Motivación

Inspirado por la Teoría de Galois para resolver Ecuaciones Polinomiales, Sophus Lie decidió profundizar el estudio de las Ecuaciones Diferenciales estudiando los Grupos de Simetría de estas Ecuaciones, es decir los Grupos que transforman Soluciones en Soluciones.

Motivación

Inspirado por la Teoría de Galois para resolver Ecuaciones Polinomiales, Sophus Lie decidió profundizar el estudio de las Ecuaciones Diferenciales estudiando los Grupos de Simetría de estas Ecuaciones, es decir los Grupos que transforman Soluciones en Soluciones.

¿Para qué nos sirven estos Grupos?

Motivación

Inspirado por la Teoría de Galois para resolver Ecuaciones Polinomiales, Sophus Lie decidió profundizar el estudio de las Ecuaciones Diferenciales estudiando los Grupos de Simetría de estas Ecuaciones, es decir los Grupos que transforman Soluciones en Soluciones.

¿Para qué nos sirven estos Grupos?

Primero: Para resolver la Ecuación Diferencial
Si conocemos el Grupo de Simetría de la Ecuación Diferencial, entonces podemos descomponer el Espacio de las Soluciones en órbitas

Primero: Para resolver la Ecuación Diferencial

Si conocemos el Grupo de Simetría de la Ecuación Diferencial podemos descomponer el Espacio de las Soluciones en órbitas.

Primero: Para resolver la Ecuación Diferencial

Si conocemos el Grupo de Simetría de la Ecuación Diferencial podemos descomponer el Espacio de las Soluciones en órbitas.

En la situación ideal el Grupo de Simetría de la Ecuación actuará transitivamente en el Espacio de las Soluciones, es decir, habrá solamente una órbita.

Primero: Para resolver la Ecuación Diferencial

Si conocemos el Grupo de Simetría de la Ecuación Diferencial podemos descomponer el Espacio de las Soluciones en órbitas.

En la situación ideal el Grupo de Simetría de la Ecuación actuará transitivamente en el Espacio de las Soluciones, es decir, habrá solamente una órbita.

En este caso bastará con encontrar una sola Solución de la Ecuación Diferencial para conocer a todas las Soluciones.

Segundo: Para extender el dominio de definición de la Ecuación

Las Ecuaciones Diferenciales son versiones Locales de propiedades geométricas o físicas de el espacio en el que está planteada esta Ecuación Diferencial.

Segundo: Para extender el dominio de definición de la Ecuación

Las Ecuaciones Diferenciales son versiones Locales de propiedades geométricas o físicas de el espacio en el que está planteada esta Ecuación Diferencial.

El Grupo de Simetría de la Ecuación nos permite recuperar la información Global de el espacio.

Segundo: Para extender el dominio de definición de la Ecuación

Las Ecuaciones Diferenciales son versiones Locales de propiedades geométricas o físicas de el espacio en el que está planteada esta Ecuación Diferencial.

El Grupo de Simetría de la Ecuación nos permite recuperar la información Global de el espacio.

Esta información es la que nos permite extender el dominio de definición de la Ecuación Diferencial.

Hilbert, en sus famosos problemas que planteó a principios de siglo en el Congreso Internacional de Matemáticas en París, indicó como uno de los problemas de las matemáticas el de estudiar exhaustivamente y llevar hasta sus últimas consecuencias todas las teorías lógicamente posibles con las premisas de la física teórica

Hilbert, en sus famosos problemas que planteó a principios de siglo en el Congreso Internacional de Matemáticas en París, indicó como uno de los problemas de las matemáticas el de estudiar exhaustivamente y llevar hasta sus últimas consecuencias todas las teorías lógicamente posibles con las premisas de la física teórica

Con estas ideas en mente estudiaremos las premisas de la mecánica clásica y el problemas de los observadores inerciales.

Primera Ley de Newton.

Un sistema de referencia es inercial cuando la siguiente proposición es verdadera:

$$\text{Aceleración} \quad \Longrightarrow \quad \text{Fuerza.}$$

Primera Ley de Newton.

Un sistema de referencia es inercial cuando la siguiente proposición es verdadera:

$$\text{Aceleración} \quad \Longrightarrow \quad \text{Fuerza.}$$

(Observemos que esto es equivalente a No Fuerza $\Rightarrow$ No Aceleración).

Primera Ley de Newton.

Un sistema de referencia es inercial cuando la siguiente proposición es verdadera:

$$\text{Aceleración} \quad \Longrightarrow \quad \text{Fuerza.}$$

(Observemos que esto es equivalente a No Fuerza $\Rightarrow$ No Aceleración).

El valor práctico de la primera ley de Newton radica en que cuantificar la aceleración de un cuerpo es, en principio, experimentalmente sencillo.

Sólo por completar nuestro argumento sobre la importancia práctica y teórica de la primera ley de Newton, comentaremos sobre la estructura lógica que liga a ésta con la segunda ley de Newton.

Sólo por completar nuestro argumento sobre la importancia práctica y teórica de la primera ley de Newton, comentaremos sobre la estructura lógica que liga a ésta con la segunda ley de Newton.

Así, el enunciado de la segunda ley, dentro del mismo espíritu en que hemos formulado la primera, es el siguiente:

Sólo por completar nuestro argumento sobre la importancia práctica y teórica de la primera ley de Newton, comentaremos sobre la estructura lógica que liga a ésta con la segunda ley de Newton.

Así, el enunciado de la segunda ley, dentro del mismo espíritu en que hemos formulado la primera, es el siguiente:

Segunda Ley de Newton.

En un sistema de referencia inercial, Aceleración $\Rightarrow$ Fuerza. Más concretamente:

$$F = ma.$$

Una consecuencia inmediata de la primera ley es:

Una consecuencia inmediata de la primera ley es:

Principio de equivalencia

Sean $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ dos sistemas de referencia definidos en una misma región del universo. Supóngase que desde ellos se realizan mediciones de espacio y tiempo y se expresan respectivamente en las coordenadas $\{x, t\}$ y $\{\tilde{x}, \tilde{t}\}$ de tal manera que, para cualquier objeto en movimiento se verifica que,

$$x''(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{x}''(\tilde{t}) = 0.$$

Entonces, $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ son mecánicamente indistinguibles.

Por lo tanto un primer paso en el estudio matemático de todas las posibles teorías lógicamente posibles es el sig. problema:

Por lo tanto un primer paso en el estudio matemático de todas las posibles teorías lógicamente posibles es el sig. problema:

Problema

Determinar el conjunto de todos los difeomorfismos

$$\Phi \colon (x, t) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{t}),$$

con la propiedad de que

$$x''(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{x}''(\tilde{t}) = 0.$$

Por lo tanto un primer paso en el estudio matemático de todas las posibles teorías lógicamente posibles es el sig. problema:

Problema

Determinar el conjunto de todos los difeomorfismos

$$\Phi\colon (x,t) \mapsto (\tilde{x},\tilde{t}),$$

con la propiedad de que

$$x''(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{x}''(\tilde{t}) = 0.$$

De esta manera uno determina el grupo de todas las transformaciones que preservan el criterio definido por la primera ley de Newton: "no aceleración" significará lo mismo en la descripción del sistema $\{x,t\}$ que en el sistema $\{\tilde{x},\tilde{t}\}$.

Una manera de atacar un problema muy complicado consiste en atacar primero un problema similar pero mas sencillo.

Una manera de atacar un problema muy complicado consiste en atacar primero un problema similar pero mas sencillo.

Por ejemplo, si nuestro espacio es unidimensional, entonces la solución a este problema resultan ser las transformaciones de la forma

$$\tilde{x} = \psi_1(x, y) = \frac{a_{11}x + a_{12}y + b_1}{c_1x + c_2y + d}$$
$$\tilde{y} = \psi_2(x, y) = \frac{a_{21}x + a_{22}y + b_2}{c_1x + c_2y + d}.$$

Una manera de atacar un problema muy complicado consiste en atacar primero un problema similar pero mas sencillo.

Por ejemplo, si nuestro espacio es unidimensional, entonces la solución a este problema resultan ser las transformaciones de la forma

$$\tilde{x} = \psi_1(x, y) = \frac{a_{11}x + a_{12}y + b_1}{c_1 x + c_2 y + d}$$
$$\tilde{y} = \psi_2(x, y) = \frac{a_{21}x + a_{22}y + b_2}{c_1 x + c_2 y + d}.$$

Podemos observar que estas trasformaciones no están definidas globalmente.

Una manera de atacar un problema muy complicado consiste en atacar primero un problema similar pero mas sencillo.

Por ejemplo, si nuestro espacio es unidimensional, entonces la solución a este problema resultan ser las transformaciones de la forma

$$\tilde{x} = \psi_1(x, y) = \frac{a_{11}x + a_{12}y + b_1}{c_1 x + c_2 y + d}$$
$$\tilde{y} = \psi_2(x, y) = \frac{a_{21}x + a_{22}y + b_2}{c_1 x + c_2 y + d}.$$

Podemos observar que estas trasformaciones no están definidas globalmente.

Sin embargo si extendemos esta acción a $\mathbb{RP}^2$ entonces estas transformaciones si estarán globalmente definidas.

Con esta misma filosofía podemos estudiar a las ecuaciones de Maxwell en el vacío y sin presencia de otras cargas:

$$\nabla \cdot E = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \times E = \partial_t B, \quad \nabla \times B = \partial_t E$$

donde $B = (B_1, B_2, B_3)$ y $E = (E_1, E_2, E_3)$ representan a las componentes eléctricas y magnéticas respectivamente.

