JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **98**, 97–121 (1991)

# Opérateurs uniformément sous-elliptiques sur les groupes de Lie

L. SALOFF-COSTE*

*C.N.R.S., U.A. 213, "Analyse complexe et Géométrie," Université de Paris VI, France*

ET

D. W. STROOCK†

*Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139*

*Communicated by Paul Malliavin*

Received January 1990

Etant donnés un groupe de Lie connexe unimodulaire $G$, et des champs de vecteurs invariants à gauche sur $G$, $X_1, ..., X_k$ qui engendrent algébriquement l'algèbre de Lie de $G$, on considère l'opérateur $\mathscr{L}_a = \sum_{i,j=1}^k X_i a_{ij} X_j$ où $a: G \to \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans l'ensemble des matrices réelles symétriques vérifiant, pour un $\alpha \in ]0, 1]$: $\alpha |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \alpha^{-1} |\xi|^2$, $\forall x \in G$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^k$. Quand $G$ est à croissance du volume polynômiale on obtient, relativement à la distance du contrôle associée aux $X_i$, des estimations gaussiennes supérieures et inférieures pour le noyau du semi-groupe de la chaleur $e^{t\mathscr{L}_a}$. Ces estimations ne dépendent de $a$ qu'à travers $\alpha$. On obtient aussi des inégalités de Harnack et la régularité höldérienne des solutions. Finalement d'autres situations sous-elliptiques sont aussi considérées.


Given a connected unimodular Lie group $G$ having polynomial volume growth, and left invariant vector fields $X_1, ..., X_k$ which generate the Lie algebra of $G$, consider the operator $\mathscr{L}_a = \sum_{i,j=1}^k X_i a_{ij} X_j$, where $a: G \to \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k$ is a smooth symmetric matrix valued function which satisfies $\alpha |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \alpha^{-1} |\xi|^2$, $x \in G$, $\xi \in \mathbb{R}^k$, for some $\alpha \in ]0, 1]$. What we show is that the corresponding heat-flow semigroup $e^{t\mathscr{L}_a}$ admits a kernel which satisfies (two-sided) Gaussian estimates in terms of the control distance determined by the $X_i$'s. Moreover, the estimates can be made to depend on $a$ only through $\alpha$. We also prove Harnack inequalities and hölder regularity of solutions. We end with a discussion of some other sub-elliptic situations.


* Recherche supportée partiellement par N.S.F. Grant DMS 86 11 487.

† Recherche supportée partiellement par N.S.F. Grant DMS 86 11 487 et ARO DAAL 03.86.K.D171.



0022-1236/91 $3.00

## Introduction

Dans une série de travaux célèbres E. De Giorgi [4], J. Nash [19], J. Moser [16, 17], D. Aronson [1] ont montré que l'opérateur

$$\mathscr{L} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

où $a(x) = (a_{ij}(x))$ est une matrice symétrique vérifiant, pour un $\alpha \in ]0, 1]$, $\alpha I \leqslant a \leqslant \alpha^{-1} I$, se comporte comme le laplacien usuel $\sum_{i=1}^{n} (\partial/\partial x_i)^2$, même si les coefficients de $a$ sont peu réguliers (mesurables!). Récemment, E. Fabes et D. Stroock [5] ont donné une nouvelle approche de l'ensemble de ces travaux reposant sur les idées de Nash. Rappelons brièvement les trois principaux types de propriétés partagées par les opérateurs $\mathscr{L}$ ci-dessus.

(1) Les solutions de $(\partial/\partial t - \mathscr{L})u = 0$ (ou $\mathscr{L}u = 0$) possèdent une certaine régularité höldérienne, [19].

(2) Les solutions positives de ces équations vérifient des inégalités de Harnack, [16, 17].

(3) Le noyau de la chaleur associé à $\mathscr{L}$ (i.e., la solution fondamentale de $\partial/\partial t - \mathscr{L}$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$) vérifie des estimations gaussiennes supérieures et inférieures, [1].

Le but de ce travail est d'obtenir la généralisation naturelle de l'ensemble de ces résultats lorsqu'on remplace $\mathbb{R}^n$ par un groupe de Lie connexe unimodulaire $G$, et le laplacien $\sum_{i=1}^{n} (\partial/\partial x_i)^2$ par le sous-laplacien (ou laplacien de Kohn) $\Delta = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ où $X = \{X_1, ..., X_k\}$ est un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur $G$, vérifiant la condition de Hörmander, autrement dit engendrant algébriquement l'algèbre de Lie de $G$. L'analyse de l'opérateur $\Delta$ a été faite par N. Varopoulos dans [27, 28]. En particulier les analogues de (2) et (3) pour $\Delta$ et lorsque $G$ est à croissance polynômiale (ce qui est une restriction quasi-nécessaire, au moins pour (2)) sont contenus dans [27, 28, 22]; (1) n'a pas d'intérêt dans ce cas car $\Delta$ est hypoelliptique (!). Les opérateurs que nous allons étudier sont donc de la forme:

$$\mathscr{L}_a = \sum_{i,j=1}^{k} X_i a_{ij} X_i$$

où pour tout $x \in G$, $a(x) = (a_{ij}(x))$ est une matrice symétrique réelle de dimension $k$ vérifiant, pour un $\alpha \in ]0, 1]$, $\alpha I \leqslant a < \alpha^{-1} I$. La suite de cet article montre que l'ensemble des propriétés (1), (2) et (3) sont encore partagées par les opérateurs $\mathscr{L}_a$ dans ce contexte. Pour cela, nous nous appuierons sur les résultats fondamentaux de [27] et sur la méthode tracée dans [5] qui peut être brièvement décrite ainsi:

Ier pas: obtenir des estimations gaussiennes supérieures du noyau de la chaleur associée à $\mathscr{L}_a$.

2ème pas: en déduire des estimations inférieures du même type.

3ème pas: utiliser les deux premiers pas pour obtenir les propriétés des solutions de $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$.

Grâce aux méthodes développées dans [26, 3] et reprises dans [2] le premier pas est une conséquence assez automatique des résultats de [26]. Le deuxième pas est le point crucial de ce travail: on utilise une famille d'inégalités de Poincaré pour adapter la méthode de Nash présentée dans [5]. Le troisième pas est alors une application sans nouvelles difficultés des résultats précédents comme dans [5, 25, 22].

Finalement, il est intéressant de signaler que la méthode employée n'est pas réellement spécifique aux groupes de Lie et nous montrons au dernier paragraphe qu'on peut obtenir des résultats dans d'autres situations sous-elliptiques.

Le plan de l'article est le suivant:

—au paragraphe I nous énonçons les principaux résultats correspondants aux propriétés décrites ci-dessus;

—le paragraphe 2 contient les grandes lignes de la preuve des estimations gaussiennes supérieures;

—le paragraphe 3 est dévolu aux inégalités gaussiennes inférieures;

—le paragraphe 4 est consacré à l'obtention d'estimées gaussiennes pour les noyaux de Dirichlet et de Neumann relatifs à une boule $B(R)$ uniformément par rapport à $R$;

—le paragraphe 5 traite des applications des résultats précédents concernant les inégalités de Harnack et la régularité höldérienne;

—au paragraphe 6 nous indiquons quelques généralisations et montrons que la méthode s'applique à d'autres situations sous-elliptiques;

—en appendice nous démontrons une famille d'inégalités de Poincaré utilisée de façon essentielle au paragraphe 3.

## I. Notations et principaux résultats

Dans toute la suite $G$ désigne un groupe de Lie unimodulaire muni de sa mesure de Haar et d'un choix $X = \{X_1, ..., X_k\}$ de champs de vecteurs invariants à gauche sur $G$ qui vérifient la condition de Hörmander (c'est-à-dire, ici, qu'on peut trouver une base de l'algèbre de Lie de $G$ formée de vecteurs choisis parmi $X_1, ..., X_k$ et leurs crochets de tout ordre).

