Introducción a la Teoría de Representaciones de Grupos de Lie

Raúl Gómez Muñoz

4 de diciembre de 2008

Introducción

Estas notas tienen dos objetivos principales. El primero de ellos es responder de manera rápida a la pregunta "¿De qué trata la teoría de representaciones?" Para responder a esta trataremos de explicar mediante ejemplos cuales son los resultados mas importantes de esta teoría y los problemas que trata de resolver. Es por esto que el contenido de estas notas es sumamente informal y se le da preferencia a los ejemplos sobre las demostraciones. En pocos resultados se da una demostración, y en los que se da, se omiten los detalles mas técnicos de la misma. Esperamos que los ejemplos y las explicaciones presentadas aquí sean suficientes para dar al lector una idea intuitiva, pero clara, del material cubierto.

El segundo objetivo de estas notas es que sirvan como guía al lector interesado en iniciar un estudio serio de la teoría de representaciones. Muchas veces, al iniciar el estudio de un tema nuevo, es difícil comprender la motivación subyacente en las definiciones abstractas y los lemas técnicos. También es complicado conocer de antemano la dirección que se va a tomar, así como distinguir entre los resultados técnicos y los importantes. La idea es que, despues de leer estas notas, el lector pueda iniciar el estudio de la teoría de representaciones con una idea clara de la dirección que se quiere tomar, y pueda distinguir fácilmente la "paja" del material importante para la teoría.

Hablemos ahora acerca del material que cubren estas notas. En la primera sección enunciaremos el célebre teorema de Peter-Weyl, el cual puede ser considerado como una generalización de la teoría de Fourier en el círculo S^1. Recordemos que la teoría de Fourier nos dice que las funciones $\{f_n(x) = e^{inx}\}$ forman una base de Hilbert para $L^2(S^1)$. La relación entre este resultado y la teoría de representaciones es la siguiente: Sea G un grupo compacto, y sea (π, V) una representación irreducible de G, es decir un morfismo

$$\pi : G \longrightarrow GL(V)$$

tal que los únicos subespacios invariantes de V son $\{0\}$ y V. Dada una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, podemos asociar a cada elemento $g \in G$ una matriz $\pi(g)$

con coeficientes en $\mathbb{C}$. Observemos que cada uno de estos coeficientes define, de esta manera, una función en el grupo. Llamaremos a este tipo de funciones las *funciones coeficientes* de G. En el caso de S^1 las funciones coeficiente son precisamente las funciones $f_n(x) = e^{inx}$, por lo tanto la teoría de Fourier nos dice que las funciones coeficiente de S^1 forman una base de Hilbert para $L^2(S^1)$. El teorema de Peter-Weyl nos dice que el mismo resultado es válido para cualquier grupo compacto G. Terminaremos esta sección dando algunas indicaciones sobre como obtener, dado un grupo compacto G, todas sus representaciones irreducibles.

En la segunda sección veremos como relacionar la teoría de representaciones de un grupo reductivo G, no necesariamente compacto, con el espacio $L^2(G)$. Esta es la sección mas informal de todas, pero nos dará la motivación para estudiar los temas que trataremos en las secciones tres y cuatro. Sea G un grupo de Lie, definiremos su espectro unitario como

$$\hat{G} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de equivalencia de las representaciones} \\ \text{unitarias irreducibles de } G \end{array} \right\}.$$

EL teorema de Peter-Weyl nos dice que si G es un grupo compacto, entonces el espacio $L^2(G)$ es generado por las funciones coeficiente de los elementos de su espectro unitario. Desafortunadamente este teorema es falso si G no es compacto, por ejemplo, sea $G = \mathbb{R}$, entonces

$$\hat{G} = \{(\pi_\xi, V_\xi) \,|\, \xi \in \mathbb{R}, \dim V_\xi = 1 \text{ y } \pi_\xi(x)v = e^{i\xi x}v \text{ para toda } v \in V_\xi\},$$

y sus funciones coeficiente son, por lo tanto, las funciones $f_\xi(x) = e^{i\xi x}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Sin embargo estas funciones no generan al espacio $L^2(\mathbb{R})$, porque, para empezar, ni siquiera son cuadrado integrables. A pesar de todo existe una manera de generalizar la teoría de Fourier de S^1 a $\mathbb{R}$. Sea $f \in C^\infty(S^1)$, y definamos para cada $n \in \mathbb{Z} \simeq \hat{S}^1 = \{(\pi_n, V_n) \,|\, n \in \mathbb{Z}, \dim V_n = 1, \pi_n(x)v = e^{inx}v \text{ para todo } v \in V_n\}$,

$$\hat{f}(n) = \int_{S^1} f(x)e^{inx}\,dx,$$

entonces, de acuerdo con la teoría de Fourier para S^1,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{-inx},$$

en particular,

$$f(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n). \tag{1}$$

Este es el resultado que podemos generalizar para $\mathbb{R}$, sea $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, y definamos

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}\,dx,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,d\xi. \tag{2}$$

Observemos que la diferencia entre ecuaciones (1) y (2) es que en la primera estamos usando la medida puntual en $\mathbb{Z}$, mientras que en la segunda estamos usando una normalización de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, para generalizar este resultado al caso en el que G es un grupo reductivo, necesitamos encontrar una medida μ en $\hat{G}$, llamada la medida de Plancherel, tal que

$$f(e) = \int_{\hat{G}} \Theta_\gamma(f)\, d\mu(\gamma),$$

donde $e \in G$ es la identidad en el grupo y $\Theta_\gamma(f)$ es el caracter de un representante de γ, es decir

$$\Theta_\gamma(f) = \mathrm{tr}\,(\pi_\gamma(f))$$

donde $\pi_\gamma(f) = \int_G f(g)\pi_\gamma(g)\, dg$.

Las secciones tres y cuatro son de un corte marcadamente mas técnico que la secciones anteriores. Sin embargo esperamos que los ejemplos y resultados de las secciones uno y dos nos den una motivación para estudiar los temas que presentamos en estas secciones.

La sección tres estudia la estructura interna de los grupos semisimples. Recodemos que dado un grupo de Lie G, le podemos asociar el álgebra de Lie de los campos vectoriales invariantes por la izquierda $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) := \mathfrak{X}(G)^G$. En general es mucho mas sencillo entender la estructura del algebra de Lie asociada a G que entender la estructura del grupo mismo, y es aun mas sencillo entender la estructura de su complexificación $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. En particular si G es un grupo semisimple, entonces $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ es una algebra semisimple y compleja, y por lo tanto su representación adjunta

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}),$$

dada por $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$, es una *representación fiel*, es decir, $\mathrm{Ker\ ad} = \{0\}$. Sea $\mathfrak{h}_\mathbb{C} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ una subalgebra maximal entre las subalgebras de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ que son abelianas y tales que todos sus elementos son diagonalizables bajo ad. A toda algebra con estas características se le llama una *subalgebra de Cartan*. Como todos los elementos de $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ conmutan entre si, es posible encontrar una base de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ que diagonaliza simultaneamente a todos los elementos $\mathrm{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$. La descripción de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ en términos de esta base es fundamental para el estudio de las álgebras de Lie semisimples. Una vez estudiadas las algebras de Lie semisimples y complejas procederemos a estudiar las formas reales de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, es decir las algebras de Lie reales $\mathfrak{g}$ tales que $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$. En esta sección indicaremos las descomposiciones de Cartan, Iwasawa y Gelfand-Naimark de un algebra de Lie real semisimple $\mathfrak{g}$, y usaremos la relación entre un grupo de Lie G y su álgebra de Lie asociada para dar las correspondientes descomposiciones de G. La sección termina con el estudio de los subgrupos parabólicos de G, los cuales son fundamentales en el estudio de las representaciones irreducibles de G y son una pieza fundamental de la "filosofía de las formas cuspidales" de Harish-Chandra.

La sección cuatro estudia las representaciones irreducibles de un grupo reductivo G. Empezaremos introduciendo la teoría de los $(\mathfrak{g}, K)$-módulos, que nos permite olvidarnos de los aspectos analíticos de la teoría de representaciones de grupos reductivos, y concentrarnos en los aspectos algebraicos. Después estudiaremos la serie principal de representaciones, que es una serie de representaciones inducidas a partir de los subgrupos parabólicos mínimos, también conocidos como *subgrupos de Borel*, y enunciaremos el teorema de la subrepresentación de Casselman, que nos dice que toda representación irreducible se puede obtener como un submódulo de un elemento de la serie principal de representaciones.

Sea (π, H) una representación de G, donde H es un espacio de Hilbert. Diremos que (π, H) es *cuadrado integrable* si sus funciones coeficiente son cuadrado integrables. En otras palabras, si $v, w \in V$, definamos $c_{v,w}(g) = \langle \pi(g)v, w \rangle$. Decimos que (π, H) es cuadrado integrable si

$$\int_G |c_{v,w}(g)|^2 \, dg < \infty \qquad \forall v, w \in H.$$

Por otra parte, diremos que (π, H) es una representación *templada*, si

$$\int_G |c_{v,w}(g)|^{2+\epsilon} \, dg < \infty \qquad \forall v, w \in H, \quad \forall \epsilon > 0.$$

La "filosofía de las formas cuspidales" nos dice que todas las representaciones templadas provienen de inducir una representación cuadrado integrable sobre un subgrupo parabólico cuspidal. Por otro lado, el teorema de clasificación de Langlands nos permite obtener todas las representaciones irreducibles de G a partir de inducir sobre las representaciones templadas de sus subgrupos parabólicos. Juntando estos dos resultados podemos reducir el problema de clasificar las representaciones irreducibles de un grupo reductivo G al problema de clasificar las representaciones cuadrado integrables de sus "subgrupos parabólicos cuspidales".

La teoría de representaciones es una teoría extensa y compleja. El material presentado aquí no es mas que una pequeña parte de los temas que abarca. Los temas aquí cubiertos fueron elegidos por razones puramente personales y fácilmente se puedo haber dado a estas notas una dirección completamente diferente. Esperamos, sin emgargo, que sirvan como una introducción rápida a la teoría de representaciones y que puedan servir como una brújula al lector interesado en sumergirse en este tema.

1. El Teorema de Peter-Weyl

EL teorema de Peter-Weyl es uno de los resultados mas importantes en la teoría de representaciones. Este teorema relaciona la teoría de representaciones de un grupo de Lie compacto G con el espacio $L^2(G)$ de las funciones cuadrado integrable. Empezaremos esta sección dando las definiciones básicas de grupo y álgebra de Lie y la relación entre un grupo de Lie y su álgebra, y estableceremos la notación que usaremos en esta sección.

En la siguiente subsección estudiaremos las representaciones de los grupos de Lie, con especial énfasis en el caso en el que nuestro grupo G es compacto.

Nuestro objetivo en esta subsección es descomponer $L^2(G)$ como una suma directa de representaciones irreducibles de $G \times G$ bajo la acción regular por la izquierda y por la derecha. Para hacerlo primero definiremos los conceptos de representación irreducible, completamente reducible y representación unitaria. Después observaremos que si G es compacto, entonces toda representación de G es unitaria y que todas las representaciones irreducibles de G son de dimensión finita. Ahora dada una representación irreducible de G, sus funciones coeficientes forman una representación irreducible de $G \times G$ bajo la acción regular por la izquierda y la derecha, y por lo tanto forman una componente irreducible de $L^2(G)$. Finalmente el teorema de Peter-Weyl nos dirá que la suma directa de todas estas componentes es suficiente para generar el espacio de las funciones cuadrado integrables.

Del teorema de Peter-Weyl vemos que para entender el espacio $L^2(G)$ debemos conocer todas las representaciones irreducibles de G. En la última subsección observaremos que todas las representaciones irreducibles de G, con G compacto y conexo están en relación 1-1 con la representaciones irreducibles y de dimensión finita de su algebra de Lie. Además observaremos que las algebras de Lie de un grupo compacto son reductivas. Por lo tanto podemos reducir el problema de calcular las representaciones irreducibles de G al problema de calcular las representaciones irreducibles y de dimensión finita de las álgebras de Lie reductivas.

1.1. Preliminares

Definición 1.1 *Un grupo de Lie es un grupo G con una estructura de variedad diferenciable que es compatible con las operaciones de multiplicación y tomar inversa, es decir, la función*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es diferenciable.

Dado un elemento $a \in G$ podemos dos funciones

$$\begin{aligned} L_a : G &\longrightarrow G \\ x &\mapsto ax \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} R_a : G &\longrightarrow G \\ x &\mapsto xa \end{aligned}$$

del grupo sobre si mismo. Estas funciones son difeomorfismos del grupo bajo la estructura de variedad diferenciable y se llaman *multiplicación por la izquierda* y *multiplicación por la derecha* respectivamente.

Definición 1.2 *Una álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ junto con una operación bilinear $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$, llamada el braquet de Lie, con las siguientes propiedades*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(Antisimetría)*

2. $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ *(Identidad de Jacobi)*

para todo $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$.

Sea G un grupo de Lie, y sea

$$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G):=\mathfrak{X}(G)^G$$

el espacio de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda. Este espacio tiene una estructura natural de álgebra de Lie dada por el conmutador de campos vectoriales, $[X,Y]=XY-YX$ y lo llamaremos el *Álgebra de Lie asociada a G*

Teorema 1.3 *Dada un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *existe un único (hasta isomorfismo) grupo de Lie* $\tilde{G}$ *con la propiedad de ser conexo, simplemente conexo y tal que* $Lie(\tilde{G})=\mathfrak{g}$. *Además, si* G *es otro grupo de Lie tal que* $Lie(G)=\mathfrak{g}$, *entonces existe un homomorfismo cubriente* $p:\tilde{G}\longrightarrow G$

1.2. Representaciones de Grupos de Lie

Definición 1.4 *Sea* G *un grupo de Lie y sea* V *un espacio vectorial topológico localmente convexo (EVTLC). Una representación de* G *en* V *es un homomorfismo*

$$\pi:G\longrightarrow GL(V)$$

que es continuo en la topología fuerte de V, *es decir, la función* $(g,v)\mapsto\pi(g)v$ *es continua. En este caso decimos que* (π,V) *es una representación de* G.

Ejemplo 1.5 **A)** Sea $G=S^1$, y sea

$$\begin{aligned}\pi:S^1&\longrightarrow GL_2(\mathbb{C})\\ \theta&\mapsto\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Entonces $(\pi,\mathbb{C}^2)$ es una representación de S^1.