Con esta misma filosofía podemos estudiar a las ecuaciones de Maxwell en el vacío y sin presencia de otras cargas:

$$\nabla \cdot E = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \times E = \partial_t B, \quad \nabla \times B = \partial_t E$$

donde $B = (B_1, B_2, B_3)$ y $E = (E_1, E_2, E_3)$ representan a las componentes eléctricas y magnéticas respectivamente.

Estas ecuaciones, cuando nos restringimos a un espacio de dos dimensiones ¡Resultan ser las ecuaciones de Cauchy-Riemann!

Estas ecuaciones, cuando nos restringimos a un espacio de dos dimensiones ¡Resultan ser las ecuaciones de Cauchy-Riemann!

Estas ecuaciones, cuando nos restringimos a un espacio de dos dimensiones ¡Resultan ser las ecuaciones de Cauchy-Riemann!

Para el caso en dos dimensiones, sabemos que los automorfismos que preservan a las ecuaciones de Cauchy-Riemann son los automorfismos conformes de $\mathbb{R}^2$ que actúan vía transformaciones de Moebius:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Estas ecuaciones, cuando nos restringimos a un espacio de dos dimensiones ¡Resultan ser las ecuaciones de Cauchy-Riemann!

Para el caso en dos dimensiones, sabemos que los automorfismos que preservan a las ecuaciones de Cauchy-Riemann son los automorfismos conformes de $\mathbb{R}^2$ que actúan vía transformaciones de Moebius:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

estas transformaciones están bien definidas en $\widehat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Estas ecuaciones, cuando nos restringimos a un espacio de dos dimensiones ¡Resultan ser las ecuaciones de Cauchy-Riemann!

Para el caso en dos dimensiones, sabemos que los automorfismos que preservan a las ecuaciones de Cauchy-Riemann son los automorfismos conformes de $\mathbb{R}^2$ que actúan vía transformaciones de Moebius:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

estas transformaciones están bien definidas en $\widehat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

De manera análoga, las ecuaciones de Maxwell resultan ser invariantes ante el grupo de automorfismos conformes de una forma bilineal de signatura (3,1).

De manera análoga, las ecuaciones de Maxwell resultan ser invariantes ante el grupo de automorfismos conformes de una forma bilineal de signatura (3,1).

De manera análoga, las ecuaciones de Maxwell resultan ser invariantes ante el grupo de automorfismos conformes de una forma bilineal de signatura (3,1).

Estos automorfismos constan de 15 parámetros, son localmente isomorfos a $\mathrm{SU}_{2,2}$ y contienen como subgrupo al grupo de Poincaré $\mathrm{SO}_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

De manera análoga, las ecuaciones de Maxwell resultan ser invariantes ante el grupo de automorfismos conformes de una forma bilineal de signatura (3,1).

Estos automorfismos constan de 15 parámetros, son localmente isomorfos a $\mathrm{SU}_{2,2}$ y contienen como subgrupo al grupo de Poincaré $\mathrm{SO}_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

Sin embargo estos automorfismos no están bien definidos en $\mathbb{R}^{3,1}$, sino en una variedad real M de dimensión 4 que "vive" dentro de la variedad compleja $G_2(\mathbb{C}^4)$ de los espacios complejos bidimensionales de $G_2(\mathbb{C}^4)$.

De manera análoga, las ecuaciones de Maxwell resultan ser invariantes ante el grupo de automorfismos conformes de una forma bilineal de signatura (3,1).

Estos automorfismos constan de 15 parámetros, son localmente isomorfos a $\mathrm{SU}_{2,2}$ y contienen como subgrupo al grupo de Poincaré $\mathrm{SO}_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

Sin embargo estos automorfismos no están bien definidos en $\mathbb{R}^{3,1}$, sino en una variedad real M de dimensión 4 que "vive" dentro de la variedad compleja $G_2(\mathbb{C}^4)$ de los espacios complejos bidimensionales de $G_2(\mathbb{C}^4)$.

La forma en la que M "vive" dentro de $G_2(\mathbb{C}^4)$ es exactamente análoga a la forma en que S^1 "vive" dentro de S^2, ya que en realidad $S^2 \simeq G_1(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Grupos Locales de Transformaciones

Definición

Un Grupo de Lie Local de r-parámetros consiste de subconjuntos abiertos conexos $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ que contienen al origen, y de funciones suaves

$$m : V \times V \to \mathbb{R}^r,$$

$$i : V_0 \to V,$$

con las siguientes propiedades:

Grupos Locales de Transformaciones

Definición

Un Grupo de Lie Local de r-parámetros consiste de subconjuntos abiertos conexos $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ que contienen al origen, y de funciones suaves

$$m : V \times V \to \mathbb{R}^r,$$

$$i : V_0 \to V,$$

con las siguientes propiedades:

1. Asociatividad. Si x, y, $z \in V$, y $m(x, y)$, $m(y, z) \in V$, entonces
$$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z).$$

Grupos Locales de Transformaciones

Definición

Un Grupo de Lie Local de r-parámetros consiste de subconjuntos abiertos conexos $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ que contienen al origen, y de funciones suaves

$$m : V \times V \to \mathbb{R}^r,$$

$$i : V_0 \to V,$$

con las siguientes propiedades:

1. Asociatividad. Si x, y, $z \in V$, y $m(x, y)$, $m(y, z) \in V$, entonces
$$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z).$$
2. Elemento Identidad. Para toda $x \in V$, $m(0, x) = x = m(x, 0)$.

Grupos Locales de Transformaciones

Definición

Un Grupo de Lie Local de r-parámetros consiste de subconjuntos abiertos conexos $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ que contienen al origen, y de funciones suaves

$$m : V \times V \to \mathbb{R}^r,$$

$$i : V_0 \to V,$$

con las siguientes propiedades:

1. Asociatividad. Si x, y, $z \in V$, y $m(x,y)$, $m(y,z) \in V$, entonces
$$m(x, m(y,z)) = m(m(x,y), z).$$
2. Elemento Identidad. Para toda $x \in V$, $m(0,x) = x = m(x,0)$.
3. Inversos. Para todo x en V_0, $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

Definición

Sea M una variedad diferenciable. Un Grupo Local de Transformaciones que actúa en M está dado por un grupo de Lie Local G, y un subconjunto abierto U de $G \times M$, con

$$\{e\} \times M \subset U \subset G \times M,$$

que es el dominio de definición de la acción del grupo, y una función suave $\psi : U \to M$ con las siguientes propiedades:

Definición

que es el dominio de definición de la acción del grupo, y una función suave $\psi : U \to M$ con las siguientes propiedades:

Definición

que es el dominio de definición de la acción del grupo, y una función suave $\psi : U \to M$ con las siguientes propiedades:

1. Si $(h, x) \in U$, $(g, \psi(h, x)) \in U$ y $(g \cdot h, x) \in U$, entonces

$$\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(g \cdot h, x).$$

Definición

que es el dominio de definición de la acción del grupo, y una función suave $\psi : U \to M$ con las siguientes propiedades:

1. Si $(h, x) \in U$, $(g, \psi(h, x)) \in U$ y $(g \cdot h, x) \in U$, entonces
$$\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(g \cdot h, x).$$
2. Para todo $x \in M$,
$$\psi(e, x) = x.$$

Definición

que es el dominio de definición de la acción del grupo, y una función suave $\psi : U \to M$ con las siguientes propiedades:

1. Si $(h, x) \in U$, $(g, \psi(h, x)) \in U$ y $(g \cdot h, x) \in U$, entonces
$$\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(g \cdot h, x).$$
2. Para todo $x \in M$,
$$\psi(e, x) = x.$$
3. Si $(g, x) \in U$, entonces $(g^{-1}, \psi(g, x)) \in U$ y
$$\psi(g^{-1}, \psi(g, x)) = x.$$

Acción de Grupos Locales sobre funciones

Sean $X = \mathbb{R}^p$ con coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $U = \mathbb{R}^q$ con coordenadas $u = (u^1, \ldots, u^q)$ y G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$.

Acción de Grupos Locales sobre funciones

Sean $X = \mathbb{R}^p$ con coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $U = \mathbb{R}^q$ con coordenadas $u = (u^1, \ldots, u^q)$ y G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$.

Bajo estas hipótesis,

¿Cómo actúa G sobre las funciones $f : \Omega \subset X \longrightarrow U$?

Acción de Grupos Locales sobre funciones

Sean $X = \mathbb{R}^p$ con coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $U = \mathbb{R}^q$ con coordenadas $u = (u^1, \ldots, u^q)$ y G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$.

Bajo estas hipótesis,

¿Cómo actúa G sobre las funciones $f : \Omega \subset X \longrightarrow U$?

Para ver como es esta acción consideremos a la gráfica de f,

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Para ver como es esta acción consideremos a la gráfica de f,

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Para ver como es esta acción consideremos a la gráfica de f,

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Sea $g \in G$, y consideremos el conjunto

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) \mid (x, u) \in \Gamma_f\}$$

Para ver como es esta acción consideremos a la gráfica de f,

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Sea $g \in G$, y consideremos el conjunto

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) \mid (x, u) \in \Gamma_f\}$$

El conjunto $g \cdot \Gamma_f$ no necesariamente es la gráfica de otra función.