La distance du contrôle associée au système $X$ est la distance obtenue en minimisant la longueur $l(\gamma)$ des chemins absolument continus $\gamma$: $[0, 1] \to G$ joignant deux points $x$ et $y$ et tels que: $(d/dt)\gamma(t) = \sum_{i=1}^k b_i(t) X_i(\gamma(t))$, p.p. sur $[0, 1]$. La longueur $l(\gamma)$ de $\gamma$ est $l(\gamma) = (\int_0^1 \sum_{i=1}^k |b_i(t)|^2 dt)^{1/2}$. Si $x$ et $y$ sont dans $G$, nous notons $\rho(x, y)$ la distance de $x$ à $y$ et $\rho(x) = \rho(x, e)$ où $e$ est l'élément neutre de $G$, de sorte que, par invariance à gauche: $\rho(x, y) = \rho(x^{-1}y) = \rho(y^{-1}x)$. Le volume de la boule $B(x, t)$ de centre $x$ et de rayon $t$ est noté $V(t)$ (puisque par invariance à gauche il ne dépend pas de $x$).

Rappelons les faits suivants:

$$\text{il existe } d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que: } V(t) \simeq t^d \text{ pour } t \in [0, 1], \tag{I.1}$$

(voir [18, 27]. L'entier $d$ est donné par $d = \sum_{i=1}^\infty i \dim[V_i/V_{i-1}]$ où $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \text{vect}\{X_1, ..., X_k\}$, $V_i = \text{vect}\, X^i$ et $X^i$ est l'ensemble des crochets de $X_1, ..., X_k$ de longueur inférieure ou égale à $i$). D'après un théorème de Guivarc'h [8] on a d'autre part: ou bien

$$\text{il existe } D \in \mathbb{N} \text{ tel que } V(t) \simeq t^D, \text{ pour } t \in [1, +\infty[; \tag{I.2}$$

ou bien

$$V(t) \simeq e^t \qquad \text{pour} \quad t \in [1, -\infty[. \tag{I.3}$$

Dans le cas où (I.2) est vérifié on dit que $G$ est à croissance polynômiale ($D$ ne dépend que de $G$ et pas de $X$, voir [8]). Sinon on dit que $G$ est à croissance exponentielle (on a noté $f(t) \simeq g(t)$, $t \in A$, pour signifier qu'il existe $c \geqslant 1$ telle que: $c^{-1}f(c^{-1}t) \leqslant g(t) \leqslant cf(ct)$, $t \in A$).

Notons $\Delta = \sum_{i=1}^k X_i^2$, $\nabla f = (X_1 f, ..., X_k f)$, $\nabla f \cdot \nabla g = \sum_{i=1}^k X_i f X_i g$, $|\nabla f| = (\sum_{i=1}^k |X_i f|^2)^{1/2}$ et $\mathscr{D}(f, f) = (-\Delta f, f) = \| \, |\nabla f| \, \|_2^2$ la forme de Dirichlet associée à $\Delta$ (étant donnée la clarté de la situation nous ne distinguons pas l'opérateur différentiel $\Delta$ de la fermeture obtenue en complétant $\mathscr{C}_0^\infty(G)$ pour la norme $\|f\|_2 + \mathscr{D}^{1/2}(f, f)$). $H_t = e^{t\Delta}$, $t \geqslant 0$ est le semi-groupe markovien symétrique associé à $\mathscr{D}$ (on montre facilement d'une façon ou d'une autre que $H_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$). D'après l'hypoellipticité de $\Delta$ et l'invariance à gauche, $H_t$ admet un noyau

$$(t, x) \mapsto h_t(x) = h_t(x^{-1}) \in \mathscr{C}^\infty(]0, +\infty[ \times G)$$

tel que

$$H_t f(x) = \int_G h_t(y^{-1}x) f(y)\, dy, \qquad f \in \mathscr{C}_0^\infty(G).$$

Les deux résultats suivants que nous empruntons à [27] (voir aussi [21]) contiennent l'essentiel de l'information concernant $\Delta$ et $(H_t, t \geqslant 0)$ et sont l'une des clefs de toute la suite.

Si $G$ est à croissance polynômiale, nous avons:

$$\exists c \text{ telle que: } h_t(x) \leqslant c V(\sqrt{t})^{-1},\ t > 0,\ x \in G; \tag{I.4}$$

tandis que si $G$ est à croissance exponentielle:

$$\forall n \geqslant d,\ \exists c_n \text{ telle que: } h_t(x) \leqslant c_n t^{-n/2},\ t > 0,\ x \in G. \tag{I.5}$$

Soit $a: x \mapsto a(x)$ une application de $G$ dans l'ensemble des matrices réelles symétriques positives d'ordre $k$. Associons à $a$ l'opérateur différentiel:

$$\mathscr{L}_a = \sum_{i,j=1}^{n} X_i a_{ij} X_j = \nabla \cdot a \nabla$$

et la forme de Dirichlet:

$$\mathscr{E}_a(f, f) = (-\nabla \cdot a \nabla f, f) = \| \, |\nabla f|_a \|_2^2, \qquad f \in \mathscr{C}_0^\infty(G);$$

où pour une fonction $u: G \to \mathbb{R}^k$, nous notons pour chaque $x \in G$, $|u(x)|_{a(x)} = (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, u_i(x)\, u_j(x))^{1/2}$. Nous faisons l'hypothèse qualitative que les coefficients de $a$ sont réguliers, mais aucune des estimations faites dans la suite ne dépendra de façon quantitative de la régularité de $a$. Avec cette hypothèse, nous pouvons sans difficulté considérer le semi-groupe sous-markovien symétrique

$$P_t^a = e^{t \mathscr{L}_a}, \qquad t \geqslant 0.$$

Nous supposerons que $P_t^a$ admet un noyau

$$(t, x, y) \mapsto p_t^a(x, y)$$

tel que

$$P_t^a f(x) = \int p_t^a(x, y) f(y)\, dy, \qquad x \in G, t > 0, f \in \mathscr{C}_0^\infty(G).$$

Remarquons que si $a \geqslant \alpha I$ pour un $\alpha > 0$, alors $\mathscr{L}_a$ est hypoelliptique et le noyau est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de $(t, x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times G \times G$.

Pour $\alpha \in ]0, 1]$, notons $E(\alpha)$ l'ensemble des matrices $a$ qui vérifient: $\alpha I \leqslant a \leqslant \alpha^{-1} I$. Les principaux résultats obtenus dans la suite sont:

THÉORÈME 1. *Etant donnés* $\alpha \in ]0, 1]$ *et* $G$ *à croissance polynômiale, il existe une constante* $\gamma \geqslant 1$ *telle que pour toute* $a \in E(\alpha)$, $(x, y) \in G \times G$, $t > 0$, *on ait*:

$$[\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \exp(-\gamma\rho^2(x, y)/t) \leqslant p_t^a(x, y) \leqslant \gamma V(\sqrt{t})^{-1} \exp(-\rho^2(x, y)/\gamma t).$$

THÉORÈME 2. *Soient* $G$ *à croissance polynômiale*, $\alpha \in ]0, 1]$, $0 < \varepsilon < \eta < 1$, $0 < \gamma < 1$, *il existe une constante* $c$ *telle que pour tout* $a \in E(\alpha)$, $s \in \mathbb{R}$, $x \in G$, $R > 0$ *et toute solution positive* $u \in \mathscr{C}^{1,2}(]s - R^2, s[ \times B(x, R))$ *de* $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ *dans* $]s - R^2, s[ \times B(x, R)$ *on ait*:

$$u(t, y) \leqslant cu(s, x), \qquad (t, y) \in [s - \eta R^2, s - \varepsilon R^2] \times \bar{B}(x, \gamma R).$$

THÉORÈME 3. *Etant donnés* $\alpha \in ]0, 1]$, $0 < \gamma < 1$, $G$ *à croissance polynômiale, il existe* $c > 0$, $\beta \in ]0, 1]$ *tels que pour tout* $a \in E(\alpha)$, $s \in \mathbb{R}$, $x \in G$, $R > 0$ *et toute solution* $u \in \mathscr{C}^{1,2}([s - R^2, s] \times \bar{B}(x, R))$ *de* $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ *dans* $]s - R^2, s[ \times B(x, R)$ *on ait*:

$$|u(t', y') - u(t, y)| \leqslant c \left(\frac{|t' - t|^{1/2} \vee \rho(y, y')}{R}\right)^{\beta} \|u\|_\infty$$

*pour* $(t, y)$ *et* $(t', y')$ *dans* $[s - \gamma R^2, s] \times B(x, \gamma R)$.