B) Sea $G=\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ y consideremos la representación dada por asignar a cada elemento de G la transformación linear que representa. Este representación es llamada la *representación de definición* de $G=\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Definición 1.6 *Decimos que dos representaciones* (π,V), (σ,W), *son equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales* $T:V\longrightarrow W$ *que conmuta con la acción del grupo, es decir el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi(g)"] \arrow[d, "T"] \arrow[dr, phantom, "\bigcirc"] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\pi(g)"] & W \end{tikzcd}.$$

Ejemplo 1.7 Consideremos las siguientes dos representaciones de $\mathbb{R}^*$,

$$x \mapsto \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad x \mapsto \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix},$$

es claro que estas dos representaciones son equivalentes.

Definición 1.8 *Sea (π, V) una representación de G. Decimos que $W \subset V$ es un espacio invariante si $\pi(g)W \subset W$ para todo $g \in G$.*

Definición 1.9 *Decimos que una representación (π, V) de G es* irreducible *si los únicos subespacios invariantes son $\{0\}$ y V.*

Lema 1.10 (Lema de Schur) *Supongamos que (π, V) es una representación irreducible de G y sea $T \in \operatorname{End}(V)$ una transformación equivariante, es decir $\pi(g)T = T\pi(g)$, para todo $g \in G$. Entonces $T = \lambda Id$*

Demostración. Para probar este lema observemos que siempre es posible encontrar un eigenvalor λ de T. Por lo tanto $\operatorname{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}$. Como $\operatorname{Ker}(T - \lambda Id)$ es un espacio invariante bajo la acción de G y V es irreducible, concluimos que $\operatorname{Ker}(T - \lambda Id) = V$, es decir $T = \lambda Id$. $\square$

Definición 1.11 *Decimos que una representación (π, V) es* completamente reducible *si existen subespacios invariantes $V_j \subset V, j = 1, \ldots, l$ tales que $V_i \cap V_j = \{0\}$ y*

$$V = \oplus V_j$$

Observemos que no todas las representaciones son completamente reducibles, por ejemplo la representación

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\longrightarrow GL(2, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

no es completamente reducible.

Definición 1.12 *Sea H un espacio de Hilbert. Una representación (π, H) se dice que es* unitaria *si $\pi(g)$ es un operador unitario para todo $g \in G$, es decir si*

$$\langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \qquad \forall g \in G.$$

Observemos que si $\dim H < \infty$, entonces toda representación unitaria es completamente reducible, ya que si $V \subset H$ es un subespacio invariante, entonces $V^{\perp}$ también es invariante.

Supongamos a partir de ahora que G es un grupo compacto, y sea (π, H) una representación de G en el espacio de Hilbert H con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definamos un nuevo producto interior $(\cdot, \cdot)$ en H mediante

$$(v, w) = \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle \, dg$$

donde dg es la medida de Haar en G. Como G es compacto, $\mathrm{Vol}(G) < \infty$ y la integral que define el nuevo producto interior converge para toda $v, w \in H$. Resulta entonces fácil comprobar que

$$\begin{aligned}(\pi(x)v, \pi(x)w) &= \int_G \langle \pi(gx)v, \pi(gx)w \rangle \, dg \\ &= \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle \, dg = (v, w),\end{aligned}$$

es decir (π, H) es una representación unitaria con respecto a este producto interno. (Aquí hemos usado que como G es compacto, entonces es unimodular, es decir las medidas de Haar por la izquierda y por la derecha son iguales).

Este es el llamado "truco unitario" de Weyl. Podemos notar que usando este truco podemos asumir que cualquier representación de un grupo de Lie compacto es unitario y por lo tanto cualquier representación de dimensión finita es completamente reducible, de hecho también tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.13 *Sea G un grupo compacto, y sea (π, H) una representación unitaria irreducible de G. Entonces* $\dim(H) < \infty$.

Ejemplo 1.14 **A)** Sea $G = S^1$. Entonces todas las representaciones unitarias irreducibles de G son de la forma $\theta \mapsto \mathrm{e}^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$.

B) Podemos definir dos acciones de G en el espacio $L^2(G)$, llamadas la *acción regular por la derecha* y *acción regular por la izquierda* definidas respectivamente por

$$(L_a \cdot f)(x) = f(a^{-1}x) \qquad \text{y} \qquad (R_a \cdot f)(x) = f(xa)$$

Si G es unimodular, entonces

$$\begin{aligned}\langle L_a f, L_a h \rangle &= \int_G \overline{L_a f(x)} L_a h(x) \, dx = \int_G \overline{f(a^{-1}x)} h(a^{-1}x) \, dx \\ &= \int_G \overline{f(x)} h(x) \, dx = \langle f, h \rangle \\ &= \int_G \overline{f(xa)} h(xa) \, dx = \langle R_a f, R_a h \rangle.\end{aligned}$$

Juntando estas dos acciones obtenemos una representación unitaria de $G \times G$ en $L^2(G)$.

Observemos que considerado como un espacio de Hilbert

$$L^2(S^1) = \widehat{\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C} \, \mathrm{e}^{in\theta}$$

y el espacio generado por cada $\mathrm{e}^{in\theta}$ es invariante bajo la acción regular, es decir, $L^2(S^1)$ es generado por las funciones que obtenemos de las representaciones irreducibles de S^1.

En general tenemos la siguiente construcción. Sea G un grupo compacto, y sea (π, H) una representación unitaria e irreducible de G. Dados $v, w \in H$, definimos una función $c_{v,w} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$c_{v,w}(g) = \langle \pi(g)v, w \rangle$$

las funciones $c_{v,w}$ se llaman las *funciones coeficientes* de la representación.

Observación 1.15 Si $(\pi, V), (\sigma, W)$ son dos representaciones equivalentes, entonces el espacio generado por sus funciones coeficiente son iguales.

Hay otra manera ligeramente distinta de ver a las funciones coeficiente. Sean $v, w \in H$ y definamos $T_{v,w} \in \mathrm{End}(H) \simeq H \otimes H^*$ mediante

$$T_{v,w}(u) = \langle v, u \rangle w$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\pi(g)^{-1}T) &= \mathrm{Tr}(u \mapsto \langle \tilde{v}, u \rangle \pi(g^{-1})w) \\ &= \langle v, \pi(g)^{-1}w \rangle = \langle \pi(g)v, w \rangle = c_{v,w}(g) \end{aligned}$$

Teorema 1.16 *Sea (π, H) una representación unitaria de G. Definamos una acción de $G \times G$ en End(H) mediante $(g, h) \cdot T = \pi(g)T\pi(h)^{-1}$, y sea*

$$\begin{aligned} A : \mathit{End}(H) &\longrightarrow L^2(G) \\ T &\mapsto (g \mapsto \mathrm{Tr}(\pi(g)^{-1}T) \end{aligned}$$

Entonces A en una transformación lineal G-equivariante.

Definición 1.17 *Dada una representación (π, H) definimos el* caracter *de la representación como la función $\chi(x) = Tr(\pi(x))$. Observemos que esta función tiene la caraterística de que $\chi(gxg^{-1}) = \chi(x)$*

Teorema 1.18 (Relaciones de Ortogonalidad de Schur) *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita y definamos un producto interno en End(H) mediante $\langle T, S \rangle = \mathrm{Tr}(T^*S)$.*

A) *Si $(\pi_1, H_1), (\pi_2, H_2)$ son dos representaciones irreducibles e inequivalentes de G. Entonces para todo $T \in End(H_1)$, $S \in End(H_2)$*

$$\langle A(T), A(S) \rangle = 0 \qquad \textit{en } L^2(G)$$

B) *Si $S, T \in H$, entonces*

$$\langle A(S), A(T) \rangle = \frac{1}{d} \langle S, T \rangle$$

donde $d = dim\ H$

Definición 1.19 *Sea G un grupo de Lie, definiremos su espectro unitario como el conjunto*

$$\hat{G} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{Clases de equivalencia de las representaciones} \\ \textit{unitarias irreducibles de } G \end{array} \right\}.$$

Estos últimos resultados y definiciones nos dicen que existe un encaje

$$\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} A(H_\gamma \otimes H_\gamma{}^*) \subset L^2(G)$$

que además es $G \times G$ equivariante. El teorema de Peter-Weyl nos dice que este en encaje es, de hecho, suprayectivo.

Teorema 1.20

$$L^2(G) = \hat{\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}}} A(H_\gamma \otimes H_\gamma{}^*) = \hat{\bigoplus_{\gamma \in \hat{G}}} A(End(H_\gamma))$$

Además, si $f \in C^\infty(G)$, entonces $\oplus_{\gamma \in \tilde{G}} f_\gamma \to f$ uniformemente, donde f_γ es la proyección de f al espacio $A(End(H_\gamma))$.

Nos gustaría hacer una par de comentarios acerca del teorema de Peter-Weyl. Podemos definir una acción de $\mathfrak{g}$ en $C^\infty(G)$ mediante

$$(Xf)(g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(g \exp tX)$$

y podemos extender esta acción hasta definir una acción de $U(\mathfrak{g})$, el álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$, que de esta manera se identifica con el espacio de operadores diferenciales invariantes por la izquierda en G. Observemos que, usando esta identificación, el espacio de operadores diferenciales invariantes tanto por la izquierda como por la derecha es precisamente el centro del álgebra universal envolvente, $Z(\mathfrak{g})$. El lema de Schur nos dice que cada $X \in Z(\mathfrak{g})$ actúa como multiplicación por escalar en cada una de las componentes $H_\gamma \otimes H_\gamma{}^*$ y por tanto si tenemos una ecuación diferencial en G que resulta ser bi-invariante bajo la acción del grupo, entonces podemos reducir el problema de resolever esta ecuación diferencial a resolver una serie de ecuaciones algebraicas. Es un principio general de la física que las ecuaciones que definen las fuerzas fundamentales de la naturaleza deben permanecer invariantes bajo las simetrías del espacio. En el caso de un grupo de Lie G esto significa que deberían poderse expresar usando operadores diferenciales bi-invariantes. Observemos que, en particular, el elemento de Casimir de $\mathfrak{g}$ actúa en G como el operador de Laplace y siempre se encuentra en $Z(\mathfrak{g})$.

Ejemplo 1.21 En el caso cuando $G = S^1$ tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{inx} = in \, \mathrm{e}^{inx}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{e}^{inx} = -n^2\,\mathrm{e}^{inx}$$

y estos son los únicos eigenvalores del laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

1.3. Clasificación de las representaciones irreducibles de un grupo de Lie compacto

Definición 1.22 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y sea V un EVTLC. Una representación de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo*

$$\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

es decir $\pi([X,Y]) = [\pi(X),\pi(Y)] = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)$, que además es continuo en la topología fuerte de operadores.

Podemos definir las nociones de representación irreducible, completamente reducible y representación unitaria de manera similar al caso de representaciones de grupos. Observemos que en este caso una representación es unitaria si

$$\langle Xv, w\rangle + \langle v, Xw\rangle = 0 \qquad \text{para todo } v, w \in V,\ X \in \mathfrak{g}$$

Teorema 1.23 *Si G es un Grupo de Lie compacto y conexo, entonces las representaciones irreducibles de G están en correspondencia 1-1 con las representaciones irreducibles de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita.*

Si (π, H) es una representación de G de dimension finita, llamaremos $(d\pi, H)$ a la correspondiente representación de $\mathfrak{g}$, estas representaciones están relacionadas mediante

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\exp tX) = d\pi(X).$$
$$\pi(\exp tX) = \exp(t\,d\pi(X))$$

Si G es un grupo compacto y conexo, entonces $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ es una representación de dimensión finita de G y por tanto es completamente reducible ya que usando el "truco unitario" podemos considerar que es unitaria. De aquí concluimos que $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ también es completamente reducible.

Definición 1.24 *Una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que es* reductiva *si $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ es completamente reducible.*

Definición 1.25 *Un grupo G se dice que es reductivo si su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es reductiva.*

Observación 1.26 Si G es un grupo compacto, entonces $\mathfrak{g}$ y por lo tanto G mismo son reductivos.

Teorema 1.27 *Si* $\mathfrak{g}$ *es reductiva, entonces*

$$\mathfrak{g} = \zeta(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

donde $\zeta(\mathfrak{g})$ *es el centro de* $\mathfrak{g}$ *y* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *es semisimple.*

Supongamos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie reductiva, y sea (π, V) una representación irreducible de $\mathfrak{g}$. Entonces el lema de Schur nos dice que si $X \in \zeta(\mathfrak{g})$ entonces X actúa como un escalar, y por lo tanto existe $\lambda \in \zeta(\mathfrak{g})^*$ tal que $\pi(X) = \lambda(X)\mathrm{Id}$ para todo $X \in \zeta(\mathfrak{g})$. De aquí concluímos que V es irreducible como una representación de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y por lo tanto las representaciones irreducibles de una algebra de Lie reductiva consisten de una representación irreducible de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y un elemento de $\zeta(\mathfrak{g})^*$.

Definición 1.28 *Sea* $\mathfrak{g}$ *un algebra de Lie. Podemos definir en* $\mathfrak{g}$ *una forma bilineal simétrica, llamada la* forma de Cartan-Killing*, mediante la formula*

$$B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)).$$

Definición 1.29 *Una álgebra de Lie real* $\mathfrak{g}_u$ *se dice que es compacta si su forma de Cartan-Killing es no degenerada y negativa definida.*

Teorema 1.30 ***A)*** *Si* G *es un grupo de Lie compacto tal que su álgebra de Lie* $\mathfrak{g}_u$ *es semisimple, entonces* $\mathfrak{g}_u$ *es un álgebra de Lie compacta.*

B) *Si* $\mathfrak{g} = Lie(G)$ *es un álgebra de Lie compacta, entonces* G *es un grupo compacto.*

Teorema 1.31 *Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie compleja y semisimple, entonces* $\mathfrak{g}$ *tiene una forma real compacta, es decir, existe un álgebra de Lie real compacta* $\mathfrak{g}_u$ *tal que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_u \oplus i\mathfrak{g}_u$ *vista como un álgebra de Lie real.*

Ejemplo 1.32 Sea

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \,|\, \mathrm{tr}\, A = 0\} = \mathrm{Span}\{H, E, F\}$$

donde

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y sea

$$\mathfrak{su}_2 = \{A \in M_{2\times 2} | A^* + A = 0\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Entonces $\mathfrak{g}_u := \mathfrak{su}_2$ es una forma real de $\mathfrak{g}$, ya que es claro que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_u \oplus i\mathfrak{g}_u$. Observemos que consideradas como álgebras de Lie reales $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{H, E, F\}$ y $\mathfrak{su}_2$ no son isomorfas, sin embargo sus complexificaciones si lo son.

