

$$\begin{aligned} N(q) = & q^{35} + 2q^{34} + 2q^{33} - q^{32} - 11q^{31} - 16q^{30} - 18q^{29} - 25q^{28} + 52q^{27} + 55q^{26} - 170q^{25} - 258q^{24} \\ & - 21q^{23} + 286q^{22} + 261q^{21} - 214q^{20} - 527q^{19} - 282q^{18} + 129q^{17} + 532q^{16} + 511q^{15} - 38q^{14} \\ & - 422q^{13} - 427q^{12} - 72q^{11} + 185q^{10} + 128q^9 + 124q^8 + 61q^7 - 100q^6 - 97q^5 + 14q^4 + 38q^3 \\ & + 4q^2 - 5q - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1(q) = & q^{26} + 5q^{24} - 14q^{23} - 15q^{22} - 4q^{21} + 18q^{20} + 7q^{19} - q^{18} - 50q^{17} - 30q^{16} - 7q^{15} + 41q^{14} + 47q^{13} \\ & + 23q^{12} - 35q^{11} - 34q^{10} - 29q^9 + 10q^8 + 17q^7 + 10q^6 + 5q^5 - 13q^4 - 4q^3 + 2q^2 + 3q - 1 \end{aligned}$$

$$D_2(q) = q^{10} - 3q^9 - q^8 + 2q^6 + q^4 - 4q^3 + 3q - 1$$

$$D_3(q) = q^3 + q^2 + q - 1$$

$$\begin{aligned} n(t) = & 576t^{74} - 736t^{72} - 3712t^{70} + 10080t^{68} - 1572t^{66} - 31954t^{64} + 55420t^{62} - 4046t^{60} - 118753t^{58} \\ & + 166154t^{56} + 2905t^{54} - 256139t^{52} + 259633t^{50} + 40606t^{48} - 296412t^{46} + 236939t^{44} + 30249t^{42} \\ & - 222801t^{40} + 175788t^{38} + 16729t^{36} - 135360t^{34} + 95763t^{32} + 8204t^{30} - 61644t^{28} + 41700t^{26} \\ & + 1915t^{24} - 23037t^{22} + 14380t^{20} + 2276t^{18} - 7420t^{16} + 2372t^{14} + 1709t^{12} - 1104t^{10} - 182t^8 \\ & + 200t^6 + 8t^4 - 13t^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1(t) = & 192t^{54} - 992t^{52} + 2480t^{50} - 3408t^{48} + 972t^{46} + 4170t^{44} - 6265t^{42} + 2968t^{40} + 1335t^{38} \\ & - 2648t^{36} + 739t^{34} + 1544t^{32} - 1806t^{30} + 536t^{28} + 494t^{26} - 518t^{24} + 52t^{22} + 127t^{20} - 42t^{18} \\ & - 88t^{16} + 117t^{14} - 69t^{12} - 4t^{10} + 31t^8 - 10t^6 - 8t^4 + 6t^2 - 1 \end{aligned}$$

$$d_2(t) = 6t^{22} - 18t^{20} + 6t^{18} + 13t^{16} - 15t^{14} + 6t^{12} - 5t^{10} + 5t^8 - 2t^6 - 3t^4 + 4t^2 - 1$$

$$d_3(t) = 2t^6 - t^4 + 2t^2 - 1$$

■

COROLLAIRE 4.8 *Les nombres  $p_4^{(q)}(n)$  et  $p_4^{(t)}(n)$  de polyominos de hauteur exactement 4 qui ont aire  $n$  et périmètre  $n$  respectivement sont donnés asymptotiquement par*