Para ver como es esta acción consideremos a la gráfica de f,

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Sea $g \in G$, y consideremos el conjunto

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) \mid (x, u) \in \Gamma_f\}$$

El conjunto $g \cdot \Gamma_f$ no necesariamente es la gráfica de otra función.

Sin embargo $e \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$ Sí es la gráfica de una función.

Sin embargo $e \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$ Sí es la gráfica de una función.

Sin embargo $e \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$ Sí es la gráfica de una función.

Por lo tanto, podemos usar el Teorema de la Función Implícita para obtener una vecindad $\widetilde{G}_e \subset G$ de la identidad en G y un abierto $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ tales que, para todo $g \in \widetilde{G}_e$ existe una función $\tilde{f}$ tal que

$$g \cdot \Gamma_{f|_{\widetilde{\Omega}}} = \Gamma_{\tilde{f}}.$$

Sin embargo $e \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$ Sí es la gráfica de una función.

Por lo tanto, podemos usar el Teorema de la Función Implícita para obtener una vecindad $\widetilde{G}_e \subset G$ de la identidad en G y un abierto $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ tales que, para todo $g \in \widetilde{G}_e$ existe una función $\tilde{f}$ tal que

$$g \cdot \Gamma_{f|_{\widetilde{\Omega}}} = \Gamma_{\tilde{f}}.$$

A esta función $\tilde{f}$ la llamaremos la Función Transformada de f por g y escribiremos $\tilde{f} = g \cdot f$.

Prolongación

Notación

Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_p)$ una función suave con valores en $\mathbb{R}$ con p variables independientes.

Prolongación

Notación

Sea $f(x) = f(x_1, \dots, x_p)$ una función suave con valores en $\mathbb{R}$ con p variables independientes.

Denotaremos a las derivadas parciales de orden k de f mediante

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial_k f(x)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}},$$

Prolongación

Notación

Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_p)$ una función suave con valores en $\mathbb{R}$ con p variables independientes.

Denotaremos a las derivadas parciales de orden k de f mediante

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial_k f(x)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}},$$

donde $J = (j_1, \ldots, j_k)$ es una k-tupla de enteros en donde no importa el orden, con entradas $1 \leq j_l \leq p$ que indican cuales derivadas son la que están siendo tomadas.

Notación

Sea $f : X \to U$ una función suave de $X \simeq \mathbb{R}^p$ a $U \simeq \mathbb{R}^q$, con $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^q(x))$.

Notación

Sea $f : X \to U$ una función suave de $X \simeq \mathbb{R}^p$ a $U \simeq \mathbb{R}^q$, con $f(x) = (f^1(x), \dots, f^q(x))$.

Denotaremos por

$$u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$$

a las derivadas de orden k de las componentes de f en el punto x.

Notación

Sea $f : X \to U$ una función suave de $X \simeq \mathbb{R}^p$ a $U \simeq \mathbb{R}^q$, con $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^q(x))$.

Denotaremos por

$$u^\alpha_J = \partial_J f^\alpha(x)$$

a las derivadas de orden k de las componentes de f en el punto x.

Sea U_k el espacio euclideano con coordenadas u^α_J, $\alpha = 1, \ldots q$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leq j_l \leq p$ y sea $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$.

Sea U_k el espacio euclideano con coordenadas u^{α}_J, $\alpha = 1, \ldots q$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leq j_l \leq k$ y sea $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$.

Sea U_k el espacio euclideano con coordenadas u_J^α, $\alpha = 1, \ldots q$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leq j_l \leq k$ y sea $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$.

El espacio $X \times U^{(n)}$ es llamado el Espacio Jet de orden n del Espacio Base $X \times U$.

Sea U_k el espacio euclideano con coordenadas u_J^α, $\alpha = 1, \ldots q$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leq j_l \leq k$ y sea $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$.

El espacio $X \times U^{(n)}$ es llamado el Espacio Jet de orden n del Espacio Base $X \times U$.

Si $M \subset X \times U$ es un subconjunto abierto denotaremos por

$$M^{(n)} := M \times U_1 \times \cdots \times U_n$$

al n-ésimo Espacio Jet de M.

Sea U_k el espacio euclideano con coordenadas u_J^α, $\alpha = 1, \ldots q$, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leq j_l \leq k$ y sea $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$.

El espacio $X \times U^{(n)}$ es llamado el Espacio Jet de orden n del Espacio Base $X \times U$.

Si $M \subset X \times U$ es un subconjunto abierto denotaremos por

$$M^{(n)} := M \times U_1 \times \cdots \times U_n$$

al n-ésimo Espacio Jet de M.

Dada una función suave $f : X \to U$, existe una función inducida $\mathrm{pr}^{(n)} f$, llamada la n-ésima Prolongación de f que se define por las ecuaciones

$$\mathrm{pr}^{(n)} f_J^\alpha(x) = \partial_J f^\alpha(x).$$

Prolongación de Acciones de Grupos Locales de Transformaciones

Sea G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$ del espacio de variables independientes y dependientes.

Prolongación de Acciones de Grupos Locales de Transformaciones

Sea G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$ del espacio de variables independientes y dependientes.

¿Podremos extender la acción de G a $M^{(n)}$ de manera natural?

Respuesta: ¡Sí!

Prolongación de Acciones de Grupos Locales de Transformaciones

Sea G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$ del espacio de variables independientes y dependientes.

¿Podremos extender la acción de G a $M^{(n)}$ de manera natural?
Respuesta: ¡Sí!

Para lograrlo notemos que dado un punto $(x_0, u_0^{(n)})$ en $M^{(n)}$ existe una función f tal que

$$u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0) \qquad \text{i.e.} \quad u_{J0}^{\alpha} = \partial_J f^{\alpha}(x_0).$$

Para lograrlo notemos que dado un punto $(x_0, u_0^{(n)})$ en $M^{(n)}$ existe una función f tal que

$$u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0) \qquad \text{i.e.} \quad u_{J0}^{\alpha} = \partial_J f^{\alpha}(x_0).$$

Para lograrlo notemos que dado un punto $(x_0, u_0^{(n)})$ en $M^{(n)}$ existe una función f tal que

$$u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0) \qquad \text{i.e.} \quad u_{J0}^{\alpha} = \partial_J f^{\alpha}(x_0).$$

Por ejemplo la función

$$f^{\alpha}(x) = \sum_J \frac{u_{J0}^{\alpha}}{\tilde{J}!}(x - x_0)^J, \qquad \alpha = 1, \ldots, q, \tag{1}$$

donde $(x - x_0)^J = (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \cdots (x^{j_k} - x_0^{j_k})$ y $\tilde{J} = (\tilde{\jmath}_1, \ldots, \tilde{\jmath}_p)$, donde $\tilde{\jmath}_i$ es el número de j_k's iguales a i, cumple las condiciones pedidas.

Para lograrlo notemos que dado un punto $(x_0, u_0^{(n)})$ en $M^{(n)}$ existe una función f tal que

$$u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0) \qquad \text{i.e.} \quad u_{J0}^{\alpha} = \partial_J f^{\alpha}(x_0).$$

Por ejemplo la función

$$f^{\alpha}(x) = \sum_J \frac{u_{J0}^{\alpha}}{\tilde{J}!}(x - x_0)^J, \qquad \alpha = 1, \ldots, q, \tag{1}$$

donde $(x - x_0)^J = (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \cdots (x^{j_k} - x_0^{j_k})$ y $\tilde{J} = (\tilde{\jmath}_1, \ldots, \tilde{\jmath}_p)$, donde $\tilde{\jmath}_i$ es el número de j_k's iguales a i, cumple las condiciones pedidas.

Definimos ahora la Acción Local de G en $M^{(n)}$, llamada la n-ésima Prolongación de G de la siguiente manera:

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)})$$

Para lograrlo notemos que dado un punto $(x_0, u_0^{(n)})$ en $M^{(n)}$ existe una función f tal que

$$u_0^{(n)} = \mathrm{pr}^{(n)} f(x_0) \qquad \text{i.e.} \quad u_{J0}^{\alpha} = \partial_J f^{\alpha}(x_0).$$

Por ejemplo la función

$$f^{\alpha}(x) = \sum_J \frac{u_{J0}^{\alpha}}{\tilde{J}!}(x - x_0)^J, \qquad \alpha = 1, \ldots, q, \tag{1}$$

donde $(x - x_0)^J = (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \cdots (x^{j_k} - x_0^{j_k})$ y $\tilde{J} = (\tilde{\jmath}_1, \ldots, \tilde{\jmath}_p)$, donde $\tilde{\jmath}_i$ es el número de j_k's iguales a i, cumple las condiciones pedidas.

Definimos ahora la Acción Local de G en $M^{(n)}$, llamada la *n-ésima Prolongación de G* de la siguiente manera:

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)})$$

donde

$$\tilde{u}_0^{(n)} := \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0). \tag{2}$$

Definimos ahora la Acción Local de G en $M^{(n)}$, llamada la *n-ésima Prolongación de G* de la siguiente manera:

$$\mathrm{pr}^{(n)}\, g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)})$$

donde

$$\tilde{u}_0^{(n)} := \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0). \tag{3}$$

Definimos ahora la Acción Local de G en $M^{(n)}$, llamada la *n-ésima Prolongación de G* de la siguiente manera:

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)})$$

donde

$$\tilde{u}_0^{(n)} := \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0). \tag{3}$$

De esta definición se sigue que

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot \mathrm{pr}^{(n)} f = \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f).$$

Definimos ahora la Acción Local de G en $M^{(n)}$, llamada la *n-ésima Prolongación de G* de la siguiente manera:

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)})$$

donde

$$\tilde{u}_0^{(n)} := \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0). \tag{3}$$

De esta definición se sigue que

$$\mathrm{pr}^{(n)} g \cdot \mathrm{pr}^{(n)} f = \mathrm{pr}^{(n)}(g \cdot f).$$

A esto nos referíamos al pedir que la extensión fuera Natural.