De estos resultados vemos que hemos simplificado el problema de encontrar todas las representaciones irreducibles de un grupo de Lie compacto G al problema de encontrar todas las representaciones irreducibles y de dimensión finita de un álgebra de lie semisimple $\mathfrak{g}$. Ahora para completar el programa establecido por el teorema de Peter-Weyl aun quedarían por resolver los siguientes problemas

1. **Clasificar todas las álgebras de Lie Simples.** Killing practicamente resolvió este problema, sin embargo en su trabajo nunca construyo las álgebras excepcionales sino que simplemente indico que podían haber álgebras de Lie además de las álgebras de Lie clásicas. Finalmente fue Cartan en 1894 quien construyo cada una de las álgebras excepcionales y además clarificó y simplificó el trabajo de Killing haciendo sus resultados mas accesibles y fáciles de entender.

2. **Clasificar todas las representaciones irreducibles de dimensión finita de la álgebras de Lie semisimples.** Cartan y Weyl fueron los principales encargados, en el primer cuarto del siglo XX, de dar una clasificación de estas representaciones. Para lograrlo utilizaron el sistema de pesos y raíces asociados a una representación y demostraron que estas representaciones están en correspondencia 1-1 con los pesos dominantes y enteros con respecto a una subalgebra de Cartan establecida de antemano.

3. **Describir $Z(\mathfrak{g})$ y los caracteres asociados con las representaciones irreducibles.** El isomorfismo de Harish-Chandra establece un isomorfismo entre $Z(\mathfrak{g})$ y $S(\mathfrak{h})^W$ el álgebra de polinomios en $\mathfrak{h}$ invariantes bajo la acción de W donde $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subalgebra de Cartan y W es el correspondiente grupo de Weyl. Harish-Chandra demostró este resultado como parte de su extraordinario trabajo en teoría de representaciones y análisis harmónico de grupos reales reductivos que desarrollo principalmente entre los años 50–70.

2. La medida de Plancherel

En la sección anterior vimos el teorema de Peter-Weyl, el cual dado un grupo compacto G que nos permite expresar $L^2(G)$ en términos de las representaciones irreducibles del grupo. Desafortunadamente el teorema de Peter-Weyl tal como se expresó en la sección anterior no se puede generalizar al caso donde G no es compacto. Sin embargo es posible obtener información acerca de $L^2(G)$ usando la teoría de representaciones de G y la medida de Plancherel, la cual es una medida en el espectro unitario $\hat{G}$ de G.

En la primera subsección enunciaremos de manera explcíta el problema de Plancherel, y utilizaremos los resultados obtenidos en la sección anterior para resolver este problema en el caso en el que G es un grupo compacto.

En la segunda subsección definiremos los que es una medida espectral y veremos que es mas conveniente pensar en la medida de Plancherel como una medida espectral en $\hat{(G)}$, con valores en el espacio de las proyecciones ortogonales de $L^2(G)$.

En la tercera subsección describiremos la descomposición espectral de $L^2(\mathbb{R})$ y observaremos como el problema de Plancherel es, en este caso, equivalente con la fórmula de inversión de Fourier, entre otros resultados.

Finlamente en la última subsección indicaremos como podemos abordar el problema general de Plancherel en el caso en el que G es un grupo reductivo.

2.1. El problema de Plancherel

El problema de Plancherel es encontrar, de manera explicita, una medida μ en $\hat{G}$ de tal manera que

$$f(e) = \int_{\hat{G}} \Theta_\gamma(f)\, d\mu(\gamma)$$

donde $\Theta_\gamma(f)$ es el caracter de un representante de γ, es decir

$$\Theta_\gamma(f) = \mathrm{tr}\,(\pi_\gamma(f))$$

donde $\pi_\gamma(f) = \int_G f(g)\pi_\gamma(g)\, dg$.

Teorema 2.1 *Sea G un grupo de Lie compacto, entonces*

$$f(e) = \sum_{\gamma\in\hat{G}} \Theta_\gamma(f) d(\gamma), \qquad \textit{donde } d(\gamma) = dim\, v_\gamma$$

Por lo tanto en este caso la medida de Plancherel es la medida puntual en $\hat{G}$ con $\mu(\gamma) = d(\gamma)$.

Observación 2.2 En este caso, por definición

$$\begin{aligned} \Theta_\gamma(f) &= Tr\,(\pi_\gamma(f)) = Tr \int_G f(g)\pi_\gamma(g)\, dg \\ &= \int_G f(g)\, Tr\,(\pi_\gamma(g))\, dg = \int_G f(g)\chi_\gamma(g)\, dg. \end{aligned}$$

Demostración. (Medida de Plancherel para grupos compactos) El teorema de Peter-Weyl nos dice que

$$L^2(G) = \hat{\bigoplus_{\gamma\in\hat{G}}} \mathrm{End}(V_\gamma)$$

y además cada $\mathrm{End}(V_\gamma)$ es irreducible como $G\times G$ modulo. Recordemos que tenemos un morfismo equivariante

$$\begin{aligned} A_\gamma : \mathrm{End}(V_\gamma) &\longrightarrow L^2(G) \\ T &\mapsto (g \mapsto \mathrm{Tr}(\pi^{-1}(g)T), \end{aligned}$$

pero además también tenemos un morfismo

$$\begin{aligned} \pi_\gamma : L^2(G) &\longrightarrow \operatorname{End}(V_\gamma) \\ f &\mapsto \pi_\gamma(f) \end{aligned}$$

que también resulta ser $G \times G$ equivariante. Por lo tanto

$$A_\gamma \circ \pi_\gamma : A_\gamma(\operatorname{End}(V_\gamma)) \subset L^2(G) \longrightarrow A_\gamma(\operatorname{End}(V_\gamma))$$

es un morfismo $G \times G$ equivariante. Entonces, por el lema de Schur

$$A_\gamma \circ \pi_\gamma = c_\gamma \mathrm{Id}_\gamma.$$

Tratemos de calcular c_γ. Observemos que

$$\overline{\chi_\gamma(g)} = \chi_\gamma(g^{-1}) = \operatorname{tr}(\pi_\gamma(g)^{-1}\mathrm{Id}_\gamma)$$

Por lo tanto $\overline{\chi_\gamma} \in A_\gamma(\operatorname{End}(V_\gamma))$ de donde conluimos que

$$\overline{\chi_\gamma(g)} = c_\gamma \operatorname{tr}(\pi_\gamma(g)^{-1}\pi_\gamma(\overline{\chi_\gamma}))$$

en particular

$$\begin{aligned} d(\gamma) = \overline{\chi_\gamma(e)} &= c_\gamma \operatorname{tr}(\pi_\gamma(\overline{\chi_\gamma})) \\ &= c_\gamma \operatorname{Tr} \int_G \overline{\chi_\gamma(g)}\pi_\gamma(g)\, dg \\ &= c_\gamma \int_G \overline{\chi_\gamma(g)}\chi_\gamma(g)\, dg \\ &= c_\gamma \langle \chi_\gamma, \chi_\gamma \rangle = c_\gamma \end{aligned}$$

donde en la ultima linea hemos usado las relaciones de ortogonalidad de Schur. Juntando estos resultados vemos que para todo $f \in L^2(G)$

$$f(g) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} d(\gamma)\operatorname{tr}(\pi_\gamma(g)^{-1}\pi_\gamma(f))$$

en particular

$$f(e) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} d(\gamma)\operatorname{tr}(\pi_\gamma(f)) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} \Theta_\gamma(f) d(\gamma)$$

□

Observación 2.3 Aunque estas formulas tienen sentido formalmente, algunas de las integrales usadas aquí podrían no converger si f es cualquier función en $L^2(G)$, sin embargo estas ecuaciones son correctas si nos restringimos al llamado *espacio de Schwartz* de G, o en particular si f es una función differenciable con soporte compacto.

Ejemplo 2.4 Sea $G = S^1$. Entonces $\hat{G} = \mathbb{Z}$, y las representaciones irreducibles están dadas por

$$\pi_n(x)v_n = \mathrm{e}^{inx}v_n$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
f(y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{tr}(\pi_n(-y)\pi_n(f)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{tr}(\pi_n(-y) \int_0^1 f(x)\pi_n(x)\,dx) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{tr}(\pi_n(x-y))\,dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-iny} \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{inx}\,dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-iny}\hat{f}(n) \qquad (3)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Ejemplo 2.5 Sea $G = \mathbb{R}$, entonces $\hat{G} = \mathbb{R}$, y las representaciones unitarias irreducibles están dadas por

$$\pi_\xi(x)v_\xi = \mathrm{e}^{2\pi i\xi x}v_\xi.$$

Nos gustaría escribir una formula similar a (3) para este grupo, desafortunadamente $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i\xi x}$ no es una función cuadrado integrable de $\mathbb{R}$. Por lo tanto no es posible descomponer $L^2(\mathbb{R})$ como una suma directa de sus componentes irreducibles, porque los elementos que deberían formar estas componentes irreducibles no están en $L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo si es posible descomponer $L^2(\mathbb{R})$ como una integral directa. Investiguemos este concepto mas cuidadosamente.

2.2. Medidas espectrales

Definición 2.6 *Sea X un espacio topológico localmente compacto, Ω una σ-álgebra de subconjuntos de X, y H un espacio de Hilbert, una* medida espectral *para (X, Ω, H) es una función $\mu : Omega \longrightarrow End(H)$ tal que*

1. *Para cada A en Ω, $\mu(A)$ es una proyección ortogonal,*
2. *$\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(X) = Id$,*
3. *$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2)$ para cada $A_1, A_2 \in \Omega$*

4. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son subconjuntos disjuntos por parejas de Ω, entonces

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Teorema 2.7 *Sea H un espacio de Hilbert, y sea*

$$T : H \longrightarrow H$$

un operador normal, es decir, $TT^* = T^*T$. Definimos el espectro de T *como*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | T - \lambda \mathrm{Id} \text{ no es invertible}\}$$

Entonces $\sigma(T)$ es compacto, y existe una medida espectral dx en $\sigma(T)$ tal que

$$T = \int_{\sigma(T)} x\, dx.$$

Ejemplo 2.8 Sea

$$\begin{aligned} T : L^2([0,1]) &\longrightarrow L^2([0,1]) \\ f &\mapsto T(f) \\ & \quad x \mapsto x f(x) \end{aligned}$$

Entonces $\sigma(T) = [0,1]$. Definamos una medida espectral dx mediante

$$dx(A) f = 1_A f$$

donde $A \subset [0,1]$ es un conjunto de Borel, y 1_A es la función indicadora en A

Entonces

$$T = \int_{[0,1]} x\, dx,$$

donde definimos

$$\begin{aligned} T(f) = (\int_0^1 x\, dx)(f) &:= \lim_{N\to\infty} (\sum_{k=1}^{N} k/N\, dx([k-1/N, k/N]) f) \\ &:= \lim_{N\to\infty} (\sum_{k=1}^{N} k/N\, 1_{[k-1/N, k/N]} f), \end{aligned}$$

de aquí vemos que $T(f)(x) = xf(x)$ De hecho podemos reescribir esta ecuación como

$$T(f) = (\int_0^1 x\, dx)(f) = \int_0^1 x\, dx(f) = \int_0^1 x f_x\, \tilde{d}x$$

donde $f_x = 1_x f$ y $\tilde{d}x$ es la medida punctual en $[0,1]$. Por lo tanto

$$T(f)(y) = \int_0^1 x f_x(y)\, \tilde{d}x = y f(y)$$

2.3. Descomposición espectral de $L^2(\mathbb{R})$

Regresando al caso donde $G = \mathbb{R}$ y usando las ideas que vimos en la sección anterior queremos ahora escribir una ecuación análoga a la ecuación (3) de la forma

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i\xi y} \hat{f}(\xi)\, d\xi = \hat{\hat{f}}(-y). \tag{4}$$

Pero esta ecuación es precisamente la formula de inversión de Fourier. Observemos nuevamente que aunque la teoría de Fourier se puede definir en $L^2(\mathbb{R})$ la ecuación (4) no es valida para todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo si nos restringimos al *espacio de Schwartz*

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty \mid \sup\{(1+x)^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) \,|\, n, m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\} < \infty\}$$

entonces todo funciona perfectamente.

Ahora pensemos en la ecuación (4) usando la teoría de las medidas espectrales. Observemos que si

$$\pi(y) = L_y : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

donde $(L_y f)(x) = f(x-y)$, entonces $\pi(y)$ es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R})$. Ahora nos gustaría definir una descomposición espectral de $\pi(y)$ como

$$\pi(y) = \int_{\mathbb{R}} \pi_\xi(y)\, d\xi$$

de tal manera que si $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)\, d\xi := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi$ entonces

$$\begin{aligned}
\pi(y)f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \pi_\xi(y) f_\xi(x)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi i\xi y} f_\xi(x)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi i\xi y} \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i\xi(x-y)} \hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x-y)\, d\xi = f(x-y),
\end{aligned}$$

es decir en cada "componente ξ" $\pi(y)$ actúa como $\mathrm{e}^{2\pi i\xi y}$. Por otro lado

$$(\pi(y)f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Tr}(\pi_\xi(x)^{-1}\pi_\xi(\pi(y)f))\, d\xi$$

y por lo tanto

$$(\pi(y)f)(0) = f(-y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Tr}(\pi_\xi(\pi(y)f))\, d\xi$$

2.4. La medida General de Plancherel

¿Que deberíamos hacer en general?