$$p_4^{(q)}(n) \sim .83190182491\dots(2.76672401650\dots)^n \quad (4.16)$$

$$p_4^{(t)}(n) \sim .13708964707\dots(1.87988274514\dots)^n. \quad (4.17)$$

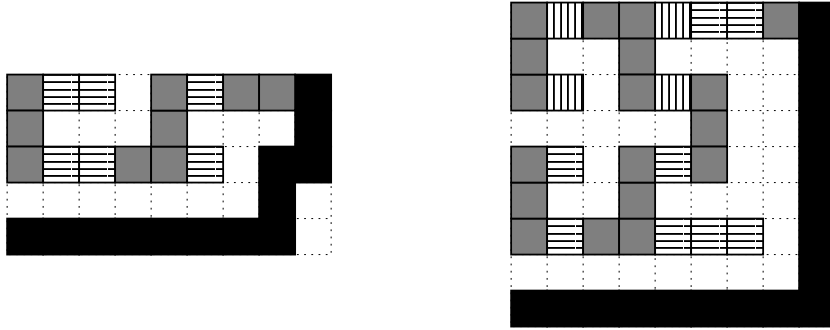
■

#### 4.1.5 Hauteurs $> 4$

À partir de la hauteur 5, trois types de cellules seront nécessaires, et un nouveau type de cellules devra être ajouté chaque fois qu'on ajoutera 4 unités à la hauteur par la suite, i.e. le nombre  $\text{type}(n)$  de types de cellules nécessaires pour la hauteur  $n$  est

$$\text{type}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 3 \text{ or } 4, \\ \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1 & \text{autrement.} \end{cases}$$

La figure 4.2 illustre pourquoi un troisième type de cellules est requis à la hauteur 5. On commence avec une colonne ayant une cellule connectée en bas (même convention que plus haut) et une partie déconnectée de trois cellules (en gris). Les trois cellules grises se touchent, et on pourrait vouloir dans la colonne suivante ne conserver que la première et la troisième (ceci peut se produire dans un polyomino). Mais on doit trouver un moyen de conserver l'information que ces deux nouvelles cellules dans la deuxième colonne sont connectées entre elles par un chemin à leur gauche, et donc n'ont pas à être connectées entre elles plus loin à droite dans l'objet. On retient cette information en introduisant un troisième type de cellules (représentées avec des lignes horizontales), qu'on appelle *sous-connectées* (i.e. connectées par un chemin dans une partie non connectée (grise) à l'objet principal (en noir)). À partir de la hauteur 9, on devra introduire un quatrième type de cellules parce qu'on pourra avoir deux parties grises de trois cases dont les cellules peuvent se déconnecter indépendamment dans les étapes suivantes (voir la figure 4.2). À la hauteur 13, on pourra avoir trois parties grises de trois cellules, ce qui nécessitera encore un nouveau type de cellules, et ainsi de suite.



**Figure 4.2** Un troisième type de cellules doit être introduit à la hauteur 5, et un quatrième à la hauteur 9.

NOTE Comme les entrées des matrices de transfert sont des monômes en deux variables, et que le nombre de configurations augmente très rapidement avec la hauteur, il devient vite très difficile d'inverser les matrices  $(I - xT_n(t, q))$ , même avec un ordinateur rapide. On peut spécialiser certaines des variables, mais le gain en vitesse n'est pas significatif. Aussi, les matrices ont été construites à la main jusqu'à hauteur 4, une méthode qui est non seulement inefficace mais propice à l'erreur. Ainsi, une technique pour automatiser la construction des tables de transition serait nécessaire, même si on voit que la méthode présentée s'applique à toutes les hauteurs.

NOTE En restreignant les transitions un peu plus, on peut énumérer les polyominos simplement connexes, i.e. n'ayant aucun trou. Les configurations et les matrices de transfert sont essentiellement les mêmes, mais certaines entrées des matrices (transitions) doivent être annulées (interdites). Ceci est intéressant parce que le bord d'un polyomino simplement connexe est un polygone autoévitant, et on pourrait donc énumérer ceux-ci selon leur longueur (qui est le périmètre du polyomino correspondant).