Prolongación de Campos Vectoriales

Definición

Sea $M \subset X \times U$ abierto y sea $\mathbf{v}$ un campo vectorial en M. La n-ésima Prolongación de $\mathbf{v}$, denotada por $\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}$, esta definida por:

Prolongación de Campos Vectoriales

Definición

Sea $M \subset X \times U$ abierto y sea $\mathbf{v}$ un campo vectorial en M. La n-ésima Prolongación de $\mathbf{v}$, denotada por $\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}$, esta definida por:

$$\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}\Big|_{(x,u^{(n)})} := \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathrm{pr}^{(n)}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]\cdot(x,u^{(n)}) \qquad (4)$$

para todo $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Dado un Sistema $\mathcal{L}$ de Ecuaciones Diferenciales de orden n, con p variables independientes y q variables dependientes lo podemos representar como un Sistema de Ecuaciones

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Dado un Sistema $\mathcal{L}$ de Ecuaciones Diferenciales de orden n, con p variables independientes y q variables dependientes lo podemos representar como un Sistema de Ecuaciones

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

del n-ésimo Espacio Jet a $\mathbb{R}^l$.

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Dado un Sistema $\mathcal{L}$ de Ecuaciones Diferenciales de orden n, con p variables independientes y q variables dependientes lo podemos representar como un Sistema de Ecuaciones

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

del n-ésimo Espacio Jet a $\mathbb{R}^l$.

Si el cero es un valor regular de la función

$$\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \ldots, \Delta_l(x, u^{(n)}))$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Dado un Sistema $\mathcal{L}$ de Ecuaciones Diferenciales de orden n, con p variables independientes y q variables dependientes lo podemos representar como un Sistema de Ecuaciones

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

del n-ésimo Espacio Jet a $\mathbb{R}^l$.

Si el cero es un valor regular de la función

$$\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \ldots, \Delta_l(x, u^{(n)}))$$

entonces el conjunto

$$\mathcal{L}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) \mid \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$$

es una subvariedad contenida en el n-ésimo Espacio Jet.

entonces el conjunto

$$\mathcal{L}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) \mid \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$$

es una subvariedad contenida en el n-ésimo Espacio Jet.

entonces el conjunto

$$\mathcal{L}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) \mid \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$$

es una subvariedad contenida en el n-ésimo Espacio Jet.

Bajo este punto de vista, una Solución del Sistema de Ecuaciones Diferenciales dado es una función suave $u = f(x)$, tal que

$$\Delta_\nu(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x)) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l.$$

entonces el conjunto

$$\mathcal{L}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) \mid \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$$

es una subvariedad contenida en el n-ésimo Espacio Jet.

Bajo este punto de vista, una Solución del Sistema de Ecuaciones Diferenciales dado es una función suave $u = f(x)$, tal que

$$\Delta_\nu(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x)) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l.$$

Esto es equivalente a que la gráfica de la n-ésima prolongación $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$, esté completamente contenida en la subvariedad $\mathcal{L}_\Delta$ determinada por el sistema, es decir,

$$\Gamma_f^{(n)} = \{(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x))\} \subset \mathcal{L}_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}) = 0\}.$$

entonces el conjunto

$$\mathcal{L}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) \mid \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}$$

es una subvariedad contenida en el n-ésimo Espacio Jet.

Bajo este punto de vista, una Solución del Sistema de Ecuaciones Diferenciales dado es una función suave $u = f(x)$, tal que

$$\Delta_\nu(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x)) = 0 \qquad \nu = 1, \dots, l.$$

Esto es equivalente a que la gráfica de la n-ésima prolongación $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$, esté completamente contenida en la subvariedad $\mathcal{L}_\Delta$ determinada por el sistema, es decir,

$$\Gamma_f^{(n)} = \{(x, \mathrm{pr}^{(n)} f(x))\} \subset \mathcal{L}_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}) = 0\}.$$

De esta forma, dado un Sistema $\mathcal{L}$ de Ecuaciones Diferenciales le podemos asociar una subvariedad $\mathcal{L}_\Delta$ contenida en el n-ésimo Espacio Jet.

Invariancia de Ecuaciones Diferenciales

Definición

Sea $\mathcal{L}$ un Sistema de Ecuaciones Diferenciales. Un Grupo de Simetría del Sistema $\mathcal{L}$ es un Grupo Local de Transformaciones G, que actúa en un conjunto abierto M del espacio de variables independientes y dependientes del Sistema, con la propiedad de que siempre que $u = f(x)$ es una Solución de $\mathcal{L}$, y siempre que $g \cdot f$ esté definida para $g \in G$, entonces $u = (g \cdot f)(x)$ también es una Solución del Sistema.

Definición

Sea G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en un subconjunto abierto $M \subset X \times U$, y sea $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ un Sistema de Ecuaciones Diferenciales de grado n definidas sobre M. Se dice que G Preserva el Sistema de Ecuaciones Diferenciales si la prolongación de la acción de G deja a $\mathcal{L}_\Delta \subset M^{(n)}$ invariante, es decir, si siempre que $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{L}_\Delta$ y siempre que $\mathrm{pr}^{(n)}\, g \cdot (x, u^{(n)})$ esté definido, se tiene que $\mathrm{pr}^{(n)}\, g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{L}_\Delta$.

Teorema

Sea M un subconjunto abierto de $X \times U$ y supongamos que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ es un Sistema de Ecuaciones Diferenciales de grado n definidas en M. Si G es un Grupo Local de Trasformaciones que preserva al Sistema de Ecuaciones Diferenciales, entonces G es un Grupo de Simetría del Sistema de Ecuaciones Diferenciales.

Teorema

Supongamos que

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l,$$

es un Sistema de Ecuaciones Diferenciales definidas en $M \subset X \times U$ y sea G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en M.

Teorema

Supongamos que

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l,$$

es un Sistema de Ecuaciones Diferenciales definidas en $M \subset X \times U$ y sea G un Grupo Local de Transformaciones que actúa en M.
Si el cero es un valor regular de Δ y

$$\mathrm{pr}^{(n)}\,\mathbf{v}[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, l, \tag{5}$$

siempre que

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0$$

para todo Campo Vectorial $\mathbf{v}$ asociado a la acción de G, entonces G es un Grupo de Simetría del Sistema.

Versión Local: Grupo de Simetría de la Recta

Usando estos resultados Calcularemos el Grupo de Simetría de la Ecuación de la Recta $y'' = 0$.

Versión Local: Grupo de Simetría de la Recta

Usando estos resultados Calcularemos el Grupo de Simetría de la Ecuación de la Recta $y'' = 0$.

Sea $\mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial y}$ un Campo Vectorial definido en $\mathbb{R}^2$.

Versión Local: Grupo de Simetría de la Recta

Usando estos resultados Calcularemos el Grupo de Simetría de la Ecuación de la Recta $y'' = 0$.

Sea $\mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial y}$ un Campo Vectorial definido en $\mathbb{R}^2$.

Entonces, podemos ver que su segunda prolongación está dada por:

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial y} + \psi \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta \frac{\partial}{\partial y_2}$$

Versión Local: Grupo de Simetría de la Recta

Usando estos resultados Calcularemos el Grupo de Simetría de la Ecuación de la Recta $y'' = 0$.

Sea $\mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial y}$ un Campo Vectorial definido en $\mathbb{R}^2$.

Entonces, podemos ver que su segunda prolongación está dada por:

$$\mathrm{pr}^{(2)}\, \mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial y} + \psi \frac{\partial}{\partial y_1} + \eta \frac{\partial}{\partial y_2}$$

con

$$\begin{aligned} \psi &= (\phi_x + y_1 \phi_y) - y_1(\xi_x + y_1 \xi_y), \\ \eta &= \psi_x + y_1 \psi_y + y_2 \psi_{y_1} - y_2(\xi_x + y_1 \xi_y) \end{aligned}$$

con

$$\psi = (\phi_x + y_1\phi_y) - y_1(\xi_x + y_1\xi_y),$$
$$\eta = \psi_x + y_1\psi_y + y_2\psi_{y_1} - y_2(\xi_x + y_1\xi_y)$$

con

$$\psi = (\phi_x + y_1\phi_y) - y_1(\xi_x + y_1\xi_y),$$
$$\eta = \psi_x + y_1\psi_y + y_2\psi_{y_1} - y_2(\xi_x + y_1\xi_y)$$

Como ya hemos visto la ecuación $y'' = 0$ se puede indentificar con la subvariedad del segundo Espacio Jet de $\mathbb{R}^2$ de los puntos que anulan a la Función $\Delta(x, y, y_1, y_2) = y_2$.

con

$$\psi = (\phi_x + y_1\phi_y) - y_1(\xi_x + y_1\xi_y),$$
$$\eta = \psi_x + y_1\psi_y + y_2\psi_{y_1} - y_2(\xi_x + y_1\xi_y)$$

Como ya hemos visto la ecuación $y'' = 0$ se puede indentificar con la subvariedad del segundo Espacio Jet de $\mathbb{R}^2$ de los puntos que anulan a la Función $\Delta(x, y, y_1, y_2) = y_2$.