Sea G un grupo de Lie, y sea $\hat{G}$ su espectro unitario. Sea $\xi \in \hat{G}$ y sea (π_ξ, H_ξ) un elemento en la clase de equivalencia de ξ. Consideremos el espacio de Hilbert-Schmidt asociado a H_ξ, $HS(H_\xi)$, es decir el conjunto de los operadores lineales $T : H_\xi \longrightarrow H_\xi$ tal que T^*T es de la clase de traza. Si T está en el espacio de Hilbert-Schmidt y T es de la clase de traza, entonces podemos definir una función $A_\xi(T)$ mediante

$$A_\xi(T)(x) = \mathrm{Tr}(\pi_\xi(x)^{-1}T)$$

En la imagen de A_ξ definimos un producto interior mediante

$$\langle A_\xi(T), A_\xi(S)\rangle = \mathrm{Tr}(T^*S).$$

Tomemos la completación de este espacio de funciones con respecto a este producto interior, y extendamos A_ξ al espacio de Hilbert-Schmidt de H_ξ por continuidad.

Ahora observemos que si $f \in C_c^\infty(G)$, entonces $\pi_\xi(f)$ es de la clase de traza y por lo tanto está en el espacio de Hilbert-Schmidt de H_ξ. Por lo tanto $x \mapsto \mathrm{tr}(\pi_\xi(x)^{-1}\pi_\xi(f))$ es una función bien definida en $A(HS(H_\xi))$. Llamemos a esta función f_ξ. Como C_c^∞ es denso en $L^2(G)$ podemos extender esta definición de f_ξ por continuidad a todo $f \in L^2(G)$

Entonces para cualquier función $f \in L^2(G)$ podemos escribir

$$f = \int_{\hat{G}} f_\xi \, d\xi$$

donde cada $f_\xi \in A(HS(H_\xi))$ el cual es un espacio de Hilbert con respecto al producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que acabamos de definir. Además también nos gustaría que

$$\langle f, g\rangle = \langle \int_{\hat{G}} f_\xi \, d\xi, \int_{\hat{G}} g_\xi \, d\xi\rangle = \int_{\hat{G}} \langle f_\xi, g_\xi\rangle \, d\xi$$

y también deberiamos de tener que

$$L_y f = \int_{\hat{G}} \pi_\xi(y) f_\xi \, d\xi$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}(L_y f)(x) &= \int_{\hat{G}} (\pi_\xi(y) f_\xi)(x) \, d\xi = \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}(\pi_\xi(x^{-1})\pi_\xi(y)\pi_\xi(f)) \, d\xi \\ &= \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}(\pi_\xi(y^{-1}x)^{-1}\pi_\xi(f)) \, d\xi = \int_{\hat{G}} f_\xi(y^{-1}x) \, d\xi = f(y^{-1}x)\end{aligned}$$

En particular

$$f(e) = \int_{\hat{G}} f_\xi(e) \, d\xi = \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}(\pi_\xi(f)) \, d\xi = \int_{\hat{G}} \Theta_\xi(f) \, d\xi$$

Ejemplo 2.9 Sea $G = \mathbb{R}$. Entonces $\hat{G} = \mathbb{R}$ y (π_ξ, H_ξ) es $H_\xi \cong \mathbb{R}$, y

$$\pi_\xi(x)1 = \mathrm{e}^{i\xi x}1$$

Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces

$$f_\xi(x) = \mathrm{Tr}(\pi_\xi(-x)\pi_\xi(f))$$

Por lo tanto si $f, g \in S(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\langle f_\xi, g_\xi \rangle_\xi &= \mathrm{Tr}(\pi_\xi(f)^*\pi_\xi(g)) \\
&= \mathrm{Tr}((\int_{\mathbb{R}} f(x)\pi_\xi(x)\,dx)^*(\int_{\mathbb{R}} g(y)\pi_\xi(y)\,dy)) \\
&= \mathrm{Tr}(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(y)\pi_\xi(y-x)\,dxdy) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(y)\mathrm{e}^{i\xi(y-x)}\,dxdy \\
&= \overline{(\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{i\xi x}\,dx)}(\int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{e}^{i\xi y}\,dy) \\
&= \overline{\hat{f}(\xi)}\hat{g}(\xi),2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle f_\xi, g_\xi \rangle_\xi \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)}\hat{g}(\xi)\,d\xi = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

lo cual nos dice que en este caso la transformada de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbb{R})$ sobre si mismo. Además

$$L_y(f) = \int_{\mathbb{R}} \pi_\xi(y) f_\xi \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi y} f_\xi \, d\xi,$$

es decir

$$L_y(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi y} f_\xi(x)\, d\xi.$$

Ejemplo 2.10 Sea $G = \mathbb{Z}$. En este caso es sencillo dar una base para $L^2(\mathbb{Z})$, por ejemplo $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Por otro lado sabemos que $\hat{\mathbb{Z}} = S^1$ y usando lo que hemos visto tenemos que

$$\begin{aligned}
f(n) = \int_0^1 f_x(n)\,dx &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}(\pi_x(-n)\pi_x(f))\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}(\pi_x(-n)\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\pi_x(m))\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{Tr}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\pi_x(m-n))\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\mathrm{e}^{ix(m-n)}\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\mathrm{e}^{ixm}\Big)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx}\hat{f}(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Observemos que en este ejemplo tenemos una base de Hilbert para $L^2(\mathbb{Z})$ que además es numerable, sin embargo esta base no es muy adecuada para estudiar la acción de $\mathbb{Z}$ en $L^2(\mathbb{Z})$ y es por esto que usamos los elementos de $\hat{\mathbb{Z}} \cong S^1$ para describir las funciones en $L^2(\mathbb{Z})$, que aunque es un conjunto no numerable y la medida espectral es continua en este caso, nos da una mejor descomposición de este espacio en términos de la acción del grupo.

Ejemplo 2.11 Consideremos ahora el caso de $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. En este caso hay dos tipos muy diferentes de representaciones, la serie discreta y la serie principal unitaria. La diferencia entre estos dos tipos de representaciones es que las funciones coeficientes de la serie discreta son cuadrado integrables, mientras que los de la serie principal unitaria no lo son. Como consecuencia de esto $L^2(G)$ se descompone en dos partes, una parte se descompone como una integral directa y la otra se descompone como una suma directa. La determinación explícita de la medida de Plancherel para este grupo, así como la formula general de la medida de plancherel para los grupos reductivos, es uno de los grandes logros de Harish-Chandra.

3. La estructura de los grupos reales reductivos

En esta sección estudiaremos la estructura interna de los grupos de Lie semisimples. Recordemos que dado un grupo semisimple G, le podemos asociar una álgebra semisimple real $\mathfrak{g}$, y su complexificación $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Empezaremos esta sección describiendo la estructura de esta última. Para esto consideraremos una subalgebra abeliana maximal $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tal que si $X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, entonces $\mathrm{ad}\,(\mathrm{X})$ es diagonalizable. Llamaremos a una subálgebra con estas características una subálgebra de Cartan. Como todas las transformaciones lineales $\mathrm{ad}\,(\mathrm{X})$ con $X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ conmutan entre si, es posible encontrar una base de $\mathfrak{g}$ que diagonaliza a todos estos elementos simultáneamente. Usando esta base obtenemos una descomposición de $\mathfrak{g}$ en términos de los eigenespacios simultáneos de estos operadores.

Desafortunadamente esta descomposición de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ no necesariamente se translada a una descomposición equivalente para $\mathfrak{g}$, sin embargo, si podemos usar esta descomposición para obtener cierta información sobre la estructura de la algebra de Lie real $\mathfrak{g}$. En la segunda subsección veremos como obtener las descomposiciones de Cartan, Iwasawa y Gelfan-Naimark de $\mathfrak{g}$, y las equivalentes descomposiciones del grupo G.

En la última subsección estudiaremos los subgrupos parabólicos de G, que son muy importantes en el estudio de las representaciones irreducibles de los grupos semisimples, y que son uno de los elementos principales en la "filosofía de las formas cuspidales" de Harish-Chandra.

3.1. La estructura de las álgebras de Lie semisimples

Una de las consecuencias mas importantes de la identidad de Jacobi es que hace que la representación adjunta sea, precisamente, una representación de álgebras de Lie. Esta representación es sumamente importante, porque nos permite asociar a los elementos de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ transformaciones lineales que actúan sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g}$ mismo. Observemos que, si $\mathfrak{g}$ es una álgebra semisimple, entonces la representación adjunta es una representación *fiel*, es decir, dado una álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

satisface que Ker ad $= \{0\}$. Una de las consecuencias de esto es que podemos definir una forma bilineal simétrica y no degenerada, llamada la forma de *Cartan-Killing*, en $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera: si $X, Y \in \mathfrak{g}$, definamos

$$B(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)).$$

Otra observación importante acerca de la representación adjunta es que si $\mathfrak{h}$ es una subalgebra abeliana de $\mathfrak{g}$, tal que todos los elementos de ad $\mathfrak{h}$ son diagonalizables, entonces podemos diagonalizar todos estos elementos simultaneamente. Si hacemos esto obtenemos una base para $\mathfrak{g}$ que consiste de eigenvectores para todos los elementos de $\mathfrak{h}$ y que por lo tanto es muy útil para estudiar la estructura interna de $\mathfrak{g}$. Obviamente para tratar de aprovechar estas ideas al máximo nos interesa usar una subalgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}$.

Definición 3.1 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple. Definimos el rango de $\mathfrak{g}$, como*

$$\mathrm{Rank}\, \mathfrak{g} = \max\{\dim \mathfrak{h} \mid \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \text{ es una subalgebra abeliana.}\}$$

Lema 3.2 *Todas las subálgebras abelianas maximales de $\mathfrak{g}$ tienen la misma dimensión. Además existe una subalgebra abeliana maximal $\mathfrak{h}$ tal que todos sus elementos son diagonalizables bajo la representación adjunta.*

Definición 3.3 *Si $\mathfrak{h}$ es una subalgebra abeliana maximal tal como en el lema anterior, entonces decimos que $\mathfrak{h}$ es una* subalgebra de Cartan.

Ejemplo 3.4 Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, y consideremos la siguiente base de $\mathfrak{g}$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Además sea

$$H_3 = H_1 + H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que $\mathfrak{h} = \operatorname{Span}\{H_1, H_2\}$ es una subalgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, y con respecto a la base que hemos dado para $\mathfrak{g}$

$$\operatorname{ad} H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{ad} H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y

$$\operatorname{ad} H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con estas matrices $[H_1, E_1] = 2E_1$, $[H_2, E_1] = -E_1$, y por lo tanto si $H = a_1H_1 + a_2H_2 \in \mathfrak{h}$, entonces

$$\begin{aligned}[H, E_1] &= [a_1H_1 + a_2H_2, E_1] = a_1[H_1, E_1] + a_2[H_2, E_1]\\ &= a_1(2E_1) + a_2(-E_1) = (2a_1 - a_2)E_1.\end{aligned}$$

De aquí vemos que si $\alpha_1 \in \mathfrak{h}^*$ es tal que $\alpha_1(H_1) = 2$ y $\alpha_1(H_2) = -1$, entonces

$$[H, E_1] = \alpha_1(H)E_1.$$

En general sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Si α es un funcional lineal de $\mathfrak{h}$, definiremos

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H) \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Si $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$ entonces α es llamada una *raíz* de $\mathfrak{g}$, y $\mathfrak{g}^\alpha$ es llamado el *subespacio raíz* de α. Como $\mathfrak{h}$ es abeliana maximal, tenemos que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ y de la identidad de Jacobi obtenemos que

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}.$$

Volviendo a nuestro ejemplo con $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, vemos que las raíces de $\mathfrak{g}$ son α_1, α_2, α_3, $-\alpha_1$, -α_2, $-\alpha_3$, donde $\alpha_2(H_1) = -1$, $\alpha_2(H_2) = 2$, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Los elementos de $\mathfrak{g}$ asociados con α_1, α_2, α_3, $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, $-\alpha_3$ son E_1, E_2, E_3, F_1, F_2 y F_3 respectivamente. Observemos que los espacios raíz tienen dimensión 1, de hecho lo mismo ocurre para cualquier algebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, como nos muestra el siguiente teorema:

Teorema 3.5 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ y sea $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el conjunto de todas las raíces distintas de cero con respecto a $\mathfrak{h}$. Entonces*

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}\ \mathfrak{g}^\alpha)$

2. $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ *para todo* $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$

3. *Sean α, β dos raíces tales que $\alpha+\beta \neq 0$. Entonces $\mathfrak{g}^\alpha$ y $\mathfrak{g}^\beta$ son ortogonales bajo la forma de Cartan-Killing B.*

4. *La restricción de B a $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ es no degenerada, lo que nos permite definir para cada funcional lineal α de $\mathfrak{h}$ un único elemento H_α tal que*

   $$B(H, H_\alpha) = \alpha(H), \qquad \text{para todo } H \in \mathfrak{h}.$$

   Definiremos un producto interno en $\mathfrak{h}^*$ mediante $\langle \alpha, \beta \rangle = B(H_\alpha, H_\beta)$ para todo α, $\beta \in \mathfrak{h}^*$.

5. *Si $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, entonces $-\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y*

   $$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha, \qquad \alpha(H_\alpha) \neq 0$$

6. *Sea*

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{\alpha\in\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathbb{R}H_\alpha.$$

Entonces B es una forma bilineal real y positiva definida en $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ y $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$.

7. *Podemos elegir elementos $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ tales que*

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = B(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha = H_\alpha$$

8. *Existe una base de $\mathfrak{h}^*$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, donde $l = \operatorname{rank}\mathfrak{g}$, tal que todas las raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$ se pueden escribir como combinaciones lineales de los elementos de esta base, con coeficientes en los números enteros y tales que estos coeficientes son todos positivos o todos negativos. A las raíces que respecto a esta base tienen solamente coeficientes positivos los llamaremos* raíces positivas *y a las demás* raíces negativas.

Observación 3.6 Observemos que podemos elegir las E_α's de tal manera que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus_{\alpha\in\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \mathbb{R}\,E_\alpha$ es una forma real de $\mathfrak{g}$.

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple, y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. El teorema anterior nos da una descomposición de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$. Ahora sea $\mathfrak{h}'$ otra subalgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, nuevamente el teorema anterior nos da otra descomposición de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}'$. ¿Cuál es la relación entre estas dos descomposiciones y sus sistemas de raíces asociados? Para que el sistema de raíces que obtenemos con estas descomposiciones tenga algún valor este debe ser independiente del álgebra de Cartan que elijamos. Como nos muestra el siguiente teorema este es, de hecho, el caso.