## CONCLUSION

Le problème de l'énumération des chemins autoévitant et des polyominos demeure un problème ouvert, et ce plus de 50 ans après sa formulation en physique statistique. Aussi des solutions partielles ont été recherchées dans l'espoir d'approximer la solution générale. Des résultats ont été obtenus avec des approches probabilistes et computationnelles, mais aussi avec des techniques exactes sur des classes restreintes d'objets. Ce mémoire s'inscrit dans cette dernière lignée.

Deux sous-classes de chemins autoévitant et une sous-classe de polyominos ont ainsi été étudiées ici, à savoir les chemins autoévitant dirigés, les chemins autoévitant à mémoire finie et les polyominos à hauteur bornée. Les deux premières classes de structures combinatoires ont déjà fait l'objet de recherches et sont bien connues en ce qui a trait au nombre de chemins, mais sont peu connues en termes de leur rayon carré moyen (la distance carrée moyenne entre les points de départ et d'arrivée), qui est une mesure de la dispersion du chemin et qui est nécessaire aux interprétations physiques. La classe de polyominos a aussi fait l'objet de recherches, mais seul le paramètre d'aire était considéré.

Un autre problème qui rejoint la combinatoire plus classique consiste à pouvoir énumérer les polyominos à symétries près, ou autrement dit énumérer les polyominos comme s'ils étaient libres dans l'espace. L'une des questions ouvertes, entre autres, est de savoir si tous les polyominos sont asymétriques asymptotiquement. En combinatoire, la théorie de Pólya et la théorie des espèces ont été développées principalement pour l'énumération d'objets en tenant compte de leurs symétries internes et s'appliquent au polyominos. Toutefois, l'énumération des polyominos "fixés" étant elle-même un problème ouvert, et donc *a fortiori* celle des polyominos à symétries près, on doit ici encore se concentrer sur des sous-classes. La sous-classe considérée ici est celle des

polyominos parallélogrammes.

Diverses méthodes classiques de combinatoire sont utilisées telles quelles, alors que d'autres ont dû être adaptées. Ainsi une méthode permettant d'énumérer les chemins autoévitant, qu'ils soient dirigés ou à mémoire finie, avec leur rayon carré moyen a été dérivée de la méthode bien établie des matrices de transfert. Cette même méthode des matrices de transfert peut aussi être utilisée pour l'énumération de polyominos de hauteur bornée en tenant compte de davantage de paramètres. De plus, une revue de théorèmes généraux sur les matrices positives permet de dégager des conclusions sur le comportement asymptotique des structures énumérées par matrices de transfert.

Les techniques exigées pour l'énumération des polyominos parallélogrammes à symétries près sont les techniques générales d'énumération à symétries près: théorie de Pólya, théorie des espèces de structures, inversion de Möbius. Ces techniques permettent effectivement d'énumérer les polyominos parallélogrammes à symétries près et de vérifier qu'ils sont bien tous asymétriques asymptotiquement.

Quoique certains des résultats obtenus ici soient intéressants, ils n'en demeurent qu'approximatifs. Les rayons carrés moyens trouvés pour les chemins autoévitant dirigés et les chemins autoévitant à mémoire finie sont respectivement quadratiques et linéaires en la longueur des chemins, mais dans le cas général, la forme asymptotique pour le rayon carré moyen n'est que conjecturée, et l'exposant estimé expérimentalement être environ 1.16. Il faudrait donc trouver des sous-classes plus vastes que celles considérées dans l'espoir de déterminer de meilleures bornes.

De façon semblable, la constante de croissance selon l'aire obtenue pour les polyominos de hauteur bornée donne l'approximation 2.77 (pour hauteur 4) pour la constante de croissance des polyominos généraux, qui est estimée être environ 4.06. Il faut toutefois noter que les meilleures bornes sur la constante de croissance  $\alpha$  des polyominos donnent  $3.791 \leq \alpha \leq 4.649551$ , et que donc même le premier chiffre de cette constante est inconnu.