Por lo tanto si **v** es un Campo Vectorial asociado al Grupo de Simetría de la Recta, entonces

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}(\Delta(x, y, y_1, y_2)) = \psi_x + y_1\psi_y = 0$$

con

$$\psi = (\phi_x + y_1\phi_y) - y_1(\xi_x + y_1\xi_y),$$
$$\eta = \psi_x + y_1\psi_y + y_2\psi_{y_1} - y_2(\xi_x + y_1\xi_y)$$

Como ya hemos visto la ecuación $y'' = 0$ se puede indentificar con la subvariedad del segundo Espacio Jet de $\mathbb{R}^2$ de los puntos que anulan a la Función $\Delta(x, y, y_1, y_2) = y_2$.

Por lo tanto si **v** es un Campo Vectorial asociado al Grupo de Simetría de la Recta, entonces

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}(\Delta(x, y, y_1, y_2)) = \psi_x + y_1\psi_y = 0$$

siempre que

$$\Delta(x, y, y_1, y_2) = 0.$$

con

$$\psi = (\phi_x + y_1\phi_y) - y_1(\xi_x + y_1\xi_y),$$
$$\eta = \psi_x + y_1\psi_y + y_2\psi_{y_1} - y_2(\xi_x + y_1\xi_y)$$

Como ya hemos visto la ecuación $y'' = 0$ se puede indentificar con la subvariedad del segundo Espacio Jet de $\mathbb{R}^2$ de los puntos que anulan a la Función $\Delta(x, y, y_1, y_2) = y_2$.

Por lo tanto si $\mathbf{v}$ es un Campo Vectorial asociado al Grupo de Simetría de la Recta, entonces

$$\mathrm{pr}^{(2)}\,\mathbf{v}(\Delta(x, y, y_1, y_2)) = \psi_x + y_1\psi_y = 0$$

siempre que

$$\Delta(x, y, y_1, y_2) = 0.$$

Usando que $y_2 = 0$ cuando $\Delta(x, y, y_1, y_2) = 0$ obtenemos

$$\phi_{xx} + y_1(2\phi_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\phi_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3\xi_{yy} = 0,$$

Usando que $y_2 = 0$, cuando $\Delta(x, y, y_1, y_2) = 0$, obtenemos

$$\phi_{xx} + y_1(2\phi_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\phi_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3\xi_{yy} = 0,$$

Usando que $y_2 = 0$, cuando $\Delta(x, y, y_1, y_2) = 0$, obtenemos

$$\phi_{xx} + y_1(2\phi_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\phi_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3\xi_{yy} = 0,$$

de donde,

$$\phi_{xx} = 0, \qquad 2\phi_{xy} - \xi_{xx} = 0, \qquad \phi_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \qquad \xi_{yy} = 0. \tag{6}$$

Usando que $y_2 = 0$, cuando $\Delta(x, y, y_1, y_2) = 0$, obtenemos

$$\phi_{xx} + y_1(2\phi_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\phi_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3\xi_{yy} = 0,$$

de donde,

$$\phi_{xx} = 0, \qquad 2\phi_{xy} - \xi_{xx} = 0, \qquad \phi_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \qquad \xi_{yy} = 0. \tag{6}$$

La Solución General del Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales Parciales (6) es

$$\xi = (\frac{c_1 x}{2} + c_7)y + c_5 x^2 + c_8 x + c_9 \tag{7}$$

$$\phi = (c_5 y + c_6)x + \frac{c_1}{2}y^2 + c_2 y + c_3. \tag{8}$$

La Solución General del Sistema es

$$\xi = \left(\frac{c_1 x}{2} + c_7\right)y + c_5 x^2 + c_8 x + c_9 \tag{9}$$

$$\phi = (c_5 y + c_6)x + \frac{c_1}{2}y^2 + c_2 y + c_3. \tag{10}$$

La Solución General del Sistema es

$$\xi = (\frac{c_1 x}{2} + c_7)y + c_5 x^2 + c_8 x + c_9 \tag{9}$$

$$\phi = (c_5 y + c_6)x + \frac{c_1}{2}y^2 + c_2 y + c_3. \tag{10}$$

Por lo tanto los Campos Vectoriales asociados al Grupo de Simetría de la Ecuación $y'' = 0$ son

1. $\mathbf{v}_1 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$,
2. $\mathbf{v}_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$,
3. $\mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}$,
4. $\mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x}$,
5. $\mathbf{v}_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$,
6. $\mathbf{v}_6 = x\frac{\partial}{\partial y}$,
7. $\mathbf{v}_7 = y\frac{\partial}{\partial x}$,
8. $\mathbf{v}_8 = x\frac{\partial}{\partial x}$.

Por lo tanto los Campos Vectoriales asociados a la ecuación $y'' = 0$ son

$$\mathbf{v}_1 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathbf{v}_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_6 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_7 = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_8 = x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Por lo tanto los Campos Vectoriales asociados a la ecuación $y'' = 0$ son

$$\mathbf{v}_1 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$\mathbf{v}_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_6 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_7 = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_8 = x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Los Grupos Uniparamétricos generados por estos Campos son

1. $G_1(x,y) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon y}, \frac{y}{1-\varepsilon y}\right)$,
2. $G_2(x,y) = (x, ye^{\varepsilon})$,
3. $G_3(x,y) = (x, y+\varepsilon)$,
4. $G_4(x,y) = (x+\varepsilon, y)$,
5. $G_5(x,y) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right)$,
6. $G_6(x,y) = (x, y+\varepsilon x)$,
7. $G_7(x,y) = (x+\varepsilon y, y)$,
8. $G_8(x,y) = (xe^{\varepsilon}, y)$.

Los Grupos Uniparamétricos generados por estos Campos son

1. $G_1(x, y) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon y}, \frac{y}{1-\varepsilon y}\right)$,
2. $G_2(x, y) = (x, ye^{\varepsilon})$,
3. $G_3(x, y) = (x, y + \varepsilon)$,
4. $G_4(x, y) = (x + \varepsilon, y)$,
5. $G_5(x, y) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right)$,
6. $G_6(x, y) = (x, y + \varepsilon x)$,
7. $G_7(x, y) = (x + \varepsilon y, y)$,
8. $G_8(x, y) = (xe^{\varepsilon}, y)$.

Los Grupos Uniparamétricos generados por estos Campos son

1. $G_1(x,y) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon y}, \frac{y}{1-\varepsilon y}\right)$,
2. $G_2(x,y) = (x, ye^{\varepsilon})$,
3. $G_3(x,y) = (x, y+\varepsilon)$,
4. $G_4(x,y) = (x+\varepsilon, y)$,
5. $G_5(x,y) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right)$,
6. $G_6(x,y) = (x, y+\varepsilon x)$,
7. $G_7(x,y) = (x+\varepsilon y, y)$,
8. $G_8(x,y) = (xe^{\varepsilon}, y)$.

Observemos que G_1 y G_5 no están definidos para cualquier ε.

Versión Global: Acción Natural de $SL_3(\mathbb{R})$ en $\mathbb{RP}^2$

Le podemos dar a $\mathbb{RP}^2$ una estructura de Espacio Homogéneo como sigue:

Versión Global: Acción Natural de $SL_3(\mathbb{R})$ en $\mathbb{RP}^2$

Le podemos dar a $\mathbb{RP}^2$ una estructura de Espacio Homogéneo como sigue:

Consideremos el espacio de clases de equivalencia en el Grupo $SL_3(\mathbb{R})$ módulo el Subgrupo

$$P = \left\{ g = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \beta & \det \alpha \end{array} \right) \middle| \alpha \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ y } \beta^t \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Versión Global: Acción Natural de $SL_3(\mathbb{R})$ en $\mathbb{RP}^2$

Le podemos dar a $\mathbb{RP}^2$ una estructura de Espacio Homogéneo como sigue:

Consideremos el espacio de clases de equivalencia en el Grupo $SL_3(\mathbb{R})$ módulo el Subgrupo

$$P = \left\{ g = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \beta & \det \alpha \end{array} \right) \middle| \, \alpha \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ y } \beta^t \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

El Subgrupo P es el Subgrupo que mantiene fija a la recta $t \mapsto (0, 0, t)$.

Versión Global: Acción Natural de $SL_3(\mathbb{R})$ en $\mathbb{RP}^2$

Le podemos dar a $\mathbb{RP}^2$ una estructura de Espacio Homogéneo como sigue:

Consideremos el espacio de clases de equivalencia en el Grupo $SL_3(\mathbb{R})$ módulo el Subgrupo

$$P = \left\{ g = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \beta & \det \alpha \end{array} \right) \middle| \, \alpha \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ y } \beta^t \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

El Subgrupo P es el Subgrupo que mantiene fija a la recta $t \mapsto (0, 0, t)$.

Para describir las clases de equivalencia escribiremos,

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in SL_3(\mathbb{R}),$$

Versión Global: Acción Natural de $SL_3(\mathbb{R})$ en $\mathbb{RP}^2$

Le podemos dar a $\mathbb{RP}^2$ una estructura de Espacio Homogéneo como sigue:

Consideremos el espacio de clases de equivalencia en el Grupo $SL_3(\mathbb{R})$ módulo el Subgrupo

$$P = \left\{ g = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \beta & \det \alpha \end{array} \right) \middle| \alpha \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ y } \beta^t \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

El Subgrupo P es el Subgrupo que mantiene fija a la recta $t \mapsto (0, 0, t)$.