Teorema 3.7 *Sean $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ dos subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$. Entonces existe un elemento $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$, tal que*

$$\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2,$$

Este resultado nos dice que podemos concentrarnos en estudiar la descomposición de $\mathfrak{g}$ con respecto a cualquier subalgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, ya que para entender la descomposición con respecto a cualquier otra subalgebra de Cartan solo tenemos que aplicar la transformación que nos lleva una subalgebra en la otra. Sin embargo este grupo de automorfismos nos da aún más información: sea $S(\mathfrak{h})$ el estabilizador de $\mathfrak{h}$, $I(\mathfrak{h})$ el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ que deja fijos a todos los elementos de $\mathfrak{h}$ y sea $W = S(\mathfrak{h})/I(\mathfrak{h})$. Entonces W es un grupo de automorfismos de $\mathfrak{h}$ y usando la dualidad entre $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$ inducida por la forma de Cartan-Killing, podemos asumir que también actúa en $\mathfrak{h}^*$. El grupo W actuando en $\mathfrak{h}^*$ es llamado el *grupo de Weyl*.

Teorema 3.8 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple. El grupo de Weyl W, es un grupo finito y es generado por las reflexiones*

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{B(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\alpha)}\alpha, \qquad \alpha \in \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h}).$$

Como hemos visto el sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple es independiente de la subálgebra de Cartan elegida, y es por tanto, un invariante del álgebra de Lie. En consecuencia si dos álgebras de Lie tienen sistemas de raíces distintos entonces nos pueden ser isomorfas. El siguiente teorema nos dice que el sistema de raíces es, de hecho, suficiente para identificar a una álgebra de Lie, es decir, si dos álgebras de Lie tienen el mismo sistema de raíces, entonces son isomorfas.

Teorema 3.9 *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ dos álgebras de Lie semisimples, y sean $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$, respectivamente. Sean $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ y $\Phi(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}')$ los correspondientes sistemas de raíces y sea*

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \oplus_{\alpha\in\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})}\mathbb{R}H_\alpha, \qquad \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \oplus_{\alpha'\in\Phi(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}')}\mathbb{R}H_{\alpha'}.$$

Entonces $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ y $\Phi(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}')$ pueden ser considerados como subconjuntos del espacio dual de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ y $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$, respectivamente. Supongamos que $T : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ es isomorfismo lineal tal que $T^* : \mathfrak{h}'^*_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ manda $\Phi(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}')$ a $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Entonces T se puede extender a un isomorfismo $\tilde{T}$ de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}'$.

Por lo tanto para clasificar las álgebras de Lie complejas y simples basta con clasificar sus sistemas de raíces. Este proyecto fué iniciado por Killing y fué culminado por Cartan en su tesis doctoral de 1894.

Recordemos que una representación es un morfismo

$$\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

tal que $\pi([X,Y]) = [\pi(X),\pi(Y)] = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)$. Ahora $\mathfrak{gl}(V)$, tiene más estructura que la de una álgebra de Lie, es de hecho una álgebra asociativa en donde el braquet de Lie esta dada por el conmutador. A la hora de estudiar las representaciones de un álgebra de Lie, sería muy útil poder hacer uso de esta estructura de álgebra asociativa y escribir algo como

$$\pi(XY) = \pi(X)\pi(Y).$$

Sin embargo aunque el lado derecho de esta ecuación esta bien definido, el lado izquierdo no lo esta. Lo que nos gustaría es poder "jalar" la estructura de álgebra asociativa de $\mathfrak{gl}(V)$ a $\mathfrak{g}$ y así estudiar π como un morfismo de álgebras asociativas. La manera de lograr esto es introduciendo el *álgebra universal envolvente.*

Definición 3.10 *Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Definimos el álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$ como*

$$U(\mathfrak{g}) = T(G)/\langle XY - YX - [X,Y]\rangle.$$

El siguiente teorema nos dice que esta es la construcción que queríamos:

Teorema 3.11 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y sea $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación. Entonces existe un único morfismo $\tilde{\pi} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ll} U(\mathfrak{g}) & \\ i\uparrow & \overset{\tilde{\pi}}{\searrow} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} \mathfrak{gl}(V), \end{array}$$

donde i es la inclusión natural de $\mathfrak{g}$ en $U(\mathfrak{g})$.

Observación 3.12 Como ya hemos mencionado con anterioridad, el centro del álgebra universal envolvente, $Z(\mathfrak{g})$ consiste de todos aquellos elementos Z, de $U(\mathfrak{g})$ tales que $[X, Z] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y es isomorfo, como álgebra asociativa abeliana, a $S(\mathfrak{h})^W$, el álgebra de los polinomios en $\mathfrak{h}$ invariantes bajo la acción del grupo de Weyl.

3.2. La estructura de los grupos de Lie semisimples

Una vez establecida la estructura de las álgebras de Lie complejas y semisimples pasaremos a estudiar la estructura de sus formas reales, lo cual nos permitirá obtener información sobre los grupos reales semisimples.

Definición 3.13 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y real. Una* involución de Cartan *de $\mathfrak{g}$ es un automorfismo $\theta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, tal que $\theta^2 = \mathrm{Id}$ y tal que*

$$\langle x, y\rangle := -B(x, \theta y)$$

es un producto interior definido positivo en $\mathfrak{g}$

Observación 3.14 Toda álgebra de Lie real tiene una involución de Cartan, por ejemplo si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, entonces $\theta(X) = -X^t$ es una involución de Cartan

Definición 3.15 *Como $\theta^2 = \mathrm{Id}$, los únicos eigenvalores de θ son 1 y -1. Sea $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ el eigenespacio $+1$ de θ y sea $\mathfrak{p}$ el eigenespacio -1. Entonces la descomposición*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

es llamada una descomposición de Carta *de $\mathfrak{g}$.*

Observación 3.16 $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ es una forma compacta de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Teorema 3.17 (Descomposición de Cartan) *Sea G un grupo de Lie semisimple con centro finito y sea θ una involución de Cartan de $\mathfrak{g}$. Entonces existe un único automorfismo $\tilde{\theta} : G \longrightarrow G$ tal que $d_e\tilde{\theta} = \theta$. Aún más, si $K = \{g \in G \,|\, \tilde{\theta}(g) = g\}$, entonces*

1. *K es compacto.*

2. La función

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \times K &\longrightarrow G \\ (X,k) &\mapsto \exp X k \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Ejemplo 3.18 Sea $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ y sea $A \in G$ una matriz. Es bien sabido que A tiene una descomposición $A = OP$, llamada la descomposición polar de A, donde O es una matriz ortogonal y P es una matriz simétrica y definida positiva. Sea $\tilde{\theta}(g) = (g^t)^{-1}$. Entonces, si $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{g}$, tenemos que $\theta(X) := d_e\tilde{\theta}(X) = -X^t$ define una involución de Cartan en $\mathfrak{g}$. Observemos que en este caso $K = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ y por lo que hemos dicho acerca de la descomposición polar de matrices en G vemos que efectivamente $G = K \exp \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ es el conjunto de las matrices simétricas.

Sea $\mathfrak{a}$ un subespacio maximal de $\mathfrak{p}$ con la condición de que $\mathfrak{a}$ es una subalgebra abeliana de $\mathfrak{g}$. Si $H \in \mathfrak{a}$, entonces $\mathrm{ad}(H)$ es diagonalizable. Si $\mu \in \mathfrak{a}^*$ definimos

$$\mathfrak{g}^\mu = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, [H,X] = \mu(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Sea

$$\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = \{\mu \in \mathfrak{a} \,|\, \mu \neq 0 \text{ y } \mathfrak{g}^\mu \neq 0\}.$$

Observemos que θ es $-\mathrm{Id}$ en $\mathfrak{a}$. Por lo tanto $\mathfrak{g}^0$ es invariante bajo la acción de θ, y en consecuencia,

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0.$$

Ahora por la definición de $\mathfrak{a}$ sabemos que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{a}$. Sea ${}^0\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^0$. Entonces

$$\mathfrak{g} = {}^0\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus_{\mu\in\Phi} \mathfrak{g}^\mu.$$

Sea $\mathfrak{a}' = \{H \in \mathfrak{a} \,|\, \mu(H) \neq 0, \text{ para todo } \mu \in \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\}$, y sea $H_0 \in \mathfrak{a}'$ un elemento dado. Definamos $P = \{\mu \in \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \,|\, \mu(H_0) > 0\}$ y sean

$$\mathfrak{n} = \oplus_{\mu\in P}\mathfrak{g}^\mu \qquad \text{y} \qquad \overline{\mathfrak{n}} = \theta(\mathfrak{n}).$$

Entonces $\mathfrak{n}$ y $\overline{\mathfrak{n}}$ son subálgebras de $\mathfrak{g}$ y tenemos que

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} \oplus {}^0\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Esta es la llamada *descomposición de Gelfand-Naimark* de $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.19 *$\overline{N}\,{}^0MAN$ es un subconjunto denso y abierto de G, y su complemento es una subvariedad de dimensión estrictamente menor que G, y por lo tanto tiene medida 0.*

Observemos que

$$\mathfrak{k} = {}^0\mathfrak{m} \oplus \mathrm{Span}\{X_{-\mu} - X_\mu \,|\, \mu \in P\}$$

y por lo tanto la descomposición de Gelfand-Naimark nos dice que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

Esta descomposición se llama la *descomposición de Iwasawa* de $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.20 *La función*

$$\begin{aligned} N \times A \times K &\longrightarrow G &(5)\\ (n, a, k) &\mapsto nak &(6) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Ejemplo 3.21 Sea $G = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$. Daremos las descomposiciones de Iwasawa y Gelfand-Naimark de G. Primero observemos que en este caso

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\} \\ \bar{N} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} \\ {}^0M &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\ A &= \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \middle|\, \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \right\} \\ N &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Sea $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{im}(Z) > 0\}$ y definamos una acción de G en $\mathfrak{H}$ mediante transformaciones fraccionales lineales, es decir,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Observemos que

$$\mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z \right) = \frac{\mathrm{im}(z)}{|cz + d|^2}$$

y por lo tanto tenemos una acción bien definida en $\mathfrak{H}$. Ahora observemos que si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot i = i$$

entonces

$$i = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{i}{c^2 + d^2},$$

igualando los términos en esta ecuación obtenemos, $c^2 + d^2 = 1$, y $ac + bd = 0$, de donde concluimos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(2) = K.$$

Finalmente observemos que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \right) \cdot i = x + \lambda^2 i$$

de donde concluimos que $G = NAK$, la cual es la descomposición de Iwasawa de G.

Ahora veamos la descomposición de Gelfand-Naimark de G. Primero observemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{1+y^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto si consideramos el subconjunto $NA\,{}^0M\bar{N}$ vemos que los únicos elementos de G que no están en este subconjunto son los de la forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, \lambda \in \mathbb{R}^*, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Que es isomorfo a $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, es decir, es una variedad de dimensión menor que G y por lo tanto tiene medida 0.

Veamos ahora las fórmulas de integración asociadas a las descomposiciones de Iwasawa y Gelfand-Naimark. Sea G un grupo semisimple y sea θ una involución de Cartan. Sea $G = NAK$ la descomposición de Iwasawa asociada con esta involución de Cartan y sea (P_F, A_F) un par parabólico. Si $\mu \in (\mathfrak{a}_f)^*$, y si $H \in \mathfrak{a}_F$, escribiremos $a^\mu = \exp \mu(H)$ si $a = \exp H$. Definimos $\rho_F \in (\mathfrak{a}_f)^*$ mediante la fórmula $\rho_F(H) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\ H|_{\mathfrak{n}_f})/2$.

Teorema 3.22 *Sean dn, da y dm medidas invariantes en N_F, A_F y ${}^0M$ respectivamente. Sea dk la medida invariante de K normalizada de tal forma que K tiene volumen 1 con respecto a esta medida. Entonces podemos elegir una medida invariante en G, dg, tal que*

$$\int_G f(g)\,dg = \int_{N_F \times A_F \times {}^0M \times K} f(namk) a^{-2\rho_F}\,dn\,da\,dm\,dk,$$

para toda $f \in C_c(G)$. También, si $f \in C(K)$ entonces

$$\int_K u(k)\,dk = \int_K \times K_F u(k_f k(kg)) a(kg)^{2\rho_F}\,dk_f\,dk$$

donde si $g \in G$ y si $g = nak$, $n \in N$, $a \in A$,, $k \in K$, entonces $a(g) = a$ y $k(g) = k$.

Teorema 3.23 *Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, la medida dg también satisface*

$$\int_G f(g)\,dg = \int_{N_F \times {}^0M_F \times A_F \times \bar{N}_F} a^{-2\rho_F} f(nma\bar{n})\,dn\,dm\,da\,d\bar{n}$$

para toda $f \in C_c(G)$. Además, si $f \in C(K)$ entonces

$$\int_K f(k)\,dk = \int_{K_F \times \bar{N}} a(\bar{n})^{2\rho_F} f(k_F k(\bar{n}))\,dk_F\,d\bar{n}.$$

Ahora sea R un sistema de raíces positivas para $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ y sea

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} \,|\, \alpha(H) > 0 \text{ para toda } \alpha \in R\}.$$

Sea $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$ y definamos $\gamma(a) = \prod_{\alpha \in R} \sinh(\alpha(H))$, donde $a = \exp H \in A$.

Teorema 3.24 *Bajo las mismas hipótesis de los teoremas anteriores*

$$\int_G f(g)\,dg = \int_{K \times A^+ \times K} \gamma(a) f(k_1 a k_2)\,dk_1\,da\,dk_2$$

para todo $f \in C_c(G)$.

3.3. Subgrupos parabólicos

Sea $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, [X, \mathfrak{a}] = 0\}$, y sea

$$M = \{g \in G \,|\ \operatorname{Ad}(g)||_{\mathfrak{a}} = \operatorname{Id}\}.$$

Entonces $\mathfrak{m} = {}^0\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, $M = {}^0MA$ y ${}^0M = M \cap K$.