Un pas important dans la direction d'une solution générale serait de prouver la validité des formes asymptotiques conjecturées. De meilleures bornes pourraient aussi être trouvées en construisant des sous-classes plus grandes de chemins autoévitant et de polyominos. Beaucoup de travaux de par le monde se poursuivent présentement dans cette direction, et la course à la meilleure borne est toujours ouverte.



## APPENDICE A

### RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR L'ÉNUMÉRATION DE POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES

Demi-périmètre	$ \text{Fix}(1) $	$ \text{Fix}(r^2) $	$ \text{Fix}(d_1) $	$ \text{Fix}(d_2) $	# Orbites	$ \text{Fix}(\mathfrak{D}_2) $	Asym
2	1	1	1	1	1	1	0
3	2	2	0	0	1	0	0
4	5	3	1	3	3	1	0
5	14	6	0	0	5	0	8
6	42	10	2	10	16	2	24
7	132	20	0	0	38	0	112
8	429	35	5	35	126	3	360
9	1430	70	0	0	375	0	1360
10	4862	126	14	126	1282	6	4608
11	16796	252	0	0	4262	0	16544
12	58786	462	42	462	14938	10	57840
13	208012	924	0	0	52234	0	207088
14	742900	1716	132	1716	186616	20	739376
15	2674440	3432	0	0	669468	0	2671008
16	9694845	6435	429	6435	2427036	35	9681616
17	35357670	12870	0	0	8842635	0	35344800
18	129644790	24310	1430	24310	32423710	70	129594880
19	477638700	48620	0	0	119421830	0	477590080
20	1767263190	92378	4862	92378	441863202	126	1767073824

**Tableau A.1** Polyominos parallélogrammes énumérés selon leurs symétries et leur demi-périmètre.

Aire	$ \text{Fix}(1) $	$ \text{Fix}(r^2) $	$ \text{Fix}(d_1) $	$ \text{Fix}(d_2) $	# Orbites	$ \text{Fix}(\mathfrak{D}_2) $	Asym
1	1	1	1	1	1	1	0
2	2	2	0	0	1	0	0
3	4	2	0	2	2	0	0
4	9	5	1	1	4	1	4
5	20	4	0	4	7	0	12
6	46	12	0	2	15	0	32
7	105	9	1	9	31	1	88
8	242	28	0	6	69	0	208
9	557	21	1	21	150	1	516
10	1285	65	1	13	341	1	1208
11	2964	48	0	48	765	0	2868
12	6842	152	2	32	1757	0	6656
13	15793	111	1	111	4004	1	15572
14	36463	351	1	73	9222	1	36040
15	84187	257	3	257	21176	1	83672
16	194388	814	2	172	48844	2	193404
17	448847	593	3	593	112509	1	447660
18	1036426	1882	4	396	259677	0	1034144
19	2393208	1370	4	1370	598988	2	2390468
20	5526198	4352	6	920	1382869	2	5520924
21	12760671	3165	7	3165	3191752	1	12754336
22	29466050	10054	8	2124	7369559	2	29453868
23	68041019	7309	11	7309	17013912	3	68026396