Para describir las clases de equivalencia escribiremos,

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in SL_3(\mathbb{R}),$$

con

$$a \in \mathcal{M}at_{2\times 2}(\mathbb{R}); \quad d \in \mathbb{R}; \quad b, c^t \in \mathbb{R}^2.$$

con

$$a \in \mathcal{M}at_{2\times 2}(\mathbb{R}); \quad d \in \mathbb{R}; \quad b, c^t \in \mathbb{R}^2.$$

con

$$a \in \mathcal{M}at_{2\times 2}(\mathbb{R}); \quad d \in \mathbb{R}; \quad b, c^t \in \mathbb{R}^2.$$

Afirmación

Si $d \neq 0$ entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d \neq 0.$$

De esta manera podemos parametrizar a las órbitas de los elementos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R})$$

tales que $d \neq 0$.

De esta manera podemos parametrizar a las órbitas de los elementos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R})$$

tales que $d \neq 0$.

La correspondencia es,

$$\mathbb{R}^2 \ni z \quad \longleftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \in SL_3(\mathbb{R}).$$

Ahora parametrizaremos a las clases de equivalencia con $d = 0$.

Ahora parametrizaremos a las clases de equivalencia con $d = 0$.

Afirmación

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * & \lambda b \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Ahora parametrizaremos a las clases de equivalencia con $d = 0$.

Afirmación

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * & \lambda b \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Es decir, hay tantas clases de equivalencia como puntos en la Recta Proyectiva Real $\mathbb{RP}^1$.

Ahora parametrizaremos a las clases de equivalencia con $d = 0$.

Afirmación

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} * & \lambda b \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Es decir, hay tantas clases de equivalencia como puntos en la Recta Proyectiva Real $\mathbb{RP}^1$.

Proposición

Existe una correspondencia biyectiva,

$$SL_3(\mathbb{R})/P \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{RP}^1 \simeq \mathbb{RP}^2.$$

Proposición

Existe una correspondencia biyectiva,

$$SL_3(\mathbb{R})/P \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{RP}^1 \simeq \mathbb{RP}^2.$$

Esta proposición se sigue de los resultados que hemos obtenido y nos dá una estructura de Espacio Homogéneo para $\mathbb{RP}^2$.

Con esta identificación vemos que la acción natural $\psi : SL_3(\mathbb{R}) \times SL_3(\mathbb{R})/P \to SL_3(\mathbb{R})/P$ dada por $(g, [g_0]) \mapsto ([gg_0])$ se describe mediante,

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & d \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{11}x + a_{12}y + b_1}{c_1 x + c_2 y + d} \\ 0 & 1 & \frac{a_{21}x + a_{22}y + b_2}{c_1 x + c_2 y + d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Con esta identificación vemos que la acción natural
$\psi : SL_3(\mathbb{R}) \times SL_3(\mathbb{R})/P \to SL_3(\mathbb{R})/P$ dada por $(g, [g_0]) \mapsto ([gg_0])$ se describe mediante,

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & d \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right) =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{11}x + a_{12}y + b_1}{c_1 x + c_2 y + d} \\ 0 & 1 & \frac{a_{21}x + a_{22}y + b_2}{c_1 x + c_2 y + d} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

En el subconjunto donde $c_1 x + c_2 y + d \neq 0$.

Ahora sea

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la base usual de $\mathfrak{sl}_3$.

Al considerar la acción de $SL_3(\mathbb{R})$ en el Espacio Proyectivo y luego restringir nuestra atención a la Acción de $SL_3(\mathbb{R})$ en el abierto que hemos identificado con $\mathbb{R}^2$, observamos que los Campos Vectoriales en $\mathbb{R}^2$ correspondientes a estas matrices son:

Al considerar la acción de $SL_3(\mathbb{R})$ en el Espacio Proyectivo y luego restringir nuestra atención a la Acción de $SL_3(\mathbb{R})$ en el abierto que hemos identificado con $\mathbb{R}^2$, observamos que los Campos Vectoriales en $\mathbb{R}^2$ correspondientes a estas matrices son:

1. $\mathbf{v}_{H_1} = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$,
2. $\mathbf{v}_{H_2} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$,
3. $\mathbf{v}_{E_1} = y\frac{\partial}{\partial x}$,
4. $\mathbf{v}_{E_2} = \frac{\partial}{\partial y}$,
5. $\mathbf{v}_{E_3} = \frac{\partial}{\partial x}$,
6. $\mathbf{v}_{F_1} = x\frac{\partial}{\partial y}$,
7. $\mathbf{v}_{F_2} = -xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}$,
8. $\mathbf{v}_{F_3} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y}$.

Los Campos Vectoriales correspondientes son:

$$\mathbf{v}_{H_1} = x\tfrac{\partial}{\partial x} - y\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{H_2} = x\tfrac{\partial}{\partial x} + 2y\tfrac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathbf{v}_{E_1} = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_{E_2} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{E_3} = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathbf{v}_{F_1} = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{F_2} = -xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{F_3} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y}$$

Los Campos Vectoriales correspondientes son:

$$\mathbf{v}_{H_1} = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{H_2} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathbf{v}_{E_1} = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_{E_2} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{E_3} = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathbf{v}_{F_1} = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{F_2} = -xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{F_3} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y}$$

Recordemos que los Campos Vectoriales asociados al Grupos de Simetría de la Recta son:

$$\mathbf{v}_1 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathbf{v}_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_6 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_7 = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_8 = x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Los Campos Vectoriales correspondientes son:

$$\mathbf{v}_{H_1} = x\tfrac{\partial}{\partial x} - y\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{H_2} = x\tfrac{\partial}{\partial x} + 2y\tfrac{\partial}{\partial y},$$
$$\mathbf{v}_{E_1} = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_{E_2} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{E_3} = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$\mathbf{v}_{F_1} = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{F_2} = -xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_{F_3} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y}$$

Recordemos que los Campos Vectoriales asociados al Grupos de Simetría de la Recta son:

$$\mathbf{v}_1 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$\mathbf{v}_5 = x^2\tfrac{\partial}{\partial x} + xy\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_6 = x\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathbf{v}_7 = y\tfrac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbf{v}_8 = x\tfrac{\partial}{\partial x}.$$

Como podemos ver estos dos conjuntos de Campos Vectoriales generan a la misma Álgebra de Lie de Campos Vectoriales.

Como podemos ver estos dos conjuntos de Campos Vectoriales generan a la misma Álgebra de Lie de Campos Vectoriales.

Como podemos ver estos dos conjuntos de Campos Vectoriales generan a la misma Álgebra de Lie de Campos Vectoriales.

De esto concluímos que la Acción Natural de $SL_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{RP}^2$ extiende a la Acción del Grupo de Simetría de la Recta sobre $\mathbb{R}^2$.

Analicemos ahora a las ecuaciones de Maxwell.

Analicemos ahora a las ecuaciones de Maxwell.

Sean $E = (E_1, E_2, E_3)$ y $B = (B_1, B_2, B_3)$ las componentes eléctrica y magnética respectivamente. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío y sin la presencia de otras cargas ni campos magnéticos son

1. $\nabla \cdot E = 0$, i.e.,

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0.$$

2. $\nabla \cdot B = 0$, i.e.,

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0.$$

3. $\nabla \times E = -\partial_t B$, i.e,

$$(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_2}) = -(\frac{\partial B_1}{\partial t}, \frac{\partial B_2}{\partial t}, \frac{\partial B_3}{\partial t}).$$

4. $\nabla \times B = -\partial_t E$, i.e,

$$(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3}, \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1}, \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2}) = (\frac{\partial E_1}{\partial t}, \frac{\partial E_2}{\partial t}, \frac{\partial E_3}{\partial t}).$$

Notemos ahora que si

$$F = B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$$
$$+ E_1 dx_1 \wedge dt + E_2 dx_2 \wedge dt + E_3 dx_3 \wedge dt$$

es una 2-forma en $\Omega^2(\mathbb{R}^{3,1})$ (el espacio de 2-formas en $\mathbb{R}^4$ con una forma bilineal simétrica B_T de signatura (3,1)), entonces

Notemos ahora que si

$$F = B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ + E_1 dx_1 \wedge dt + E_2 dx_2 \wedge dt + E_3 dx_3 \wedge dt$$

es una 2-forma en $\Omega^2(\mathbb{R}^{3,1})$ (el espacio de 2-formas en $\mathbb{R}^4$ con una forma bilineal simétrica B_T de signatura (3,1)), entonces

$$*F = E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ - E_1 dx_1 \wedge dt - E_2 dx_2 \wedge dt - E_3 dx_3 \wedge dt.$$

donde * es el operador de Hodge asociada a una forma bilineal de signatura (3,1).