Appliquant ce résultat au noyau, on obtient:

COROLLAIRE 1. *Soient* $G$ *à croissance polynômiale*, $\alpha \in ]0, 1]$. *Il existe* $c > 0$, $\beta \in ]0, 1]$ *tels que pour tout* $a \in E(\alpha)$, $R > 0$:

$$|p_{t'}^a(x', y') - p_t^a(x, y)| \leqslant cV(R)^{-1} \left(\frac{|t' - t|^{1/2} \vee \rho(x', x) \vee \rho(y', y)}{R}\right)^{\beta}$$

*pour tout* $(t', x', y')$ *et* $(t, x, y)$ *dans* $]R^2, +\infty[ \times G \times G$, *avec* $\rho(x', x) \vee \rho(y', y) \leqslant R$.

On déduit par ailleurs des théorèmes 2 et 3:

COROLLAIRE 2. *Etant donnés*, $\alpha > 0$, $a \in E(\alpha)$, $G$ *à croissance polynômiale*:

(i) *toute solution positive de* $\mathscr{L}_a u = 0$ *dans* $G$ *est constante*;

(ii) *toute solution bornée de* $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ *dans* $\mathbb{R} \times G$ *est constante.*

## II. ESTIMATIONS SUPÉRIEURES POUR $p_t^a$

L'obtention des estimations supérieures de $p_t^a$ relevant de techniques à présent bien rodées, nous serons brefs. La partie du théorème 1 à laquelle nous nous intéressons dans ce paragraphe est contenue dans la:

PROPOSITION 1. *Soient* $\alpha \in ]0, 1]$ *et* $a \geqslant \alpha I$.

(i) *si G est à croissance polynômiale*:

$$p_t^a(x, y) \leqslant c(\alpha)\, V(\sqrt{\delta t})^{-1} \exp(-\rho_a^2(x, y)/4(1+\delta)t)$$
$$\delta > 0,\ t > 0,\ (x, y) \in G \times G;$$

(ii) *si G est à croissance exponentielle, on a pour tout* $n \geqslant d$:

$$p_t^a(x, y) \leqslant c(\alpha, n)(\delta t)^{-n/2} \exp(-\rho_a^2(x, y)/4(1+\delta)t)$$
$$\delta > 0,\ t > 0,\ (x, y) \in G \times G.$$

Ici nous avons introduit la distance $\rho_a$ associée à $a$ et $X$ de la façon suivante: $\rho_a(x, y)$ est encore la longueur minimale d'un chemin absolument continue $\gamma$: $[0, 1] \to G$ tel que $(d/dt)\,\gamma(t) = \sum_{i=1}^k b_i(t)\, X_i(\gamma(t))$ p.p. $[0, 1]$, mais cette fois la longueur $l_\alpha(\gamma)$ de $\gamma$ est définie par: $l_\alpha(\gamma) = (\int^1 b \cdot a^{-1} b\, dt)^{1/2}$, où $b = (b_1, ..., b_k)$ et $u \cdot v$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^k$. Il est clair que si $a \in E(\alpha)$, il existe $c(\alpha) > 0$ telle que:

$$c^{-1}(\alpha)\, \rho(x, y) \leqslant \rho_a(x, y) \leqslant c(\alpha)\, \rho(x, y), \qquad (x, y) \in G \times G.$$

D'après une idée de E. D. Davies [3] (voir aussi la présentation donnée dans [2]; la même idée est utilisée dans [27, 5]) les résultats (i) et (ii) de la proposition 1 sont des corollaires des estimations centrales (ou uniformes, si on préfère) correspondantes:

$$p_t^a(x, y) \leqslant c(\alpha)\, V(\sqrt{t})^{-1}, \qquad t > 0 \tag{II.1}$$

dans le cas (i) et

$$p_t^a(x, y) \leqslant c(\alpha, n)\, t^{-n/2}, \qquad t > 0, n \geqslant d \tag{II.2}$$

dans le cas (ii) et de l'inégalité élémentaire:

$$q\mathscr{E}_a(e^{\psi} f^{2q-1}, e^{-\psi} f) + q^2 \Gamma^2(\psi)\, \|f\|_{2q}^{2q} \geqslant \mathscr{E}_a(f^q, f^q) \tag{II.3}$$

où $q \in [1, +\infty[$, $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty(G)$ et $\Gamma^2(\psi) = \|\nabla\psi \cdot a \nabla\psi\|_\infty$, qui permet l'étude du semi-groupe perturbé: $e^{-\psi} P_t^a e^{\psi}$.

D'autre part, il est facile d'utiliser la théorie abstraite développée initialement dans [26] pour passer de (I.4), (I.5) à (II.1), (II.2) respectivement en utilisant la reformulation suivante de notre hypothèse "$a \geqslant \alpha I$":

$$\mathscr{D}(f, f) \leqslant \alpha^{-1} \mathscr{E}_a(f, f), \qquad \forall f \in \mathscr{C}_0^\infty(G). \tag{II.4}$$

Par exemple, sachant (I.5) on déduit les inégalités de Sobolev:

$$\|f\|_{2n/(n-2)}^2 \leqslant c'_n \mathscr{D}(f, f), \qquad n \geqslant d; \tag{II.5}$$

(voir le théorème 1, p. 241 de [26] qui dit que (I.5) est équivalent à (II.5)). Utilisant (II.4) on obtient:

$$\|f\|^2_{2n/(n-2)} \leqslant c'_n \alpha^{-1} \mathscr{E}_a(f, f), \qquad \forall f \in \mathscr{C}_0^\infty(G) \tag{II.6}$$

qui par le même théorème de [26] que précédemment nous donne (II.2). On déduit (II.1) de (I.4) de la même façon. Il est plus agréable dans ce cas d'utiliser la version développée dans [2] qui utilise des inégalités de Nash plutôt que celles de Sobolev (Théorèmes (2.1), p. 251 et (2.9), p. 255 de [2]).

*Remarque.* Les estimations (II.1) ou (II.2) pour $t \geqslant 1$ peuvent être obtenues beaucoup plus généralement. Supposons que $G$ vérifie $V(t) \geqslant ct^n$, pour $t \geqslant 1$ et un $n$ fixé et que $p_t(x, y)$ est le noyau d'un semi-groupe sous-markovien symétrique sur $\mathbb{L}^2(G)$ qui vérifie

$$p_1(x, y) \geqslant \varepsilon > 0, \qquad \forall x \in G, \forall y \in B(x, 1), \tag{II.7}$$

alors on a:

$$p_t(x, y) \leqslant ct^{-n/2}, \qquad t \geqslant 1. \tag{II.8}$$

Pour le voir introduisons la fonction caractéristique $\chi$ de la boule de rayon 1/2 normalisée de sorte que $\|\chi\|_1 = 1$. D'après [27, 21], on a en posant $\chi^{(k)} = \chi * \cdots * \chi$ (produit de convolution):

$$\|\chi^{(k)}\|_\infty \leqslant ck^{-n/2}, \qquad k \in \mathbb{N}^*. \tag{II.9}$$

D'autre part notre hypothèse (II.7) implique:

$$\begin{aligned} &\int_{G \times G} |f(x) - f(y)|^2 \chi^{(2)}(x^{-1}y)\, dx\, dy \\ &\qquad \leqslant c(\varepsilon) \int_{G \times G} |f(x) - f(y)|^2 p_1(x, y)\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{II.10}$$

L'inégalité (II.10) est une inégalité entre formes de Dirichlet et on déduit, là encore, (II.8) de (II.9) et (II.10) en utilisant le théorème (4.1), p. 274 de [2] (il s'agit d'adaptation des techniques de [26], voir aussi [21]).