Sea $\mathfrak{t}$ una subalgebra abeliana maximal de $\mathfrak{t}$, sea $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, y sea $\mathfrak{h}$ la complexificación de $\mathfrak{h}_0$. Es fácil comprobar que $\mathfrak{h}$ es una subalgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Sea $\Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ el sistema de raíces de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ relativo a $\mathfrak{h}$. Entonces es claro que

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})|_{\mathfrak{a}} - \{0\}$$

Como los elementos de $\Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ toman valores reales en $\mathfrak{a}$ y toman valores puramente imaginarios en $\mathfrak{t}$ se sigue que

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = (i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}).$$

Sea H_1 un elemento de $\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, y sea $\{H_1, \ldots, H_r\}$ una base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Ordenemos $\Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ lexicográficamente con respecto a esta base. Sea R el correspondiente sistema de raíces positivas, y sea R_0 el conjunto de todos los $\mu \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ tal que $\mu(H_1) > 0$. Entonces R_0 es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, además es claro que $R|_{\mathfrak{a}} - \{0\} = R_0$. Sea Δ (respectivamente Δ_0) el correspondiente sistema de raíces simples para R (respectivamente R_0). Sea $F_0 = \{\alpha \in \Delta \mid \ \alpha|_{\mathfrak{a}} = 0\}$. Entonces

$$(\Delta - F_0)|_{\mathfrak{a}} = \Delta_0$$

y Δ_0 es un subconjunto linealmente independiente de $\mathfrak{a}^*$.

Sea F un subconjunto de Δ_0. Definamos

$$\mathfrak{a}_F = \{H \in \mathfrak{a} \,|\, \mu(H) = 0 \text{ para todo } \mu \in F\}.$$

Sea $\mathfrak{m}_F = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, [X, \mathfrak{a}_F] = \{0\}\}$,

$$M_F = \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}(g)H = H \text{ para toda } H \in \mathfrak{a}_F \ \}$$

y $A_F = \exp \mathfrak{a}_F$. Entonces M_F es un grupo real reductivo y A_F esta en el centro de M_F.

Sea R_F el conjunto de las raíces de R_0 cuya restricción a $\mathfrak{a}_F$ es diferente de 0. Definamos

$$\mathfrak{n}_F = \oplus_{\mu \in R_F} \mathfrak{g}^{\mu},$$

y sea N_F el subgrupo conexo de G cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{n}_F$. Si $P_F = M_F N_F$, entonces P_F es llamado el *Subgrupo parabólico estándar* con respecto a A_F y R_F. La pareja (P_F, A_F) es llamada un *par parabólico.*

Teorema 3.25 (Descomposición de Langlands) *La función*

$$\begin{aligned} {}^0M_F \times A_F \times N_F &\longrightarrow P_F \\ (m, a, n) &\mapsto man \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

$P_=\,{}^0MAN$ es llamado un *subgrupo parabólico mínimo* de G o un *subgrupo de Borel* de G. Observemos que $P_{\emptyset} \subset P_F$ para todo $F \subset \Delta_0$. De hecho sea ${}^*\mathfrak{a}_F = \mathrm{Span}\{H_\mu \,|\, \mu \in F\}$, ${}^*\mathfrak{n}_F = \oplus_{\mu \in F} \mathfrak{g}^{\mu}$ y sea ${}^*\overline{\mathfrak{n}}_F = \theta({}^*\mathfrak{n}_F)$. Entonces ${}^*\mathfrak{a}_F$ es el complemento ortogonal de $\mathfrak{a}_F$ en $\mathfrak{a}$ con respecto a la forma de Cartan-Killing y

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \overline{\mathfrak{n}}_F \oplus \mathfrak{m}_F \oplus \mathfrak{n}_F = \overline{\mathfrak{n}}_F \oplus {}^0\mathfrak{m}_F \oplus \mathfrak{a}_F \oplus \mathfrak{n}_F \\ &= \overline{\mathfrak{n}}_F \oplus ({}^*\overline{\mathfrak{n}}_F \oplus {}^0\mathfrak{m} \oplus {}^*\mathfrak{a}_F \oplus {}^*\mathfrak{n}_F) \oplus \mathfrak{a}_F \oplus \mathfrak{n}_F. \end{aligned}$$

Aun más, si definimos $K_F = M_F \cap K$, entonces

$${}^0M_F = K_F{}^*A_F{}^*N_F$$

es una descomposición de Iwasawa para ${}^0M_F$.

4. Representaciones irreducibles de grupos reductivos

4.1. $(\mathfrak{g}, K)$-módulos

Como hemos visto en la sección 1, una buena manera de estudiar las representaciones de los grupos de Lie es estudiar las representaciones de sus álgebras de Lie. Sin embargo, no todas las representaciones de una álgebra de Lie se integran para formar una representación del grupo de Lie, consideremos por ejemplo el siguiente caso:

Ejemplo 4.1 Sea $G_1 = \mathbb{R}$, $G_2 = S^1$. Entonces $\mathrm{Lie}(G_1) = \mathrm{Lie}(G_2) = \mathfrak{g} = \mathbb{R}$. Entonces todas las representaciones irreducibles de $\mathfrak{g}$ están dadas por $\pi_\xi(x)v = i\xi xv$ donde $x, v \in \mathbb{R}$ y ξ es un número real. Todas estas representaciones se integran para formar una representación de $G_1 = \mathbb{R}$, las representaciones $\pi_\xi(x)v = \mathrm{e}^{i\xi xv}$, sin embargo solamente en el caso en que $\xi \in \mathbb{Z}$, estas representaciones se integran para formar una representación de S^1.

En general, sea (π, H) una representación de G. Decimos que $v \in H$ es un vector C^∞ si la función $g \mapsto \pi(g)v$ es C^∞ (o equivalentemente si $g \mapsto \langle \pi(g)v, x\rangle$ es C^∞). Llamamos $H^\infty \subset H$ al espacio de todos los vectores C^∞.

Podemos definir una acción de $\mathfrak{g}$ en H^∞ mediante

$$\pi(X)v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\exp tX)v.$$

Por otro lado, si $K \subset G$ es un subgrupo maximal entre los subgrupos compactos de G, entonces podemos usar el "truco unitario" para hacer $(\pi|_K, H)$ una representación unitaria de K. En este caso la representación se descompone como

$$H = \widehat{\bigoplus_{\gamma \in \hat{K}}} \overline{H(\gamma)}$$

donde

$$H(\gamma) = \text{Suma de todos los subespacios de } H \text{ que son equivalentes a } V_\gamma$$

donde V_γ es un representante en la clase de $\gamma \in \hat{K}$. Sea

$$H_K = \bigoplus H(\gamma) \cap H^\infty$$

Observación 4.2 H_K es el espacio de los vectores C^∞ v, tales que $\pi(K)v$ genera un espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema 4.3 *El espacio H_K es denso en H.*

Definición 4.4 *Sea V un $\mathfrak{g}$-modulo que también es un modulo para K. Decimos que V es un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo si se satisfacen las siguientes condiciones*

1. $k \cdot X \cdot v = Ad(k)X \cdot k \cdot v$

2. *Si $v \in V$, entonces Kv genera un espacio vectorial de dimensión finita $W_v \subset V$, y la acción de K en W_v es continua.*

3. *Si $X \in \mathfrak{k}$, y $v \in V$, entonces*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)v = Xv$$

Observación 4.5 H_K es un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo. Recordemos que $G \simeq K \times \exp \mathfrak{p}$, es decir toda la topologia de G esta en K, una vez que tenemos una representación de $\mathfrak{g}$ que restringida a $\mathfrak{k}$ se integra a una representación de K entonces podemos integrar toda la representación de $\mathfrak{g}$ a G.

Definición 4.6 *Decimos que H_K es* admisible *si $dim\, H_K(\gamma) < \infty$ para toda $\gamma \in \hat{K}$.*

Lema 4.7 *Si $dim\, H_K(\gamma) < \infty$, entonces todos los vectores $v \in H(\gamma)$ son C^∞ (incluso son analíticos).*

Teorema 4.8 *Si (π, H) es una representacione irreducible de G, entonces H_k es admisible.*

Teorema 4.9 *Si G es un grupo reductivo, y $K \subset G$ es un subgrupo compacto maximal, entonces una representaciones (π, H) es irreducibles si y solo si H_K es un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo admisible e irreducible.*

Este teorema nos permite olvidarnos de los aspectos analíticos de las representaciones de grupos y concentrarnos solamente en los aspectos algebraicos de los $(\mathfrak{g}, K)$-módulos admisibles.

4.2. La serie principal de representaciones

Sea G un grupo de Lie semisimple, y sea $P = {}^0MAN$ un subgrupo parabólico mínimo de G, con una descomposición de Langlands dada. Sea (σ, H_σ) una representación unitaria irreducible de ${}^0M$. Si $\mu \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^*$, denotamos por σ_μ a la representación de P dada por

$$\sigma_\mu(nam) = a^{\mu+\rho}\sigma(m) \qquad m \in {}^0M,\, a \in A,\, n \in N,$$

donde ρ es la mitad de la suma de las raíces positivas de $\mathfrak{a}$. Definamos

$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_\mu) = \{f : G \longrightarrow H_\sigma \mid f(namk) = a^{\mu+\rho}\sigma(m)f(k), \quad \int_K |f(k)|^2\, dk < \infty\}$$

y definamos una acción de G en $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_\mu)$ mediante

$$(\pi_{\sigma,\mu}(g)f)(x) = f(xg).$$

A las representaciones $(\pi_{\sigma,\mu}, H^{\sigma,\mu})$ se les conoce como la *serie principal de representaciones.*

Lema 4.10 *El* $(\mathfrak{g}, K)$ *modulo* $(H^{\sigma,\mu})_K$ *es admisible.*

Observemos que si $f \in \mathrm{Ind}_P^G(\sigma_\mu)$, entonces f esta completamente determinada por los valores que toma en K, y por lo tanto visto como un modulo para K es isomorfo con $\mathrm{Ind}_M^K(\sigma)$.

Ejemplo 4.11 Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Recordemos que en este caso la descomposición de Iwasawa de G esta dada por $G = NAK$, y $P = NAM$ es un subgrupo de Borel de G, donde

$$\begin{aligned}
K &= \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \; \theta \in [0, 2\pi) \right\} \\
\bar{N} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \middle| \; y \in \mathbb{R} \right\} \\
{}^0M &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\
A &= \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \middle| \; \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \right\} \\
N &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Queremos estudiar los espacios $H^{\sigma,\mu}$, donde σ es una representación de ${}^0M$ y $\mu \in (\mathfrak{a})^*_{\mathbb{C}}$. Ahora ${}^0M$ es en este caso un grupo muy sencillo y solo tiene dos representaciones irreducibles y ambas son de dimensión uno:

$$\begin{gathered}
1 : M \longrightarrow \mathbb{C} \\
\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto 1
\end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered}
-1 : M \longrightarrow \mathbb{C} \\
\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto -1.
\end{gathered}$$

Por otro lado, podemos identificar a $(\mathfrak{a})^*_{\mathbb{C}}$ con $\mathbb{C}$ mediante la correspondencia

$$\mu \in (\mathfrak{a})^*_{\mathbb{C}} \longleftrightarrow \mu\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right).$$

Observemos que bajo esta identificación $\rho \leftrightarrow 1$. Tomando esto en consideración vemos que los espacios que nos interesa estudiar son los espacios $H^{\epsilon,\mu}$, $\epsilon = \pm 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, de las funciones $f : G \to \mathbb{C}$ tales que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \right) = \lambda^{\mu+1} \epsilon f(k(\theta))$$

y $\int_K |f(k)|^2\, dk < \infty$, donde

$$k(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Sean $I_{\epsilon,\mu} = (H^{\sigma,\mu})_K$ los $(\mathfrak{g}, K)$-modulos asociados a estos espacios. Queremos determinar su estructura. Para esto primero tratemos de determinar su estructura como un modulo bajo la acción de K. Observemos que los elementos de $H^{\epsilon,\mu}$ están completamente determinados por los valores que toman en K y si restringimos estos elementos a K, entonces la acción de K es la acción regular por la derecha. Por lo tanto como un K-modulo podemos identificar $H^{\epsilon,\mu}$ con

$$\{f \in L^2(K) \,|\, \epsilon f(k(\theta)) = f(-k(\theta)) = f(k(\theta+\pi))\}$$

donde hemos usado que $-k(\theta) = k(\theta+\pi)$. De esta observación y los resultados de la sección 1 vemos que como un K-modulo

$$I_{1,\mu} \simeq \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\, e^{2li\theta} \qquad I_{-1,\mu} \simeq \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\, e^{(2l+1)i\theta}.$$

Sea $v_l \in I_{\epsilon,\mu}$ el vector tal que

$$v_l\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \right) = \epsilon e^{il\theta}.$$

(Observemos que si $\epsilon = 1$, entonces l es par, y si $\epsilon = -1$ entonces l es impar). Juntando todos estos resultados concluimos que

$$I_{\epsilon,\mu} = \bigoplus_{l\in 2\mathbb{Z}+(1-\epsilon)/2} \mathbb{C}\, v_l.$$

Ahora tratemos de entender la estructura de $I_{\epsilon,\mu}$ como un $\mathfrak{g}$-modulo. Sean

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$h = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad e = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} (h \cdot v_l)(k(\theta)) &= i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v_l\left(k(\theta)\exp t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v_l(k(\theta - t)) \\ &= i \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{-lit} v_l(k(\theta)) = i(-li)v_l(k(\theta)) = lv_l(k(\theta)), \end{aligned}$$

es decir v_l es un eigenvector de h con eigenvalor l.

Ahora tratemos de calcular $e \cdot v_l$. Observemos que

$$(he)v_l = ([h, e] + eh)v_l = (2ev_l + e(lv_l)) = (l + 2)ev_l.$$

Es decir ev_l es un eigenvector de h con eigenvector $l + 2$, por lo tanto

$$ev_l = c_l v_{l+2}.$$

para calcular c_l recordemos que por la definición de los v_l's

$$(ev_l)(1) = c_l v_{l+2}(1) = c_l, \tag{7}$$

y además

$$\begin{aligned}(Ev_l)(1) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v_l(\exp tE) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v_l(1) = 0\\ (Hv_l)(1) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v_l(\exp tH) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t(\mu+1)}v_l(1) = \mu + 1.\end{aligned}$$

Usando estas formulas y que

$$e = \frac{1}{2}(H + h + 2iE),$$

vemos que

$$(ev_l)(1) = \frac{1}{2}((H + h + 2iE)v_l)(1) = \frac{1}{2}(\mu + 1 + l).$$

De esto y de (7)

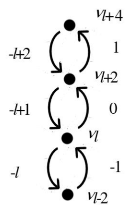
$$ev_l = \frac{1}{2}(\mu + l + 1)v_{l+2}.$$

Análogamente

$$fv_l = \frac{1}{2}(\mu - l + 1)v_{l-2}.$$

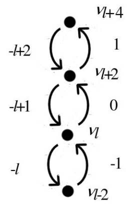
Despues de todos estos calculos finalmente podemos ver cual es la estructura de los $I_{\epsilon,\mu}$ como $(\mathfrak{g}, K)$-módulos. Si $\mu \neq \pm l + 1$ para todo $l \in 2\mathbb{Z} + (1 - \epsilon)/2$, entonces $I_{\epsilon,\mu}$ es irreducible. Consideremos ahora el caso en que $\mu \in \mathbb{Z}$ y elegimos ϵ tal que $I_{\epsilon,l}$ no es irreducible. Aquí tenemos tres casos: $l > 0$, $l < 0$ y $l = 0$.