Sean $F_E = (E_1, E_2, E_3)$ y $F_B = (B_1, B_2, B_3)$ notemos que

Sean $F_E = (E_1, E_2, E_3)$ y $F_B = (B_1, B_2, B_3)$ notemos que

Si $dF = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = dF = & (\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ & + [\frac{\partial B_1}{\partial t} + (\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3})] dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt \\ & + [\frac{\partial B_2}{\partial t} + (\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1})] dx_3 \wedge dx_1 \wedge dt \\ & + [\frac{\partial B_3}{\partial t} + (\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2})] dx_3 \wedge dx_2 \wedge dt \end{aligned}$$

Sean $F_E = (E_1, E_2, E_3)$ y $F_B = (B_1, B_2, B_3)$ notemos que

Si $dF = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 = dF = &(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&+ [\frac{\partial B_1}{\partial t} + (\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3})] dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt \\
&+ [\frac{\partial B_2}{\partial t} + (\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1})] dx_3 \wedge dx_1 \wedge dt \\
&+ [\frac{\partial B_3}{\partial t} + (\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2})] dx_3 \wedge dx_2 \wedge dt
\end{aligned}
$$

es decir, $dF = 0$ si y solo si

$$\nabla \cdot F_B = 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla \times F_E = -\partial_t F_B$$

Por otro lado si $\delta F = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 = \delta * F = (\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
+ [\frac{\partial E_1}{\partial t} - (\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3})] dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt \\
+ [\frac{\partial E_2}{\partial t} - (\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1})] dx_3 \wedge dx_1 \wedge dt \\
+ [\frac{\partial E_3}{\partial t} - (\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2})] dx_3 \wedge dx_2 \wedge dt
\end{aligned}
$$

Por otro lado si $\delta F = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 = \delta * F = (&\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&+ [\frac{\partial E_1}{\partial t} - (\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3})] dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt \\
&+ [\frac{\partial E_2}{\partial t} - (\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1})] dx_3 \wedge dx_1 \wedge dt \\
&+ [\frac{\partial E_3}{\partial t} - (\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2})] dx_3 \wedge dx_2 \wedge dt
\end{aligned}
$$

es decir, $\delta F = 0$ si y solo si

$$\nabla \cdot F_E = 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla \times F_B = \partial_t F_E$$

Por otro lado si $\delta F = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 = \delta * F = (\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
+ [\frac{\partial E_1}{\partial t} - (\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3})] dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt \\
+ [\frac{\partial E_2}{\partial t} - (\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1})] dx_3 \wedge dx_1 \wedge dt \\
+ [\frac{\partial E_3}{\partial t} - (\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2})] dx_3 \wedge dx_2 \wedge dt
\end{aligned}
$$

es decir, $\delta F = 0$ si y solo si

$$\nabla \cdot F_E = 0 \qquad \text{y} \qquad \nabla \times F_B = \partial_t F_E$$

¡Por lo tanto $dF = 0$ y $\delta F = 0$ si y solo si F_E y F_B satisfacen las ecuaciones de Maxwell.!

Si reducimos el problema de las ecuaciones de Maxwell a dos dimensiones, como hicimos con la recta, entonces lo que buscamos es una 1-forma $F = vdx + udy$ tal que $dF = 0$ y $\delta F = 0$, ahora, Si reducimos el problema de las ecuaciones de Maxwell a dos dimensiones, como hicimos con la recta, entonces lo que buscamos es una 1-forma $F = vdx + udy$ tal que $dF = 0$ y $\delta F = 0$, ahora,

1. si $dF = 0$, entonces

$$(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x})dx \wedge dy = 0$$

   es decir $dF = 0$ si y solo si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

2. si $\delta F = 0$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

   es decir $\delta F = 0$ si y solo si $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

¡ ¡ ¡ Pero esto nos dice que F satisface $dF = 0$ y $\delta F = 0$ si y solo si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann!!!

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

¡ ¡ ¡ Pero esto nos dice que F satisface $dF = 0$ y $\delta F = 0$ si y solo si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann!!!

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

En este caso sabemos que estas ecuaciones son preservadas por los automorfismos conformes de $\mathbb{R}^2$ que actúan vía transformaciones de Moebius:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

además estas transformaciones están perfectamente definidas en $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

A. Einstein puso de manifiesto en 1905 que las leyes de la física debían ser invariantes ante transformaciones de un espacio tetradimensional—llamado espacio-tiempo de Minkowsky y denotado por $\mathbb{T}$—que respetara no la descomposición directa,

$$\mathbb{T} = (\text{espacio}) \oplus (\text{Tiempo})$$

A. Einstein puso de manifiesto en 1905 que las leyes de la física debían ser invariantes ante transformaciones de un espacio tetradimensional—llamado espacio-tiempo de Minkowsky y denotado por $\mathbb{T}$—que respetara no la descomposición directa,

$$\mathbb{T} = (\text{espacio}) \oplus (\text{Tiempo})$$

sino que preservara una forma bilineal simétrica, no degenerada de signatura $(3, 1)$

$$B_T : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$$

A. Einstein puso de manifiesto en 1905 que las leyes de la física debían ser invariantes ante transformaciones de un espacio tetradimensional—llamado espacio-tiempo de Minkowsky y denotado por $\mathbb{T}$—que respetara no la descomposición directa,

$$\mathbb{T} = (\text{espacio}) \oplus (\text{Tiempo})$$

sino que preservara una forma bilineal simétrica, no degenerada de signatura $(3, 1)$

$$B_T : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$$

La conclusión de Einstein fué resultado de observar que el grupo de tales transformaciones (llamadas de Lorentz) preservaban la forma de las ecuaciones de Maxwell.

La conclusión de Einstein fué resultado de observar que el grupo de tales transformaciones (llamadas de Lorentz) preservaban la forma de las ecuaciones de Maxwell.

La conclusión de Einstein fué resultado de observar que el grupo de tales transformaciones (llamadas de Lorentz) preservaban la forma de las ecuaciones de Maxwell.

Antes del advenimiento de la relatividad especial, la interpretación de las treansfomraciones de Lorentz se hacía a la luz de la descomposición $\mathbb{T} = (\text{Espacio}) \oplus (\text{Tiempo})$

La conclusión de Einstein fué resultado de observar que el grupo de tales transformaciones (llamadas de Lorentz) preservaban la forma de las ecuaciones de Maxwell.

Antes del advenimiento de la relatividad especial, la interpretación de las treansfomraciones de Lorentz se hacía a la luz de la descomposición $\mathbb{T} = (\text{Espacio}) \oplus (\text{Tiempo})$

Para decirlo en el lenguaje de la teoría de grupos, a las transformaciones que dejaban invariantes a las ecuaciones del electromagnetismo se les interpretó únicamente dentro del contexto de la descomposición $\mathrm{S}(\mathrm{O}_3 \times \mathrm{O}_1) \subset \mathrm{SO}_{3,1}$.

La conclusión de Einstein fué resultado de observar que el grupo de tales transformaciones (llamadas de Lorentz) preservaban la forma de las ecuaciones de Maxwell.

Antes del advenimiento de la relatividad especial, la interpretación de las treansfomraciones de Lorentz se hacía a la luz de la descomposición $\mathbb{T} = (\text{Espacio}) \oplus (\text{Tiempo})$

Para decirlo en el lenguaje de la teoría de grupos, a las transformaciones que dejaban invariantes a las ecuaciones del electromagnetismo se les interpretó únicamente dentro del contexto de la descomposición $\mathsf{S}(\mathsf{O}_3 \times \mathsf{O}_1) \subset \mathsf{SO}_{3,1}$.

Es en éste sentido que la teoría electromagnética cobró, en las manos de Einstein y Poincaré, un carácter más fundamental que las concepciones newtonianas sobre las que la mecánica clásica fue construida.

Es en éste sentido que la teoría electromagnética cobró, en las manos de Einstein y Poincaré, un carácter más fundamental que las concepciones newtonianas sobre las que la mecánica clásica fue construida.

Es en éste sentido que la teoría electromagnética cobró, en las manos de Einstein y Poincaré, un carácter más fundamental que las concepciones newtonianas sobre las que la mecánica clásica fue construida.

Al parecer, cuando se planteó el problema de buscar transformaciones para las que las leyes de la física permanecieran invariantes, se estaba aceptando que la forma de las ecuaciones de Maxwell debía ser la misma para todos los observadores inerciales.

Es en éste sentido que la teoría electromagnética cobró, en las manos de Einstein y Poincaré, un carácter más fundamental que las concepciones newtonianas sobre las que la mecánica clásica fue construida.

Al parecer, cuando se planteó el problema de buscar transformaciones para las que las leyes de la física permanecieran invariantes, se estaba aceptando que la forma de las ecuaciones de Maxwell debía ser la misma para todos los observadores inerciales.

Concretamente, y añadiendo las translaciones del espacio-tiempo, el principio de la relatividad especial puede enunciarse de la siguiente manera:

Es en éste sentido que la teoría electromagnética cobró, en las manos de Einstein y Poincaré, un carácter más fundamental que las concepciones newtonianas sobre las que la mecánica clásica fue construida.

Al parecer, cuando se planteó el problema de buscar transformaciones para las que las leyes de la física permanecieran invariantes, se estaba aceptando que la forma de las ecuaciones de Maxwell debía ser la misma para todos los observadores inerciales.

Concretamente, y añadiendo las translaciones del espacio-tiempo, el principio de la relatividad especial puede enunciarse de la siguiente manera:

> Las leyes de la física deben permanecer invariantes ante transformaciones del grupo de Poincaré $G = SO_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

Las leyes de la física deben permanecer invariantes ante transformaciones del grupo de Poincaré $G = SO_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

Las leyes de la física deben permanecer invariantes ante transformaciones del grupo de Poincaré $G = SO_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

Pero al parecer las grandes revoluciones necesitan de un largo período de "asentamiento" y por ello resulta difícil hacer correcciones drásticas en los cambios drásticos recién introducidos.