## III. Estimations inférieures

Ce paragraphe est dévolu à la preuve de:

$$[\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \exp(-\gamma \rho^2(x, y)/t) \leqslant p_t^a(x, y) \tag{III.1}$$

dans le cas où $G$ est à croissance polynômiale et $a \in E(\alpha)$, ce que nous supposerons dans toute la suite. Remarquons tout d'abord que sous ces hypothèses les estimations supérieures de la proposition 1 impliquent

$$\int_{B^c(x,r)} p_t^a(x, y)\, dy \leqslant c \exp(-r^2/ct) \tag{III.2}$$

où $c$ ne dépend que de $G$ et $\alpha$. De (III.2) nous tirons deux conclusions:

$$\int p_t^a(x, y)\, dy = 1 \tag{III.3}$$

autrement dit $(P_t^a, t \geqslant 0)$ est markovien, puis

$$[\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \leqslant \sup_x \{p_t^a(x, x)\}, \qquad t > 0. \tag{III.4}$$

Nous donnerons une preuve que (III.2) implique (III.3) au début du paragraphe IV (par un argument de non explosion classique). L'inégalité (III.4) est une conséquence facile de (III.2) et (III.3), malheureusement elle ne semble pas suffire en général pour obtenir (III.1). En revanche (III.1) est un corollaire du

LEMME 1. *Etant donné* $\alpha \in ]0, 1]$ *il existe* $\gamma \geqslant 1$ *et* $\theta \in ]0, 1]$ *tels que pour tout* $a \in E(\alpha)$:

$$[\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \leqslant p_t^a(x, y), \qquad \forall (x, y) \in G \times G,\ t > 0,\ \rho^2(x, y) \leqslant \theta t.$$

Avant d'en venir au lemme 1, montrons que (III.1) en résulte. Si $(x, y) \in G \times G$, $t > 0$ sont tels que $\rho^2(x, y) \leqslant \theta t$ le résultat du lemme 1 et (III.1) coïncident. Supposons donc $\rho^2(x, y) > \theta t$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons trouver une suite de points $x_0 = x$, $x_1, ..., x_n = y$ telle que $\rho(x_i, x_{i+1}) \leqslant 2R/n$ où nous avons posé $R = \rho(x, y)$. Alors pour $y_i \in B(x_i, R/n) = B_i$, $\rho(y_i, y_{i+1}) \leqslant 4R/n$. Si nous choisissons $n$ tel que $16R^2/n^2 \leqslant \theta t/n$, en particulier si $n \in [16R^2/\theta t, (16R^2/\theta t) + 1[$ nous avons: $\rho^2(y_i, y_{i+1}) \leqslant 16R^2/n^2 \leqslant \theta t/n$ et donc grâce au lemme 1:

$$\inf\{p_{t/n}^a(y_i, y_{i+1}),\ y_i \in B_i,\ i \in \{1, ..., n-1\}\} \geqslant [\gamma V(4R/n)]^{-1}$$

et

$$\begin{aligned} p_t^a(x, y) &= \int_{G^{(n-1)}} p_{t/n}^a(x, y_1)\, p_{t/n}^a(y_1, y_2) \cdots p_{t/n}^a(y_{i-1}, y)\, dy_1 \cdots dy_n \\ &\geqslant [\gamma V(4R/n)]^{-n}\, V(4R/n)^{n-1} \geqslant \gamma^{-n} V(4R/n)^{-1} \\ &\geqslant [\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \exp(-\gamma R^2/t) \end{aligned}$$

où $\gamma$ peut changer de place en place et où la dernière inégalité est une conséquence de $n \simeq R^2/t$ et des propriétés polynômiales de $V$.

Venons-en à la preuve du lemme 1. Par invariance des hypothèses par translation nous supposerons que $x = e$ et nous cherchons donc à estimer inférieurement $p_t^a(e, y)$ lorsque $\rho^2(y) \leqslant \theta t$ (où $\theta$ est un certain nombre à fixer). La technique ci-dessous trouve sa source dans [19] et a déjà été reprise dans [5]. La principale difficulté de son adaptation est d'obtenir une famille d'inégalités de Poincaré adéquate. Nous utiliserons les inégalités de Poincaré ci-dessous qui sont démontrées en appendice.

$$\int |f(x) - f_R|^2 \, \Phi_R(x) \, dx \leqslant CR^2 \int |\nabla f(x)|^2 \, \Phi_R(x) \, dx \tag{P}$$

où $\Phi_R(x) = (1 - \rho(x)/R)^2$ si $x \in B(R)$ et $\Phi_R(x) = 0$ si non et

$$f_R = \int f(x) \, \Phi_R(x) \, dx \Big/ \int \Phi_R(x) \, dx.$$

Nous commençons par énoncer le lemme clef:

LEMME 2. *Il existe $\lambda > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $R > 0$ et tout $z$ tels que $\rho(z) \leqslant R$, on ait*

$$\int \Phi_{\lambda R}(x) \log[V(R) \, p_{R^2}^a(z, x)] \, dx \geqslant -c \int \Phi_{\lambda R}(x) \, dx.$$

Montrons comment le lemme 2 implique le lemme 1: posons pour un instant $w_t(x, y) = V(\sqrt{t}) \, p_t^a(x, y)$. Nous avons

$$\begin{aligned} V(R) \, p_{2R^2}^a(e, z) &= V(R)^{-1} \int w_{R^2}(e, y) \, w_{R^2}(z, y) \, dy \\ &\geqslant V(R)^{-1} \int w_{R^2}(e, y) \, w_{R^2}(z, y) \, \Phi_{\lambda R}(y) \, dy \end{aligned}$$

d'où l'on déduit en posant $\mu(R) = \int \Phi_R(y) \, dy$:

$$\begin{aligned} \log(V(R) \, p_{2R^2}^a(e, z)) &\geqslant \log(\mu(\lambda R) \, V(R)^{-1}) \\ &\quad + \mu(\lambda R)^{-1} \int \log(w_{R^2}(e, y) \, w_{R^2}(z, y)) \, \Phi_{\lambda R}(y) \, dy \end{aligned}$$

et donc grâce au lemme 2 et en remarquant que $\mu(\lambda R) \simeq V(R)$

$$\log[V(R) \, p_{2R^2}^a(e, z)] \geqslant -c$$

où $c$ est une constante ne dépendant que de $G$ et $\alpha$, ce qui prouve le lemme 1 avec $\theta = 1/2$.

Pour prouver le lemme 2 nous posons:

$$u(s, y) = V(R)\, p^a_{sR^2}(z, y)$$

pour $z$ fixé tel que $\rho(z) \leqslant R$ et $s \in ]0, 1]$, ainsi que:

$$v(s, y) = \log u(s, y)$$

$$G(s) = \mu^{-1}(\lambda R) \int \Phi_{\lambda R}(y)\, v(s, y)\, dy.$$

Avec ces notations la conclusion du lemme 2 s'écrit

$$G(1) \geqslant -c. \tag{III.5}$$

Pour prouver (III.5), notons $\Psi_R(x) = 1 - \rho(x)/R$, de sorte que $\Phi_R = \Psi_R^2$. La fonction $\Psi_R$ n'est pas différentiable mais c'est une fonction continue à support compact et telle que:

$$|\Psi_R(y) - \Psi_R(x)| \leqslant R^{-1}\rho(x, y), \qquad \forall (x, y) \in G \times G. \tag{III.6}$$

Grâce à ces propriétés il est aisé par un argument de régularisation et un passage à la limite de rendre correcte l'intégration par parties utilisée formellement dans le calcul suivant:

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda R)\, G'(s) &= R^2 \int \Phi_{\lambda R}(y) \frac{\nabla \cdot a \nabla u(s, y)}{u(s, y)}\, dy \\
&= R^2 \left[ -2 \int (\nabla \Psi_{\lambda R}(y) \cdot a \nabla v(s, y))\, \Psi_{\lambda R}(y)\, dy \right. \\
&\qquad \left. + \int \Phi_{\lambda R}(y)\, |\nabla v(s, y)|_a^2\, dy \right] \\
&\geqslant R^2 \left[ -4 \int |\nabla \Psi_R(y)|_a^2\, dy + \frac{3}{4} \int \Phi_{\lambda R}(y)\, |\nabla v(s, y)|_a^2\, dy \right] \\
&\geqslant -c_1 V(\lambda R) + c_2 \int \Phi_{\lambda R}(y)\, |v(s, y) - G(s)|^2\, dy,
\end{aligned}$$

où, pour obtenir la dernière inégalité on a utilisé l'hypothèse $a \in E(\alpha)$, l'inégalité de Poincaré (P) et (III.6).

Choisissons $\lambda$ tel que

$$\int_{\{\rho(y) \leqslant \lambda R/2\}} u(s, y)\, dy \geqslant V(R)/2, \qquad s \in [1/2, 1]. \tag{III.7}$$

Un tel choix est rendu possible uniformément par rapport à $R>0$ grâce à (III.2) et (III.3).