1. $l > 0$. En este caso tenemos la siguiente figura:



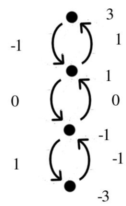
En este caso tenemos dos submódulos irreducibles, uno generado por un peso máximo, y el otro generado por un peso mínimo, denominamos a estos módulos D^-_{-l}, y D^+_l, respectivamente.

2. $l < 0$. En este caso tenemos la siguiente figura:



En este caso solo tenemos una representación irreducible de dimensión finita. Llamaremos a esta representación F_l.

3. $l = 0$. La figura correspondiente en este caso es:



Observemos que este caso corresponde a $I_{1,0}$, y que esta representación se descompone como una suma directa de dos representaciones irreducibles. Estas representaciones se denominan D_0^+ y D_0^- de manera similar al caso cuando $l > 0$.

Es claro que cada una de las representaciones irreducibles D^+_l, D^-_{-l} y F_l son inequivalentes como $(\mathfrak{g}, K)$-módulos, pero ¿Que pasa con los $I_{\epsilon,\mu}$ que son irreducibles? Supongamos que $I_{\epsilon,\mu} \simeq I_{\epsilon',\mu'}$ y que ambas son $(\mathfrak{g}, K)$-módulos irreducibles. Entonces deberiamos tener que

$$fev_l = fev'_l, \qquad v_l \in I_{\epsilon,\mu}, \quad v'_l \in I_{\epsilon',\mu'}$$

pero entonces, de acuerdo con lo que hemos visto, deberiamos tener que

$$\frac{1}{4}(\mu + l + 1)(\mu - l - 1) = \frac{1}{4}(\mu' + l + 1)(\mu' - l - 1)$$
$$\mu^2 - (l + 1)^2 = (\mu')^2 - (l + 1)^2$$
$$\mu^2 = (\mu')^2 \mu = \pm\mu'.$$

Por lo tanto si $I_{\epsilon,\mu}$ es irreducible, entonces $I_{\epsilon,\mu} \simeq I_{\epsilon,-\mu}$ y ya no hay mas isomorfismos.

Finalmente recordemos que $Z(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{h})^W$. En este caso $\mathfrak{h}$ tiene dimensión 1 y el grupo de Weyl es el grupo generado por el morfismo $z \mapsto -z$. Por lo tanto $S(\mathfrak{h})^W \simeq \mathbb{C}[z^2]$, y en consecuencia $Z(\mathfrak{g})$ es generado por un elemento de grado dos. Ahora sabemos que el elemento de casimir $c = EF + H^2/2 + FE = ef + h^2/2 + fe$ se encuentra en $Z(\mathfrak{g})$ y tiene grado dos por lo tanto $Z(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[c]$. Para calcular la acción del elemento de Casimir en $I_{\epsilon,\mu}$ observemos que si $I_{\epsilon,\mu}$ es irreducible entonces, por el lema de Schur, el elemento de Casimir actúa como una constante, es decir, para todo $v_l \in I_{\epsilon,\mu}$

$$c \cdot v_l = \lambda v_l$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda v_l(1) = (c \cdot v_l)(1) \\ &= (EF + H^2/2 + FE)v_l(1) = (H^2/2 - H + 2EF)v_1(1) \\ &= (\mu+1)^2/2 - (\mu+1) = (\mu^2-1)/2.\end{aligned}$$

Observemos que en este ejemplo hemos construido todas las representaciones irreducibles de $G = \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$. Efectivamente, si V es un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo irreducible, entonces

$$V = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} V(l)$$

donde $V(l)$ es la componente isotípica correspondiente a la representación

$$k(\theta)v = e^{il\theta}v.$$

Observemos que si $v_l \in V(l)$, entonces $hv_l = lv_l$. Además como ya hemos visto anteriormente, si $v_l \in V(l)$, entonces $ev_l \in V(l+2)$, y $fv_l \in V(l-2)$. Como $\{h, e, f\}$ es una base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ vemos que como V es irreducible, entonces solo las componentes isotípicas pares, o solo las impares son distintas de cero. Sea c el elemento de Casimir de $\mathfrak{g}$. Como V es irreducible, c actúa como una constante, digamos λ. Sea μ, tal que $\lambda = \mu^2 - 1$. Entonces como $2fe = c - h^2/2 - h$

$$2fev_l = [(\mu^2-1)/2 - l^2/2 - l]v_l = \frac{\mu^2 - (l+1)^2}{2} v_l = \frac{(\mu+l+1)(\mu-l-1)}{2} v_l,$$

por lo tanto $dim\, V(l) \leq 1$ para toda l. Si μ es tal que $(\mu+l+1)(\mu-l-1) \neq 0$ para todas las l de la paridad en la cual algunas $V(l)$ podrían ser diferentes de cero, entonces es claro que $V \simeq I_{\epsilon,\mu}$, donde elegimos ϵ de tal manera que los $V(l)$ que no son cero son precisamente lo eigenvalores que corresponden a $I_{\epsilon,\mu}$. Finalmente si $(\mu+l+1)(\mu-l-1) = 0$ para alguna de estas l's entonces es claro que V debe ser isomorfo a algunas de las D_l^+, D_{-l}^- o F_l.

Como hemos visto todas las representaciones irreducibles de $G = SL(2,\mathbb{R})$ se pueden realizar como subrepresentaciones de algún elemento de la serie principal de representaciones. El teorema de la representación de Casselman nos dice que este mismo resultado es valido para cualquier grupo semisimple G. Sin embargo para tener una mejor comprensión de este teorema es necesario introducir una construcción que es en cierto sentido dual a la de representaciones inducidas. Sea V un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo admisible, y consideremos el espacio vectorial $V/\mathfrak{n}V$. Como $\mathfrak{p}$ es el normalizador de $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{g}$, la acción de $\mathfrak{p}$ en V desciende a una acción en $V/\mathfrak{n}V$ donde $\mathfrak{n}$ actúa de manera trivial. Aún más la acción de ${}^0\mathfrak{m}$ se integra para definir una acción de ${}^0M$ en $V/\mathfrak{n}V$, $\dim V/\mathfrak{n}V < \infty$ y es distinto de $\{0\}$ si V es distinto de $\{0\}$. En resumen, si $V \neq \{0\}$, entonces $V/\mathfrak{n}V$ es un $(\mathfrak{p}, {}^0M)$-modulo no trivial.

Sea $H_{\sigma,\mu}$ el $(\mathfrak{p}, {}^0M)$-modulo H_σ en donde $\mathfrak{a}$ actúa como $(\mu+\rho)(\mathrm{Id})$ y $\mathfrak{n}$ actúa trivialmente. Sea V un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo admisible. Si $T \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(V, H^{\sigma,\mu})$, definamos $\hat{T}(v) = (Tv)(1)$. Entonces $\hat{T} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{p},{}^0M}(V/\mathfrak{n}V, H_{\sigma,\mu})$.

Lema 4.12 *La correspondencia $T \mapsto \hat{T}$ define una biyección entre*

$$Hom_{\mathfrak{g},K}(V, H^{\sigma,\mu}) \qquad y \qquad Hom_{\mathfrak{p},{}^0M}(V/\mathfrak{n}V, H_{\sigma,\mu})$$

Demostración. Sea $S \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{p},{}^0M}(V/\mathfrak{n}V, H_{\sigma,\mu})$ y definamos

$$\tilde{S}(v)(k) = S(kv).$$

Entones $\tilde{S} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(V, H^{\sigma,\mu})$ y

$$\hat{\tilde{S}}(v) = \tilde{S}(v)(1) = S(1.v) = S(v)$$
$$\tilde{\hat{T}}(v)(k) = \hat{T}(kv) = T(kv)(1) = (k \cdot T)(v)(1) = T(v)(k)$$

□

Teorema 4.13 (Teorema de la representación de Casselman) *Sea V un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo irreducible. Entonces V es equivalente a un sumando irreducibles de algún $H^{\sigma,\mu}$.*

Demostración. Como V es irreducibles, entonces V es admisible. Por lo tanto $V/\mathfrak{n}V$ es una representación de ${}^0M$ de dimensión finita, y como ${}^0M$ es compacto, podemos asumir que es unitaria. Sea W un sumando irreducibles de $V/\mathfrak{n}V$. Como $\mathfrak{a}$ conmuta con ${}^0M$ el lema de Schur nos dice que $\mathfrak{a}$ actúa como un escalar, y por lo tanto W es equivalente a algún $H_{\sigma,\mu}$. Sea

$$T : V/\mathfrak{n}V \longrightarrow H_{\sigma,\mu}$$

la proyección a este subespacio irreducible, entonces $T \neq 0$, y por lo tanto usando el lema anterior concluimos que

$$\tilde{T} : V \longrightarrow H^{\sigma,\mu}$$

no es el morfismo trivial. Ahora como V es irreducible, y $\tilde{T} \neq \{0\}$, vemos que $\tilde{T}$ define un encaje de V en $H^{\sigma,\mu}$. □

El teorema de la representación de Casselman nos da una manera de construir todas las representaciones irreducibles de un grupo reductivo G, sin embargo para dar una clasificación necesitamos saber cuales son los sumandos irreducibles de $H^{\sigma,\mu}$ y ver cuales de estas representaciones son equivalentes.

Para poder dar una medida de Plancherel para G primero necesitamos saber cuales son todas las representaciones unitarias irreducibles, aunque el teorema de la representación de Casselman nos permite construir todas las representaciones irreducibles de G no nos dice cuales de ellas son unitarias, y tampoco nos indica cuales de ellas son cuadrado integrables. Otro punto importante es que el análisis harmónico solo esta bien definido en el espacio de Schwartz, que es definido como el espacio de funciones C^{∞} que además satisfacen cierta condición de desvanecerse con suficiente rapidez en el infinito. Para poder hacer este concepto mas concreto, necesitamos el concepto de una norma en un grupo de Lie.

Definición 4.14 *Sea G un grupo de Lie. Una norma en G es una función $\|\cdot\| : G \longrightarrow [1,\infty)$, tal que*

1. $\|g\| = \|g^{-1}\|$, *para todo $g \in G$.*
2. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, *para $x, y \in G$.*
3. $\{g \in G \mid \|g\| \leq r\}$ *es compacto para todo $r < \infty$*
4. $\|k_1 \exp(tX)k_2\| = \exp(X)^t$ *para todo $k_1, k_2 \in K$, $X \in \mathfrak{p}$ y $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Definición 4.15 *Sea V un (g, K)-modulo irreducible, y sea P un subgrupo de Borel de G. Sea*

$$E(P, V) = \{\mu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid (V/\mathfrak{n}V) \neq \{0\}\}.$$

Definición 4.16 *Sea $\Delta_0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. Definamos $H_1, \ldots, H_r \in \mathfrak{a}$ mediante $\alpha_j(H_j) = \delta_{i,j}$. Si V es un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo definamos $\Lambda_V \in \mathfrak{a}^*$ mediante*

$$\Lambda_V(H_j) = max\{\text{-}Re\ \mu(H_j) \mid \mu \in E(P, \tilde{V})\}.$$

Teorema 4.17 *Sea (π, H) una representación de Hilbert admisible y finitamente generada de G. Sea $V = H_k$, y $\Lambda = \Lambda_V$. Entonces existe una constante positiva d tal que si $v, w \in V$, entonces existe una constante $c_{v,w}$ tal que*

$$|\langle v, \pi(a)w\rangle| \leq (1 + \log\|a\|)^d a^{\Lambda} c_{v,w}.$$

Definición 4.18 *Decimos que V es* templada *si para todo $\epsilon > 0$ y para toda función coeficiente f*

$$\int_G |f(g)|^{2+\epsilon}\, dg < \infty.$$

Decimos que V es cuadrado integrable *si*

$$\int_G |f(g)|^2\, dg < \infty$$

para todas las funciones coeficientes f.

Sea $f(g) = \langle v, \pi(g)w\rangle$, supongamos que v, w son invariantes bajo la acción de K. Entonces de los teoremas 3.24 y 4.17 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_G |f(g)|^{2+\epsilon} &= \int_{K\times A^+\times K} \gamma(a)|f(k_1ak_2)|^{2+\epsilon}\,dk_1\,da\,dk_2\\ &= \int_A^+ \gamma(a)|f(a)|^{2+\epsilon}\,da\\ &\leq \int_A^+ C\gamma(a)[(1+\log\|a\|)^d a^\Lambda]^{2+\epsilon}\,da.\end{aligned}$$

De aquí concluímos que f es una función templada si y solo si $\Lambda+\rho \in -\mathrm{Cl}({}^+\mathfrak{a}^*)$ y f es cuadrado integrable si y solo si $\Lambda_V + \rho \in -({}^+\mathfrak{a}^*)$. En general tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.19 *Sea (π, V) un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo admisible. Si $\Lambda_V + \rho \in -Cl({}^+\mathfrak{a}^*)$, entonces V es templada. Si $\Lambda_V + \rho \in -({}^+\mathfrak{a}^*)$ entonces V es cuadrado integrable.*

Ejemplo 4.20 Sean H, E, F, h, e y f como antes, y observemos que

$$E = \frac{i}{2}(h+f-e), \qquad H = e+f.$$

Daremos una clasificación de las representaciones irreducibles de $G = Sl(2\mathbb{R})$ con respecto al comportamiento de sus funciones coeficientes al infinito.