Las leyes de la física deben permanecer invariantes ante transformaciones del grupo de Poincaré $G = SO_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

Pero al parecer las grandes revoluciones necesitan de un largo período de "asentamiento" y por ello resulta difícil hacer correcciones drásticas en los cambios drásticos recién introducidos.

5 años después de la interpretacin Einsteniana de las transformaciones de Lorentz, Bateman encuentra que las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes ante el grupo de las transformaciones conformes de $\mathbb{R}^{3,1}$. Estos automorfismos constan de 15 parámetros, son localmente isomorfos a $\mathrm{SU}_{2,2}$ y contienen como subgrupo al grupo de Pincaré $\mathrm{SO}_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

Las leyes de la física deben permanecer invariantes ante transformaciones del grupo de Poincaré $G = SO_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

Pero al parecer las grandes revoluciones necesitan de un largo período de “asentamiento” y por ello resulta difícil hacer correcciones drásticas en los cambios drásticos recién introducidos.

5 años después de la interpretacíń Einsteniana de las transformaciones de Lorentz, Bateman encuentra que las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes ante el grupo de las transformaciones conformes de $\mathbb{R}^{3,1}$. Estos automorfismos constan de 15 parámetros, son localmente isomorfos a $\mathrm{SU}_{2,2}$ y contienen como subgrupo al grupo de Pincaré $\mathrm{SO}_{3,1} \ltimes \mathbb{R}^4$.

¿Porqué no se modificó inmediatamente el enunciado anterior?

¿Porqué no se modificó inmediatamente el enunciado anterior?

¿Porqué no se modificó inmediatamente el enunciado anterior?

¡Esto es por que las transformaciones conformes no están globalmente definidas en todos los puntos de $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}^4$!

¿Porqué no se modificó inmediatamente el enunciado anterior?

¡Esto es por que las transformaciones conformes no están globalmente definidas en todos los puntos de $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}^4$!

Sin embargo, es posible extender $\mathbb{T}$ a una variedad mas grande en donde estas ecuaciones si estén globalmente definidas.

Si identificamos a $\mathbb{R}^{3,1}$ con $H(2)$ (el espacio de matrices hermitianas de 2×2) como es usual en la física, entonces la acción del álgebra de Lie del grupo conforme en $H(2)$ está dada por los campos vectoriales

$$X_T : x \mapsto -\frac{1}{2}[u + (\xi x + x\xi^*) + xv^a x]$$

con $u, v \in H(2)$, $tr(\xi) \in \mathbb{R}$ y v^a es la adjunta de cramer de v.

Si identificamos a $\mathbb{R}^{3,1}$ con $H(2)$ (el espacio de matrices hermitianas de 2×2) como es usual en la física, entonces la acción del álgebra de Lie del grupo conforme en $H(2)$ está dada por los campos vectoriales

$$X_T : x \mapsto -\frac{1}{2}[u + (\xi x + x\xi^*) + xv^a x]$$

con $u, v \in H(2)$, $tr(\xi) \in \mathbb{R}$ y v^a es la adjunta de cramer de v.

Al integrar los campo vectoriales de la forma

$$x \mapsto -\frac{1}{2}u$$

obtenemos

$$\exp tX_T(x) = \Phi_t(x) = x - \frac{1}{2}tu$$

que son traslaciones.

Al integrar los campos de la forma

$$x \mapsto -\frac{1}{2}(\xi x + x\xi^*)$$

obtenemos

$$\exp tX_T(x) = \Phi_t(x) = (\exp{(-\frac{1}{2})t\xi})x(\exp{(-\frac{1}{2})t\xi})^*$$

que nos da los elementos de $SO_{3,1}$ suplementado con las transformaciones de escala.

Al integrar los campos de la forma

$$x \mapsto -\frac{1}{2}(\xi x + x\xi^*)$$

obtenemos

$$\exp tX_T(x) = \Phi_t(x) = (\exp(-\frac{1}{2})t\xi)x(\exp(-\frac{1}{2})t\xi)^*$$

que nos da los elementos de $\mathrm{SO}_{3,1}$ suplementado con las transformaciones de escala.

De hecho el subgrupo generado por estos dos tipos de campos vectoriales es el subgrupo P^{11} que es isomorfo al grupo de Poincaré suplementado por las transformaciones de escala.

Sin embargo al integrar

$$x \mapsto -\frac{1}{2}(xv^a x)$$

obtenemos

$$\exp tX_T(x) = \Phi_t(x) = x(1_{2\times 2} + (\frac{1}{2})tv_a x)^{-1}$$

el cual no está globalmente definido.

Sin embargo existe una manera de extender el dominio de definición:

Sin embargo existe una manera de extender el dominio de definición:

Consideremos la acción natural de $\mathrm{SU}_{2,2}$ en $G_2(\mathbb{C}^4)$ y restrinjamos nuestra atención al subespacio real $X^{3,1} \subset G_2(\mathbb{C}^4)$ definido por

$$X^{3,1} \simeq \mathrm{U}_2 = \{z \in \mathbb{C}^{2\times 2} : zz^* = 1\} \simeq S^3 \times S^1/\mathbb{Z}_2$$

esta acción resulta ser la extensión de la acción definida anteriormente.

Notemos las similitudes entre esta construcciones y las que ocurren al compactificar el plano complejo.

Notemos las similitudes entre esta construcciones y las que ocurren al compactificar el plano complejo.

Considéremos,

el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ el espacio-tiempo complejificado $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$

Notemos las similitudes entre esta construcciones y las que ocurren al compactificar el plano complejo.

Considéremos,

el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ el espacio-tiempo complejificado $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$

Al elegir una orientación en el espacio, se obtiene la acción del grupo

$\mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ $\mathsf{SL}(4,\mathbb{C})$

Notemos las similitudes entre esta construcciones y las que ocurren al compactificar el plano complejo.

Considéremos,

el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ el espacio-tiempo complejificado $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$

Al elegir una orientación en el espacio, se obtiene la acción del grupo

$$\mathsf{SL}(2, \mathbb{C}) \qquad\qquad \mathsf{SL}(4, \mathbb{C})$$

En particular se puede considerar la acción de la forma real

$$\mathsf{SU}(1, 1) \qquad\qquad \mathsf{SU}(2, 2)$$

Notemos las similitudes entre esta construcciones y las que ocurren al compactificar el plano complejo.

Considéremos,

el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ el espacio-tiempo complejificado $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$

Al elegir una orientación en el espacio, se obtiene la acción del grupo

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \qquad \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$$

En particular se puede considerar la acción de la forma real

$$\mathrm{SU}(1,1) \qquad \mathrm{SU}(2,2)$$

En la variedad compacta

$$G_1(\mathbb{C}^2)(=\mathbb{CP}^1 = S^2) \qquad G_2(\mathbb{T}_{\mathbb{C}})$$

La descripción de esta variedad compleja en coordenadas locales se realiza, vía proyección estereográfica en términos de

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad\qquad z = x + iy \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

con,

$$x, y \in \mathbb{R} \qquad\qquad x, y \in \mathbb{H}^{2\times 2}$$

La descripción de esta variedad compleja en coordenadas locales se realiza, vía proyección estereográfica en términos de

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad\qquad z = x + iy \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

con,

$$x, y \in \mathbb{R} \qquad\qquad x, y \in \mathbb{H}^{2\times 2}$$

la acción del grupo en coordenadas locales está dada por

$$z \mapsto (cz + d)^{-1}(az + d),$$

con

$$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C} \qquad\qquad a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

$$\begin{array}{cc} \bar{c}a \in \mathbb{R},\ \bar{b}d \in \mathbb{R}, & c^*a \in \mathbb{H}^{2\times 2},\ b^*a \in \mathbb{H}^{2\times 2}, \\ \bar{a}d - \bar{c}b = 1 & a^*d - c^*b = 1_{2\times 2}. \end{array}$$

El interior del disco unitario se describe como

$\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} < 1\} \quad \{z \in \mathbb{C}^{2\times 2} : 1_{2\times 2} - zz^{*}\text{es positivo definido}\}$

El interior del disco unitario se describe como

$$\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} < 1\} \quad \{z \in \mathbb{C}^{2\times 2} : 1_{2\times 2} - zz^* \text{es positivo definido}\}$$

La frontera de Shilov de este dominio es la variedad compacta real

$$U(1) \simeq S^1 \qquad\qquad U(2) \simeq S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$$

$$\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 1\} \qquad\qquad \{z \in \mathbb{C}^{2\times 2} : zz^* = 1_{2\times 2}\}$$

El interior del disco unitario se describe como

$$\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} < 1\} \qquad \{z \in \mathbb{C}^{2\times 2} : 1_{2\times 2} - zz^* \text{es positivo definido}\}$$

La frontera de Shilov de este dominio es la variedad compacta real

$$U(1) \simeq S^1 \qquad U(2) \simeq S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$$

$$\{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 1\} \qquad \{z \in \mathbb{C}^{2\times 2} : zz^* = 1_{2\times 2}\}$$

En ella actúa transitivamente la forma real del grupo SL, se trata de la órbita de los elementos isotrópicos en

$$G_1(\mathbb{C}^2) \qquad G_2(\mathbb{T}_{\mathbb{C}})$$