Des calculs ci-dessus on déduit:

$$G'(s) \geqslant -c_1 + c_2 \mu(\lambda R)^{-1} \int \Phi_R(y)\, |v(s, y) - G(s)|^2\, dy.$$

De là, on obtient en notant, pour $K>0$,

$$\Gamma_K = \{ y \in B(\lambda R/2),\, u(s, y) \geqslant e^{-K} \}:$$

$$G'(s) \geqslant -c_1 + c_2(|G(s)| - K)^2\, \mu(\lambda R)^{-1}\, |\Gamma_K|. \tag{III.8}$$

D'autre part nous pouvons estimer $|\Gamma_K|$ grâce à:

$$V(R)/2 \leqslant \int_{\{\rho(y) \leqslant \lambda R/2\}} u(s, y)\, dy \leqslant V(\lambda R/2)\, e^{-K} + M\, |\Gamma_K| \tag{III.9}$$

où $M$ est un majorant de $u(s, y)$ sur $B(\lambda R/2)$ qui peut être choisi ne dépendant que de $\alpha$ grâce aux estimations supérieures du paragraphe II. De (III.8) et (III.9) on déduit (en utilisant $\mu(\lambda R) \simeq V(R)$) qu'il existe $c_1'$ et $c_2'$ telles que

$$G'(s) \geqslant -c_1' + c_2' G(s)^2, \qquad s \in [1/2, 1].$$

Maintenant si $G(1) \leqslant -c_1' - 2(c_1'/c_2')^{1/2}$ alors $G'(s) \geqslant (3/4)\, c_2' G(s)^2$ pour $s \in [1/2, 1]$, ce qui implique $G(1) \geqslant -8/(3c_2')$ et fournit finalement l'inégalité (III.5) avec

$$c = \sup\{ c_1' + 2(c_1'/c_2')^{1/2}, 8/(3c_2') \}.$$

Ayant prouvé (III.5) nous avons obtenu le lemme 2 donc le lemme 1 et (III.1) ce qui termine la preuve du théorème 1.

## IV. Localisation des estimations gaussiennes

Le but de ce paragraphe est d'obtenir des inégalités similaires à celles du théorème 1 pour le noyau d'une diffusion quelconque contrôlée par l'opérateur $\mathscr{L}_a$ à l'intérieur de la boule $B = B(\xi, R)$, $\xi \in G$, $R>0$, et en premier lieu pour le noyau de la diffusion correspondant à $\mathscr{L}_a$ et à la condition de Dirichlet au bord de $B$. Nous utilisons pour cela une méthode probabiliste, comme dans [14, 25], qui fait de ces résultats des corollaires du théorème 1.

La matrice $a$ étant fixée dans $E(\alpha)$, notons $P_t = P_t^a$, $t \geqslant 0$. Considérons (si $G$ n'est pas compact) le compactifié usuel $\hat{G} = G \cup \{\infty\}$ de $G$ et $\hat{\Omega} =$

$\mathscr{C}([0, +\infty[; \hat{G})$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et de la tribu borélienne associée. D'après [13] nous pouvons associer à $P_t$ une famille de probabilités sur $\hat{\Omega}\{P_x; x \in G\}$ vérifiant:

$$\begin{cases} P_x(x_0 = x) = 1, & x \in G \\ P_x(x_{s+t} \in \Gamma) = [P_t \mathbb{1}_\Gamma](x_s), & P_x \cdot \text{p.p.}, x \in G \end{cases} \tag{IV.1}$$

(pour $\omega \in \hat{\Omega}$, $x_t(\omega) = x(t, \omega)$ est la position de $\omega$ à l'instant $t$ et on note $E^x$ l'espérance par rapport à $P_x$). Comme nous l'avons indiqué au début du paragraphe II, notre premier travail est de prouver que $P_t$ est markovien, ou, ce qui revient au même de montrer que $P_x$ ne charge que $\Omega = \mathscr{C}([0, +\infty[; G)$, c'est pourquoi nous avons introduit $\hat{G}$ et $\hat{\Omega}$. Posons $\zeta = \inf\{t, x_t = \infty\}$. Nous voulons montrer que $P_x(\zeta = +\infty) = 1$, $x \in G$. Ce résultat est une conséquence facile du:

LEMME 3. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t > 0$, $r > 0$ et tout $x \in G$, $P_x(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \rho(x_t, x) \geqslant r) \leqslant ce^{-r^2/ct}$.*

Pour prouver le lemme 3 notons:

$$\tau = \inf\{t: \rho(x_t, x) \geqslant r\}$$

de sorte que:

$$P_x(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \rho(x_t, x) \geqslant r) = P_x(\tau \leqslant t).$$

Ecrivons:

$$\begin{aligned} P_x(x_t \notin B(x, r/2)) &\geqslant P_x(x_t \notin B(x, r/2), \tau \leqslant t) \\ &= P_x(\tau \leqslant t) - P_x(x_t \in \bar{B}(x, r/2), \tau \leqslant t) \\ &= P_x(\tau \leqslant t) - E^x(P_{x_\tau}(x_{t-\tau} \in \bar{B}(x, r/2)) \mathbb{1}_{\{\tau \leqslant t\}}) \\ &\geqslant P_x(\tau \leqslant t) - E^x(P_{x_\tau}(x_{t-\tau} \notin B(x_\tau, r/2) \mathbb{1}_{\{\tau \leqslant t\}}) \end{aligned}$$

ce qui, avec (III.2), nous donne:

$$P_x(\tau \leqslant t)(1 - ce^{-r^2/ct}) \leqslant ce^{-r^2/ct},$$

et donc la conclusion du lemme 3.

Fixons $a \in E(\alpha)$, $\xi \in G$, $R > 0$ et notons $q_t(x, y) = q_t^{a, \xi, R}(x, y)$ la solution fondamentale de $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ avec condition de Dirichlet au bord de $B = B(\xi, R)$. Autrement dit si on pose $u(s, x) = q_t(x, y)$, $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in B$, alors $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$, $u = 0$ sur $[0, +\infty[ \times \partial B$ et $u(0, x)$ est la masse de Dirac au point $y$. La proposition suivante est la clef du passage du théorème 1 aux théorèmes 2 et 3.

PROPOSITION 2. *Soient $G$ à croissance polynômiale, $\alpha \in ]0, 1]$, $\delta \in ]0, 1[$. Il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $a \in E(\alpha)$, tout $\xi \in G$, tout $R > 0$ on ait*:

(i) $q_t^{a,\xi,R}(x, y) \leqslant \gamma V(\sqrt{t})^{-1} \exp(-\rho^2(x, y)/\gamma t)$, $x \in B(\xi, R)$, $y \in B(\xi, R)$, $t > 0$;

(ii) $[\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \exp(-\gamma\rho^2(x, y)/t) \leqslant q_t^{a,\xi,R}(x, y)$, $x \in B(\xi, \delta R)$, $y \in B(\xi, \delta R)$, $t \leqslant R^2$.

La proposition 2 est une conséquence du théorème 1 et du fait que posant

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0, \rho(x_t, \xi) \geqslant R\}$$

où $\xi$, $R$ sont fixés comme précédemment, nous avons grâce à la propriété de Markov forte:

$$q_t^{a,\xi,R}(x, \cdot) = p_t^a(x, \cdot) - E^x[p_{t-\tau}^a(x_\tau, \cdot)\, \mathbb{1}_{\{\tau \leqslant t\}}] \tag{IV.2}$$

(voir [25] par exemple pour plus de détails). De cette égalité nous déduisons d'une part:

$$q_t(x, y) \leqslant p_t(x, y)$$

ce qui donne la conclusion (i) de la proposition 2, mais aussi:

$$\begin{aligned} q_t(x, y) \geqslant {} & [\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \exp(-\gamma\rho^2(x, y)/t) \\ & - \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \gamma V(\sqrt{s})^{-1} \exp(-(1-\delta)^2 R^2/\gamma s) \end{aligned}$$

pour $x \in B(\xi, \delta R)$, $y \in B(\xi, \delta R)$, $\delta \in [0, 1]$. Il existe donc $r \in ]0, 1-\delta[$ tel que

$$q_t(x, y) \geqslant [\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \exp(-\gamma\rho^2(x, y)/t) \tag{IV.3}$$

pour $x \in B(\xi, \delta R)$, $y \in B(\xi, \delta R)$, $t \leqslant r^2$, $\rho(x, y) \leqslant r$. En utilisant un argument similaire à celui utilisé pour passer du lemme 1 à (III.1) au paragraphe III, on obtient facilement la conclusion (ii) de la proposition 2 à partir de (IV.3) (des détails sont donnés dans [25, 5, 22] dans des situations analogues).