1. **Dimensión finita**. Sea $V = F_l$, $v_l \in V$ un vector con peso máximo l, y definamos una base V mediante $v_{l-2k} = f^k v_l$. En $V/\mathfrak{n}V$ tenemos que

$$\begin{aligned}0 = [Ev_l] &= [\frac{i}{2}(h+f-e)v_l]\\ &= [(h+f-e)v_l] = l[v_l] + [v_{l-2}].\end{aligned}$$

   Por lo tanto en $V/\mathfrak{n}V$, $[v_{l-2}] = -l[v_l]$. Análogamente

$$\begin{aligned}0 = [Ev_{l-2}] &= [\frac{i}{2}(h+f-e)v_{l-2}]\\ &= [(h+f-e)v_{l-2}] = (l-2)[v_{l-2}] + [v_{l-4}] + [ev_{l-2}].\end{aligned}$$

   Por lo tanto $[v_{l-4}] = -(l-2)[v_{l-2}] - [ev_{l-2}]$. Lo importante aquí es que $[v_{l-2}]$, y $[ev_{l-2}]$ son múltiplos de v_l en $V/\mathfrak{n}V$. Prosiguiendo de esta manera vemos que todos lo vectores v_k son múltiplos de $[v_l]$ en $V/\mathfrak{n}V$, es decir $V/\mathfrak{n}V$ tiene dimensión uno. Ahora observemos que

$$H[v_l] = [(e+f)v_l] = [v_{l-2}] = -l[v_l]$$

   es decir H actúa en este espacio como multiplicación por $-l$. En consecuencia

$$\Lambda = \max\{-\mu \,|\, \mu \text{ es un peso de } V/\mathfrak{n}V\} = \max\{-(-l)\} = l,$$

   y por lo tanto $\Lambda + \rho = l + 1 > 0$, de donde concluimos que F_l no es una representación templada.

2. **Serie discreta** Sea $V = D_l^+$, $l \geq 2$, $l \in \mathbb{Z}$. Recordemos que

$$D_l^+ = \bigoplus_{j \geq 0} D_l^+(l + 2j).$$

Sea $v_l \in V$ un vector con peso l, y definamos una base para V mediante $v_{l+2k} = e^k v_l$. De manera análoga al caso anterior podemos observar que $V/\mathfrak{n}V$ tiene dimensión uno, y que $[v_{l+2}] = l[v_l]$ en $V/\mathfrak{n}V$. Por lo tanto

$$H[v_l] = (e + f)[v_l] = [v_{l+2}] = l[v_l].$$

De aquí vemos que

$$\Lambda = \text{máx}\{-\mu \,|\, \mu \text{ es un peso de } V/\mathfrak{n}V\} = \text{máx}\{-l\} = -l$$

y por lo tanto $\Lambda + \rho = -l + 1 < 0$, de donde concluimos que D_l^+ es una representación cuadrado integrable.

De manera completamente análoga podemos observar que D_{-l}^- también es cuadrado integrable y D_1^+, D_{-1}^- son solo representaciones templadas (ya que en este ultimo caso $\Lambda + \rho = -1 + 1 = 0$).

3. **Serie principal** Sea $V = I_{\epsilon,\mu}$, donde $I_{\epsilon,\mu}$ es irreducible. Elijamos una base para $I_{\epsilon,\mu}$ tal que

$$fv_l = \frac{1}{4}(\mu - l - 1)(\mu + l + 1)v_{l-2} \qquad \text{y} \qquad ev_l = v_{l+2}.$$

Observemos que usando esta base tenemos que en $V/\mathfrak{n}V$

$$\begin{aligned} E[v_l] &= 0 = \frac{1}{4}(\mu - l - 1)(\mu + l + 1)[v_{l-2}] + l[v_l] - [v_{l+2}] \\ H[v_l] &= (e + f)[v_l] = \frac{1}{4}(\mu - l - 1)(\mu + l + 1)[v_{l-2}] + [v_{l+2}] \\ &= \frac{1}{2}(\mu - l - 1)(\mu + l + 1)[v_{l-2}] + l[v_l], \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} E[v_{l-2}] &= 0 = \frac{1}{4}(\mu - l + 1)(\mu + l - 1)[v_{l-4}] + (l - 2)[v_{l-2}] - [v_l] \\ H[v_{l-2}] &= (e + f)[v_{l-2}] = \frac{1}{4}(\mu - l + 1)(\mu + l - 1)[v_{l-4}] + (l - 2)[v_{l-2}] \\ &= 2[v_l] + (2 - l)[v_{l-2}]. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones vemos que $V/\mathfrak{n}V$ es de dimensión dos, y dado cualquier l, $\{[v_{l-2}], [v_l]\}$ es una base para $V/\mathfrak{n}V$. Con respecto a esta base

$$H = \begin{bmatrix} 2 - n & \frac{1}{2}(\mu - n + 1)(\mu + n - 1) \\ 2 & n \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores de esta matriz son $1+\mu$ y $1-\mu$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $Re\,\mu \geq 0$. Entonces es claro que

$$\Lambda = -1 + Re\,\mu \qquad \text{y} \qquad \Lambda + \rho = Re\,\mu \geq 0$$

por lo tanto $I_{\epsilon,\mu}$ es templada si y solo si $Re\,\mu = 0$, es decir, si y solo si $\mu \in i\mathbb{R}$.

Sea G un grupo semisimple y sea $P = NA\,{}^0M$ un subgrupo de Borel de G. Sea 1 la función que es idénticamente igual a 1 en K, y sea γ_0 la clase de la representación trivial de K. Entonces es claro que

$$(H^\mu)_K(\gamma_0) = \mathbb{C}\,1.$$

Sea Ξ_μ la función definida mediante

$$\Xi_\mu(g) = \langle \pi_\mu(g)1, 1\rangle.$$

Entonces

$$\Xi_\mu(g) = \int_K a(kg)^{\mu+\rho}\,dk \qquad \text{para toda } g \in G,$$

en particular

$$\Xi(g) := \Xi_0(g) = \int_K a(kg)^\rho\,dk.$$

La función Ξ es llamada la función esférica de Harish-Chandra.

Lema 4.21 *Si $k_1, k_2 \in K$ y $a \in \mathrm{CL}(A^+)$, entonces existen constantes positivas C y d tales que*

$$a^{-\rho} \leq \Xi(k_1 a k_2) = \Xi(a) \leq C a^{-\rho}(1 + \log\|a\|)^d.$$

Definición 4.22 *Sea G un grupo de Lie semisimple. Definimos el* espacio de Schwartz *de G como el espacio $S(G)$ de las funciones $f \in C^\infty$ tales que*

$$\sup\{(L(X)R(Y)f)(g)(1+\log\|g\|)^d\,\Xi(g)^{-1} \mid d > 0,\ X, Y \in U(\mathfrak{g}),\ g \in G\} < \infty$$

donde L, R son las acciones regulares por la izquierda y por la derecha respectivamente.

Observación 4.23 Bajo las seminormas

$$\rho_{d,X,Y}(f) = \sup\{(L(X)R(Y)f)(g)(1+\log\|g\|)^d\,\Xi(g)^{-1} \mid g \in G\}$$

$S(G)$ es un espacio de Frechét.

Hasta ahora hemos estudiado las representaciones que se obtienen de inducir desde P a G, sin embargo podemos hacer esta construcción en dos tiempos: Sea $F \subset \Delta_0$, y consideremos ${}^0M_F$. ${}^0M_F$ es un grupo semisimple, e induciendo desde un subgrupo parabólico de este grupo semisimple podemos definir una representación (σ, H_σ) de ${}^0M_F$. Ahora definamos una representación σ_ν, $\nu \in \mathfrak{a}_F^*$ de $\mathfrak{p}_F$ mediante

$$\sigma_\nu(nam) = a^{\nu+\rho_F}\sigma(m),$$

donde ρ_F es el "ρ" de $\mathfrak{a}_F$. Entonces podemos considerar

$$\mathrm{Ind}_{P_F}^G(\sigma_\nu) = \{f : G \longrightarrow H_\sigma \mid f(namk) = a^{\nu+\rho_F}\sigma(m)f(k)\}$$

como una representación de G. Por el teorema de la representación de Casselman H_σ es una subrepresentación de inducir de ${}^0M$ a ${}^0M_F$, y despues hemos inducido desde ${}^0M_F$ a G. De aquí vemos que esta representación es una subrepresentación de inducir de ${}^0M$ a G, pero tenemos un mejor control acerca de cuales representaciones estamos considerando.

La observación critica que hizo Harish-Chandra es que es posible obtener todas las representaciones que no son templadas induciendo desde las representaciones templadas, y que uno obtiene las representaciones templadas induciendo desde las cuadrado integrables. Por lo tanto el espacio importante cuando consideramos representaciones irreducibles de un grupo es el espacio de las funciones coeficiente de las representaciones cuadrado integrables. La cerradura de este espacio de funciones en $S(G)$ se llama el espacio de las *formas cuspidales*. Por lo tanto para poder entender la teoría de representaciones y el análisis harmónico en un grupo reductivo, necesitamos estudiar las representaciones cuadrado integrables y el análisis harmónico en el espacio de formas cuspidales. Harish-Chandra llamo a esta idea la "filosofía de las formas cuspidales". Esta "filosofía" es confirmada por los siguiente resultados.

Teorema 4.24 *Sea V un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo irreducible y templado. Entonces existe un par parabólico (P_F, A_F), y una representación unitaria irreducible (σ, H_σ) de ${}^0M_F$ tal que $(H_\sigma)_K$ es cuadrado integrable y $\mu \in (\mathfrak{a}_f)^*$ tal que V es isomorfo a un sumando de $I_{P_F,\sigma,i\mu}$.*

Este teorema nos dice que todas las representaciones templadas provienen de inducir sobre las representaciones cuadrado integrables. Sea F un subconjunto de Δ_0 y sea (P_F, A_F) el par parabólico correspondiente. Sea (σ, H_σ) una representación unitaria irreducible de ${}^0M$ tal que $(H_\sigma)_K$ es templada. Sea $\mu \in (\mathfrak{a}_f)^*_{\mathbb{C}}$ tal que $\mathrm{Re}(\mu, \alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Phi(P_F, A_F)$. Llamamos a una tripleta (P_F, σ, μ), *parametros de Langlands* (Permitimos $P_F = G$, es decir $F = \Delta_0$).

Teorema 4.25 (Teorema de clasificación de Langlands) *Sea G un grupo semisimple, y sea (P_F, σ, μ) una tripleta de parámetros de Langlands.*

1. *Existe un único modulo cociente irreducible de $I_{P_F,\sigma,\mu}$ que es isomorfo con el único submódulo irreducible de $I_{P_F,\tilde{\sigma},-\mu}$. Llamaremos a este modulo $J_{P_F,\sigma,\mu}$.*

2. *Si (P_F, σ, μ) y $(P_{F'}, \sigma', \mu')$ son parametros de Langlands y si $J_{P_F,\sigma,\mu}$ es equivalente con $J_{P_{F'},\sigma',\mu'}$, entonces $F = F'$, $\mu = \mu'$ y σ es unitariamente equivalente con σ'.*

3. *Sea V un $(\mathfrak{g}, K)$-modulo irreducible. Entonces existen parametros de Langlands (P_F, σ, μ) tal que V es isomorfo a $J_{P_F,\sigma,\mu}$.*

Ejemplo 4.26 Observemos que las representaciones de dimensión finita son el único cociente irreducible de los espacios $I_{\epsilon,k}$ y además son el único submodulo de $I_{\epsilon,-k}$.

La clasificación de Langlands nos permite reducir el problema de clasificar todos los $(\mathfrak{g}, K)$-módulos al problema de clasificar los $(\mathfrak{g}, K)$-módulos templados. El teorema anterior nos dice que este problema es equivalente a clasificar los sumandos irreducibles que surgen de inducir de las representaciones cuadrado integrables.

Para resolver el problema de calcular la medida de Plancherel de un grupo semisimple nos quedan pendientes los siguientes puntos.

1. **Clasificar las representaciones cuadrado integrables.** Esto fue conseguido por Harish-Chandra, aunque la teoría de los functores de Zuckerman (basada en la teoría de cohomología de álgebras de Lie) provee una simplificación.

2. **Clasificar las representaciones templadas a partir de la clasificación de las cuadrado integrables.** Esto fue desarrollado por Knapp-Zuckerman en [17]

3. **Completar la clasificación de los $(\mathfrak{g}, K)$-módulos irreducibles.** Con estos dos puntos y el teorema de clasificación de Langlands completamos la clasificación.

4. **Indicar cuales representaciones son unitarias** Todas las representaciones templadas son unitarias, pero hay algunas representaciones en la serie complementaria que también los son. Encontrarlas todas es el objetivo del proyecto del Atlas de los grupos de Lie (http://www.liegroups.org/)

5. **Encontrar la medida de Plancherel para los grupos reductivos.** Esto fue completado por Harish-Chandra y es uno de sus grandes logros. La clave aquí es que solo las representaciones templadas aparecen en la medida de Plancherel. Sin embargo algunas de las representaciones de la serie complementaria pueden aparecer al dar la descomposición de espacios de la forma $H\backslash G$.

Referencias

[1] Nolan R. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, M. Dekker, 1973.

[2] Nolan R. Wallach, *Real Reductive Groups I*, Academic Press, 1988.

[3] Nolan R. Wallach, *Real Reductive Groups II*, Academic Press, 1988.

[4] Nolan R. Wallach, *Real Reductive Groups I*, Academic Press, 1988.

[5] Roe Goodman, Nolan R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups* Cambridge University Press, 2000

[6] Sigurdur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[7] Frak W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag, 1983.

[8] Daniel Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge University Press, 1998.

[9] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1990.

[10] Anthony W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups*, Princeton University Press, 2001.

[11] Jacques Dixmier, *Enveloping Algebras*, AMS Bookstore, 1996.

[12] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representations Theory*, Springer-Verlag, 1972.

[13] Hermann Weyl, *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1946.

[14] George Gachman, Lawrence Narici, *Functional Analysis*, Courier Dover Publications, 2000.

[15] Armand Borel, Nolan R. Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*, AMS Bookstore, 2000.

[16] Nolan R. Wallach, *Lectures on Basic Representation Theory Given in Hong Kong*, http://www.math.ucsd.edu/ñwallach/hongkong1.pdf

[17] Anthony W. Knapp, Gregg Jay Zuckerman, *Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups*, Annals of Mathematics, **116**, 389–501, 1982.