**Tableau A.2** Polyominos parallélogrammes énumérés selon leurs symétries et leur aire.



## BIBLIOGRAPHIE

- Alm, S. E. 1993. « Upper Bounds for the Connective Constant of Self-Avoiding Walks », *Combinatorics, Probability and Computing*, vol. 2, p. 115–136.
- Alm, S. E. et Janson, S. 1990. « Random self-avoiding walks on one-dimensional lattices », *Commun. Statist. – Stochastic Models*, vol. 6, no. 2, p. 169–212.
- Baxter, R. J. 1982. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Academic Press.
- Bender, E. A. 1974. « Convex  $n$ -ominoes », *Discrete Math.*, vol. 8, p. 219–226.
- Bergeron, F., Labelle, G., et Leroux, P. 1997. *Combinatorial Species and Tree-like Structures*. T. 67, série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press.
- Bousquet-Mélou, M. 1996a. « A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons », *Discrete Math.*, vol. 154, p. 1–25.
- 1996b. « Percolation Models and Animals », *European J. Combin.*, vol. 17, p. 343–369.
- 1996c. Rapport scientifique d’habilitation. Rapport, LaBRI, Université de Bordeaux 1.
- Bousquet-Mélou, M. et Fédou, J.-M. 1995. « The generating function of convex polyominoes: the resolution of a  $q$ -differential system », *Discrete Math.*, vol. 137, p. 53–75.
- Bousquet-Mélou, M. et Guttmann, A. J. 1997. « Enumeration of three-dimensional convex polygons », *Ann. Comb.*, vol. 1, no. 1, p. 27–53.
- Bousquet-Mélou, M. et Viennot, X. G. 1992. « Empilements de segments et  $q$ -énumération de polyominos convexes dirigés », *J. Combin. Theory A*, vol. 60, p. 196–224.
- Brak, R., Guttmann, A. J., et Whittington, S. G. 1992. « A collapse transition in a directed walk model », *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 25, p. 2437–2446.
- Conway, A. R. et Guttmann, A. J. 1996. « Square lattice self-avoiding walks and corrections to scaling », *Physical Review Letters*, vol. 77, no. 26, p. 5284–5287.
- Cori, R. et Viennot, X. G. 1983. « A synthesis of bijections related to Catalan numbers », *unpublished*.

- Delest, M. P. 1988. « Generating functions for column-convex polyominoes », *J. Combin. Theory A*, vol. 48, p. 12–31.
- Delest, M. P. et Fédou, J.-M. 1993. « Enumeration of skew Ferrers diagrams », *Discrete Math.*, vol. 112, p. 65–79.
- Delest, M. P. et Viennot, X. G. 1984. « Algebraic languages and polyomino enumeration », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 34, p. 169–206.
- Fisher, M. E. et Sykes, M. F. 1959. « Excluded-Volume Problem and the Ising Model of Ferromagnetism », *Phys. Rev.*, vol. 114, p. 45–58.
- Flajolet, P. 1980. « Combinatorial aspects of continued fractions », *Discrete Math.*, vol. 32, p. 125–161.
- 1991. Pólya festoons. Rapport no. 1507, INRIA.
- Frisch, H. L., Collins, F. C., et Friedman, B. 1951. « Excluded Volume Effect in Polymer Chains I », *Journal of Chemical Physics*, vol. 19, no. 11, p. 1402–1409.
- Golomb, S. W. 1994. *Polyominoes, Patterns, Problems and Packing (2nd edition)*. Princeton University Press.
- Guttmann, A. J. 1992. « Planar polygons: regular, convex, almost convex, staircase and row convex ». In *AIP Conference Proceedings 248 (Computer-Aided Statistical Physics, Taipei, Taiwan 1991)*, p. 12–33.
- Hammersley, J. M. 1957. « Percolation Processes II. The Connective Constant », *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 53, p. 642–645.
- Kesten, H. 1963. « On the Number of Self-Avoiding Walks », *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 7, p. 960–969.
- 1964. « On the Number of Self-Avoiding Walks II », *Journal of Mathematical Physics*, vol. 5, no. 8, p. 1128–1137.
- Klarner, D. A. 1981. *The Mathematical Gardner*, chapitre My Life Among The Polyominoes, p. 243–262. Wadsworth.
- Klarner, D. A. et Rivest, R. L. 1974. « Asymptotic bounds for the number of convex  $n$ -ominoes », *Discrete Math.*, vol. 8, p. 31–40.
- Klein, D. J. 1980. « Asymptotic Distributions for Self-Avoiding Walks Constrained to Strips, Cylinders, and Tubes », *Journal of Statistical Physics*, vol. 23, no. 5, p. 561–586.
- Kung, J., éditeur 1995. *Gian-Carlo Rota on Combinatorics, Introductory Papers and Commentaries*, p. 3–31. Birkhäuser.