La proposition 2 se généralise facilement comme suit: considérons une diffusion quelconque associée à un opérateur $\mathscr{L}'$ tel que $\mathscr{L}'\varphi = \mathscr{L}_a\varphi$ si $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(B(\xi, R))$ et notons $P'(t, x, \cdot)$ la probabilité de transition associée. Il est clair que $P'(t, x, dy) = p'_t(x, y)\, dy$ sur $]0, +\infty[ \times B(\xi, R) \times B(\xi, R)$. Nous avons en fait:

PROPOSITION 3. *Soient $G$ à croissance polynômiale, $\alpha \in ]0, 1]$, $\delta \in ]0, 1[$. Il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $a \in E(\alpha)$ tout $\xi \in G$, tout $R > 0$ et $\mathscr{L}'$ comme ci-dessus on ait:*

$$[\gamma V(\sqrt{t})]^{-1} \exp(-\gamma\rho^2(x, y)/t) \leqslant p'_t(x, y) \leqslant \gamma V(\sqrt{t})^{-1} \exp(-\rho^2(x, y)/\gamma t)$$

*pour $t \in ]0, R^2]$, $x \in B(\xi, \delta R)$, $y \in B(\xi, \delta R)$.*

La preuve de la proposition 2 suit la technique de localisation utilisée dans [14] et utilise le résultat du lemme 3 de façon essentielle comme indiqué dans [25], les détails sont laissés au lecteur.

## V. INÉGALITÉS DE HARNACK, RÉGULARITÉ HÖLDÉRIENNE

Nous indiquons ci-dessous comment la proposition 2 a pour corollaire les théorèmes 2 et 3. Cette démarche repose sur des idées introduites par Krylov (voir [23] et est utilisée dans [5, 22]) comme nous l'avons déjà indiqué. Tout cela repose sur l'observation classique que pour toute solution positive $u$ de $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ dans $]t_0, t_1[ \times B(\xi, R)$ et en notant toujours $q_t(x, y)$ le noyau associé au problème de Dirichlet dans $B(\xi, R)$, on a:

$$u(t, x) \geqslant \int_{B(\xi, R)} u(s, y)\, q_{t-s}(x, y)\, dy \tag{V.1}$$

pour $x \in B(x, R)$, $s \in ]t_0, t_1[$, $t \in ]t_0, t_1[$, $t > s$. Notons $Q(s, \xi, R) = ]s - R^2, s[ \times B(\xi, R)$ et $\mathscr{C}^{1,2}(\bar{Q})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\bar{Q}$ qui admettent une dérivée par rapport à $t$ et deux dérivées par rapport à $x$ dans $Q$ (par deux dérivées par rapport à $x$, on entend que $X_i u$ et $X_i X_j u$ existent pour $i \in \{1, ..., k\}$, $j \in \{1, ..., k\}$). $\mathscr{C}^{1,2}_+(\bar{Q})$ est l'ensemble des fonctions positives de $\mathscr{C}^{1,2}(\bar{Q})$. De l'estimation inférieure de $q_t(x, y)$ fournie par la proposition 2 et de (V.1) nous déduisons:

LEMME 4. *Soient $\alpha \in ]0, 1]$, $\gamma \in ]0, 1[$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in G$, $a \in E(\alpha)$, $R > 0$ et $u \in \mathscr{C}^{1,2}_+(\bar{Q}(s, \xi, R))$ solution de $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ dans $Q(s, \xi, R)$, on ait:*

$$u(t, y) \geqslant \varepsilon V(\gamma R)^{-1} \int_{B(\xi, \gamma R)} u(s - R^2, z)\, dz, \qquad (t, y) \in \bar{Q}(s, \xi, \gamma R).$$

Etant donnés $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in G$, $R > 0$ et une fonction $u$ sur $\bar{Q}(s, \xi, R)$ notons

$$\mathrm{Osc}(u, s, \xi, R) = \max\{u(t', x') - u(t, x);\ (t', x') \text{ et } (t, x) \in \bar{Q}(s, \xi, R)\}$$

$$\|u\|_\infty = \max\{|u(t, x)|, (t, x) \in \bar{Q}(s, \xi, R)\}.$$

Du lemme 4 et de (V.1) nous déduisons comme dans [5] (par exemple) le

LEMME 5. *Etant donnés* $\alpha \in ]0, 1]$, $\delta \in ]0, 1[$, *il existe* $\theta \in ]0, 1[$ *tel que pour tout* $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in G$, $a \in E(\alpha)$, $u \in \mathscr{C}^{1,2}(\bar{Q}(s, \xi, R))$ *solution de* $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ *dans* $Q(s, \xi, R)$ *on ait*

$$\mathrm{Osc}(u, s, \xi, \delta R) \leqslant \theta\, \mathrm{Osc}(u, s, \xi, R).$$

Les théorèmes 2 et 3 sont des conséquences de (IV.1) et du lemme 5 grâce à des calculs issus de [19, 17] et nous renvoyons le lecteur à [5, 25, 22], où les détails sont donnés une fois encore dans des situations analogues.

Pour terminer ce paragraphe voici quelques directions dans lesquelles les résultats ci-dessus peuvent être généralisés en restant dans le cadre des groupes de Lie à croissance polynômiale. Tout d'abord il n'y a pas de difficulté à considérer le cas où les matrices $a$ dépendent aussi du temps. C'est ce qui est fait pour $G = \mathbb{R}^n$ dans [5] et nous y renvoyons le lecteur intéressé: moyennant quelques changements de notations l'ensemble des résultats subsiste. Notons aussi que la symétrie de $a$ n'est pas essentielle.

En ce qui concerne l'étude du cas où les coefficients de $a$ sont seulement supposés mesurables nous renvoyons le lecteur à [25] où des détails sont donnés (encore dans le cas $G = \mathbb{R}^n$). Remarquons simplement que la théorie des formes de Dirichlet permet de toute façon de considérer le semi-groupe $P_t^a$ associé à $\mathscr{E}_a(f, f) = \int \nabla f \cdot a \nabla f$, même dans ce cas. Les résultats précédents, qui ne dépendent pas de façon quantitative de la régularité de $a$, peuvent être utilisés pour montrer que $P_t^a$ admet encore un noyau qui possède une régularité holdérienne et vérifie le théorème 1.

De façon moins automatique il est possible de considérer, comme dans [25], des perturbations des opérateurs $\mathscr{L}_a$ par des termes du premier ordre et plus précisément d'étudier les opérateurs de la forme:

$$[\mathscr{L}\varphi](x) = [\nabla \cdot a \nabla\varphi](x) + [b \cdot a \nabla\varphi](x) - [\nabla \cdot \varphi a\hat{b}](x) + [c\varphi](x)$$

où $a$ est comme précédemment, $b$ et $\hat{b}$ sont des fonctions de $G$ dans $\mathbb{R}^k$ et $c$ une fonction de $G$ dans $\mathbb{R}$. Toutes ces fonctions sont supposées $\mathscr{C}^\infty$ mais on utilise quantitativement les seules hypothèses $a \in E(\alpha)$ et $\|c\|_\infty + \|b \cdot ab\|_\infty + \|\hat{b} \cdot a\hat{b}\|_\infty \leqslant \beta$. (Evidemment $\mathscr{L}$ n'est plus auto-adjoint mais son adjoint formel est obtenu en changeant $b$ en $\hat{b}$).

## VI. AUTRES SITUATIONS SOUS-ELLIPTIQUES

Soit $M$ une variété $\mathscr{C}^\infty$, connexe, munie d'une mesure $m$ positive $\mathscr{C}^\infty$, et soit $X = \{X_1, \ldots, X_k\}$ un système de champs de vecteurs sur $M$ (pas nécessairement $\mathscr{C}^\infty$, disons lipschitziens). Associons à $X$ la distance du contrôle $\rho = \rho_X$ comme précédemment et faisons l'hypothèse que:

$$\begin{cases} \rho_X(x, y) < +\infty, \forall (x, y) \in M \times M \\ (x, y) \to \rho_X(x, y) \text{ est continue et } \{y, \rho_X(x_0, y) \leqslant r\} \\ \text{est compact pour tout } x_0 \in M \text{ et tout } r > 0. \end{cases} \tag{VI.1}$$

Considérons la forme de Dirichlet

$$\mathscr{D}_X(f, f) = \sum_{i=1}^{k} \int |X_i f|^2 \, dm, \qquad f \in \mathscr{C}_0^\infty(M),$$

que l'on forme en complétant $\mathscr{C}_0^\infty(M)$ pour la norme $\mathscr{D}_X^{1/2}(f, f) + \|f\|_2$, et introduisons le semi-groupe sous-markovien symétrique associé:

$$H_t^X = e^{t\Delta_X}, \qquad t > 0$$

où

$$\Delta_X = -\sum_{i=1}^{k} X_i^* X_i, \qquad \text{sur } \mathscr{C}_0^\infty(M)$$

($X_i^*$ est l'adjoint formel de $X_i$ sur $\mathbb{L}^2(M, m)$). Supposons que $H_t^X$ admet un noyau $h_t^X(x, y)$, $(t, x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times G \times G$ tel que:

$$H_t^X f(x) = \int_M h_t^X(x, y) f(y) \, dm(y), \qquad \forall f \in \mathscr{C}_0^\infty(M),$$

(dans les applications $\Delta_X$ sera hypoelliptique et le noyau $\mathscr{C}^\infty$).

Fixons deux entiers $d \neq 0$ et $D$ et considérons les inégalités de Nash suivantes:

$(N_d^0)$: $\quad \|f\|_2^{2+4/D} \leqslant c[\mathscr{D}_X(f, f) + \|f\|_2^2] \, \|f\|_1^{4/d}, \qquad f \in \mathscr{C}_0^\infty(G).$

$(N_D^\infty)$: $\quad \|f\|_2^{2+4/D} \leqslant c\mathscr{D}_X(f, f) \, \|f\|_1^{4/D}, \qquad$ pour les $f \in \mathscr{C}_0^\infty(G)$ telles que $\mathscr{D}_X(f, f) \leqslant \|f\|_1^2$.

Introduisons par ailleurs la fonction $V$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $V(t) = t^d$ si $t \in [0, 1]$, $V(t) = t^D$ si $t \in [1, +\infty[$ et considérons l'estimation diagonale supérieure: (on note $h_t = h_t^X$ et $\rho = \rho_X$)

$$\sup_{y \in M} \{h_t(x, y)\} < cV(\sqrt{t})^{-1}, \qquad x \in M, t > 0, \tag{e.d.s.}$$

et l'estimation gaussienne supérieure:

$$h_t(x, y) \leqslant cV(\sqrt{t})^{-1} \exp(-\rho^2(x, y)/ct), \tag{e.g.s.}$$

pour $t > 0$, $(x, y) \in M \times M$.

Au paragraphe II, nous avons utilisé le fait que sous l'hypothèse (VI.1) on a les équivalences:

$$\text{“}(N_d^0) \text{ et } (N_D^\infty)\text{”} \Leftrightarrow (\text{e.d.s.}) \Leftrightarrow (\text{e.g.s.}).$$

C'est un résultat explicitement contenu dans [2].

Une hypothèse naturelle sous laquelle on peut espérer que $(N_d^0)$ et $(N_D^\infty)$ soient vérifiées (et donc aussi (e.g.s.)) est que:

$$\operatorname{mes}(B(x, t)) \geqslant c V(t), \qquad \forall x \in M, \forall t > 0.$$

Cette conjecture est vérifiée quand $M$ est une variété compacte et $X$ un système de champs de Hörmander (voir [24]) mais aussi lorsque $M = G$ est un groupe de Lie unimodulaire et $X$ un système de champs invariants à gauche, comme le montrent les résultats de [27] (voir aussi [22]).

Nous voulons à présent discuter la possibilité d'obtenir des estimations inférieures du noyau $h_t$. Pour cela il est naturel d'introduire la condition

$$\operatorname{mes}(B(x, t)) \simeq V(t), \qquad \forall x \in M, \forall t > 0. \tag{VI.2}$$

D'autre part les paragraphes précédents et l'appendice indiquent l'importance de l'inégalité de Poincaré:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{B(x,R)} |f - f_B|^2 \, dm \leqslant CR^2 \int_{B(x,R)} |\nabla f|^2 \, dm, \\ \qquad f \in \mathscr{C}^\infty(B), \; x \in M, \; R > 0 \\ \displaystyle f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f \, dm, \end{cases} \tag{$P^*$}$$

dans l'obtention d'estimations inférieures du noyau. Nous introduisons ces estimations inférieures sous la forme d'une inégalité locale:

$$h_t(x, y) \geqslant [CV(\sqrt{t})]^{-1}, \qquad y \in B(x, \sqrt{t}), \; x \in M, \; t > 0, \tag{e.l.i.}$$

et de l'estimation gaussienne:

$$h_t(x, y) \geqslant [CV(\sqrt{t})]^{-1} \exp(-c\rho^2(x, y)/t), \tag{e.g.i.}$$

pour $(x, y) \in M \times M$, $t > 0$.

Avec toutes ces notations, nous pouvons énoncer:

PROPOSITION 4. *Soit* $M, X$ *satisfaisant* (VI.1) *et* (VI.2). *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) “$(N_d^0)$ *et* $(N_D^\infty)$ *et* $(P^*)$”;

(ii) “(e.d.s.) *et* (e.l.i.)”;

(iii) “(e.g.s.) *et* (e.g.i.)”.

Indiquons les grandes lignes de la preuve: tout d'abord on vérifie facilement que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Montrons (i) $\Rightarrow$ (iii): on sait que $(N_d^0)$ et $(N_D^\infty)$ impliquent (e.g.s.), de là en reprenant mot à mot l'appendice et le paragraphe III et en utilisant $(P^*)$ on déduit (e.l.i.). Pour montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i), remarquons que (e.g.s.) impliquent $(N_d^0)$ et $(N_D^\infty)$ et que la conjonction de (e.g.s.) et (e.g.i.) permet d'obtenir $(P^*)$ (voir [14]).

Ayant fait l'étude de l'opérateur modèle $\Delta_X$, on peut passer aux opérateurs

$$\mathscr{L}_a = -\sum_{i,j=1}^{k} X_i^* a_{ij} X_j$$

où $a$ est une fonction sur $M$ à valeur dans l'ensemble des matrices positives symétriques d'ordre $k$, comme précédemment. Nous notons encore $p_t^a$ le noyau du semi-groupe $(e^{t\mathscr{L}_a},\ t>0)$.

PROPOSITION 5. *Soient $M$, $X$ satisfaisant* (VI.1) *et* (VI.2) *et tels que $h_t^X$ vérifie* (e.g.s.) *et* (e.g.i.) *et soit $\alpha \in ]0, 1]$. Alors pour tout $a \in E(\alpha)$ le noyau $p_t^a$ vérifie aussi* (e.g.s.) *et* (e.g.i.). *D'autre part les analogues des théorèmes* 2 *et* 3 *et de leurs corollaires sont vérifiés.*

Autrement dit l'ensemble des résultats obtenus aux paragraphes précédents se généralise sous l'hypothèse que le noyau de l'opérateur modèle vérifie les inégalités gaussiennes.

*Application* 1. Considérons $M = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue et $\Lambda_\mu = \sum_{i,j=1}^n (\partial/\partial x_i)\, \mu_{ij} (\partial/\partial x_j)$ où $\mu = (\mu_{ij})$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans l'ensemble des matrices de dimension $n$ réelles symétriques positives à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ bornés. A un tel opérateur on peut encore associer une distance du contrôle qui peut être obtenue comme précédemment à partir des champs $X_i = \sigma(\partial/\partial x_i)$ où $x \mapsto \sigma(x)$ est une fonction lipschitzienne à valeur dans l'ensemble des matrices symétriques positives et telle que $\sigma^2 = \mu$. Fixons $\mu$ et notons $\Delta = \Lambda_\mu$ et $\rho$ la distance associée comme ci-dessus et faisons l'hypothèse qu'il existe $c > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que:

$$c^{-1} \|x-y\|^\varepsilon \leqslant \rho(x, y) \leqslant c\, \|x-y\|,$$
$$\text{pour} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x-y\| \leqslant 1, \qquad \text{(VI.3)}$$

où $\|x-y\|$ est la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (d'après [6], cette hypothèse est équivalente à la sous-ellipticité de $\Delta = \Lambda_\mu$). Supposons d'autre part que:

$$\text{mes}(B(x, t)) \simeq t^d, \qquad \text{si} \quad t \in [0, 1],\ x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(VI.4)}$$

pour un certain $d \in \mathbb{N}$. Sous les deux hypothèses (VI.3) et (VI.4) l'opérateur $\Delta = \Lambda_\mu$ peut être utilisé comme opérateur modèle et la proposition 5 fournit l'étude des opérateurs $\Lambda_v$ pour les fonctions à valeurs matricielles $v$ telles que $\alpha\mu \leqslant v \leqslant \alpha^{-1}\mu$ pour un $\alpha \in ]0, 1]$.