- Labelle, J. 1993. « On pairs of non-crossing generalized Dyck paths », *Jour. of Statistical Planning and Inference*, vol. 34, p. 209–217.
- 1998. « Self-avoiding walks and polyominoes in strips », *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, vol. 23, p. 88–98.
- Lehman, R. S. et Weiss, G. H. 1958. « A study of the restricted random walk », *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 6, no. 3, p. 257–278.
- Leroux, P., Rassart, E., et Robitaille, A. 1998. « Enumeration of Symmetry Classes of Convex Polyominoes in the Square Lattice », *Advances in Applied Mathematics*, vol. 21, no. 3, p. 343–380.
- Levine, J. 1959. « Note on the number of pairs of non-intersecting routes », *Scripta Math.*, vol. 24, p. 335–338.
- Madras, N. et Slade, G. 1993. *The Self-Avoiding Walk*. Birkhauser Boston.
- Montroll, E. W. 1950. « Markoff Chains and Excluded Volume Effect in Polymer Chains », *Journal of Chemical Physics*, vol. 18, no. 5, p. 734–743.
- Noonan, J. 1997. New upper bounds for the connective constants of self-avoiding walks. submitted.
- Noonan, J. et Zeilberger, D. 1998. The Goulden-Jackson Cluster Method: Extensions, Applications and Implementations. preprint (math.CO/9806036).
- Pólya, G. 1969. « On the Number of Certain Lattice Polygons », *J. Combin. Theory*, vol. 6, p. 102–105.
- Prellberg, T. et Brak, R. 1994. « Critical exponents from non-linear functional equations for partially directed cluster models », *J. Stat. Phys.*
- Read, R. C. 1962. « Contributions to the cell growth problem », *Canad. J. Math*, vol. 14, p. 1–20.
- Rota, G.-C. 1964. « On the Foundations of Combinatorial Theory; I. Theory of Möbius Functions », In (Kung, 1995), p. 340–368.
- Schaefer, H. H. 1974. *Banach Lattices and Positive Operators*. Coll. « Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete », no Band 215. Springer-Verlag.
- Stanley, R. P. 1997. *Enumerative Combinatorics, Volume 1*. T. 49, série *Cambridge Studies in Advances Mathematics*. Cambridge University Press.
- 1999. *Enumerative Combinatorics, Volume 2*. T. 62, série *Cambridge Studies in Advances Mathematics*. Cambridge University Press.
- Sulanke, R. A. 1997. Three recurrences for parallelogram polyominoes. accepté dans

Journal of Difference Equations and its Applications.

- Sykes, M. F. 1961. «Some Counting Theorems in the Theory of the Ising Model and the Excluded Volume Problem», *Journal of Mathematical Physics*, vol. 2, no. 2, p. 52–62.
- Temperley, H. N. V. 1952. «Statistical Mechanics and the Partitions of Numbers II: The Form of Crystal Surfaces», *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 48, p. 683–697.
- 1956. «Combinatorial Problems Suggested by the Statistical Mechanics of Domains and Rubber-like Molecules», *Phys. Rev.*, vol. 103, p. 1–16.
- Viennot, X. G. 1992. «A Survey of Polyomino Enumeration». In P. Leroux, C. R., éditeur, *Proceedings of the 4th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*. T. 11, p. 399–420. Publications du LaCIM.
- Wall, F. T. et White, R. A. 1976. «Macromolecular configurations simulated by random walks with limited orders of non-self-intersection», *Journal of Chemical Physics*, vol. 65, no. 2, p. 808–812.
- Williams, L. K. 1996. «Enumerating up-side self-avoiding walks on integer lattices», *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 3.
- Zeilberger, D. 1996. «Self-avoiding walks, the language of science, and Fibonacci numbers», *J. Stat. Planning and Inference*, vol. 54, p. 135–138.