En effet pour pouvoir appliquer la proposition 5, il suffit de vérifier que le noyau $h_t$ associé à l'opérateur modèle $\Delta$ vérifie les estimations gaussiennes. Remarquons que (VI.3) implique

$$\rho(x, y) \simeq \|x-y\|, \qquad \text{si} \quad \|x-y\| \geqslant 1 \tag{VI.5}$$

et donc en particulier: $\text{mes}(B(x, t)) \simeq t^n$ si $t \geqslant 1$. Notons en conséquence $V(t) = t^d$ si $t \in [0, 1]$, $V(t) = t^n$ si $t \in [1, +\infty[$. Utilisant à la fois les résultats de [7] (pour la théorie locale) et ceux de [12] (pour le comportement global), on vérifie que $h_t$ satisfait (e.g.s.) et (e.g.i.) relativement à la fonction $V$ ci-dessus et à la distance $\rho$. Remarquons que les résultats de [7] permettent d'appliquer les idées ci-dessus dans le cas d'une variété compacte.

*Application* 2. Soit $\Omega_0$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Omega$ un ouvert relativement compact dans $\Omega_0$. Soient $X_1, ..., X_k$ des champs de vecteurs $\mathscr{C}^\infty$ sur $\Omega_0$ vérifiant l'hypothèse de Hörmander sous la forme: il existe un $l \in \mathbb{N}$ tel que les crochets des $X_i$ de longueur inférieure ou égale à $l$ engendrent linéairement $\mathbb{R}^n$ en chaque point de $\Omega_0$. L'étude de l'opérateur $\Delta_X = -\sum_{i=1}^k X_i^* X_i$ sous ces hypothèses est dûe à A. Sanchez-Calle [24] (voir aussi [10, 11, 15]). Les techniques présentées ici permettent d'obtenir pour les opérateurs de la forme $\mathscr{L}_a = -\sum_{i,j=1}^k X_i^* a_{ij} X_j$ les informations suivantes:

PROPOSITION 6. *Soient* $\alpha \in ]0, 1]$, $0 < \gamma < 1$, *il existe* $c > 0$, $\beta \in ]0, 1]$, $R_0 > 0$ *tels que pour tout* $a \in E(\alpha)$, $s \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $0 < R \leqslant R_0$ *et toute solution* $u \in \mathscr{C}^{1,2}([r-R^2, s] \times \bar{B}(x, R))$ *de* $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ *dans* $]s-R^2, s[\, \times B(x, R)$ *on ait*:

$$|u(t', y') - u(t, y)| \leqslant C \left[\frac{|t'-t|^{1/2} \vee \rho(y, y')}{R}\right]^\beta \|\ \|_\infty$$

*pour* $(t, y)$ *et* $(t', y')$ *dans* $[s - \partial^2 R^2, s] \times B(x, \gamma R)$.

PROPOSITION 7. *Etant donnés* $\alpha \in ]0, 1]$, $0 < \varepsilon < \eta < 1$, $0 < \gamma < 1$ *il existe des constantes* $c > 0$, $R_0 > 0$ *telles que pour tout* $a \in E(\alpha)$, *tout* $s \in \mathbb{R}$, *tout* $x \in \Omega$, *tout* $0 < R \leqslant R_0$, *et toute solution positive* $u \in \mathscr{C}^{1,2}(]s-R^2, s[\, \times B(x, R))$ *de* $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a)u = 0$ *dans* $]s-R^2, s[\, \times B(x, R)$ *on ait*:

$$u(t, y) \leqslant cu(s, x), \qquad (t, y) \in [s - \eta R^2, s - \varepsilon R^2] \times B(x, \gamma R).$$

*Remarque*. Si on note $p_t'$ le noyau de transition d'une diffusion gouvernée par $\mathscr{L}_a$ dans $\Omega$, on peut déduire de la proposition 7 que pour $x$ assez loin du bord de $\Omega$ on a:

$$p_t'(x, x) \leqslant c(\text{mes } B(x, \sqrt{t}))^{-1}, \qquad 0 < t \leqslant t_0$$

où $c$ ne dépend une fois de plus que de $\alpha$. En fait, on peut, dans ce cas encore, obtenir des estimations gaussiennes supérieures et inférieures. On utilise pour cela la proposition 7.

La preuve des propositions 6 et 7 consiste essentiellement à utiliser de façon simple l'une des idées introduites dans [20]. Plus précisément, sous nos hypothèses, il existe un entier $v$ et des champs $\mathscr{C}^{\infty}$, $\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_k$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^v$ tels que, notant $\pi$ la projection de $\Omega \times \mathbb{R}^v$ sur $\Omega$, on ait:

$$d\pi(\tilde{X}_i) = X_i, \qquad i \in \{1, ..., k\};$$

et tels que, d'autre part, les champs $\tilde{X}_i, ..., \tilde{X}_k$ soient libres jusqu'à l'ordre $l$ (i.e., il n'y a pas d'autres relations entre leurs crochets que celles induites par l'antisymétrie et la formule de Jacobi). On prouve alors les propositions 6 et 7 en développant les deux remarques suivantes:

(1) Les propositions 6 et 7 sont vérifiées pour les opérateurs $\tilde{\mathscr{L}}_a = -\sum_{i,j=1}^{k} \tilde{X}_i^* a_{ij} \tilde{X}_j$. En effet, on peut dans ce cas utiliser les résultats de l'application 1 car par construction le volume des boules du contrôle associées à $\tilde{X} = \{\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_k\}$ est uniformément équivalent à $t^d$, $t \in [0, t_0[$, pour un certain entier $d$, autrement dit l'hypothèse (VI.2) est vérifiée.

(2) Les propositions 6 et 7 pour l'opérateur $\tilde{\mathscr{L}}_a$ ont pour corollaire immédiat les résultats analogues pour l'opérateur $\mathscr{L}_a = -\sum_{i,j=1}^{k} X_i^* a_{ij} X_j$. En effet si $u$ est une solution de $(\partial/\partial t - \mathscr{L}_a) u = 0$, alors $\tilde{u}(t, x) = u(t, \pi(x)))$ est clairement une solution de $(\partial/\partial t - \tilde{\mathscr{L}}_a) u = 0$.

## Appendice: Inégalités de Poincaré

Notons $\mathscr{M}(\alpha)$ l'ensemble des fonctions $\varphi: \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ décroissante et telle que:

(i) $R = R_\varphi = \inf\{r: \varphi(r) = 0\} < +\infty$.

(ii) $\forall r$, $0 < r < R$, $\varphi(r + (1/2)[(R-r) \wedge (r/2)]) \geqslant \alpha\varphi(r)$.

La condition (ii) peut être interprétée en disant que les valeurs de $\varphi$ en des points à distance comparable de $R$ sont comparables. Nous avons alors:

Théorème. *Soit $G$ un groupe à croissance polynômiale et $\alpha > 0$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{M}(\alpha)$, on ait:*

$$\int |f(x) - f_\Phi|^2 \, \Phi(x) \, dx \leqslant c R_\varphi^2 \int |\nabla f(x)|^2 \, \Phi(x) \, dx, \qquad f \in \mathscr{C}_b^\infty(G)$$

*où $\Phi(x) = \varphi(\rho(x))$ et $f_\Phi = \int f(x) \, \Phi(x) \, dx / \int \Phi(x) \, dx$.*

Le gradient $\nabla$ et la distance $\rho$ sont relatifs à un système $X$ de champs invariants à gauche comme au paragraphe 1. Donnons deux exemples d'applications du théorème:

(1) $\varphi_R(t)=1$ si $t\in[0, R[$, $\varphi(R)=0$, $(\alpha=1!)$. L'inégalité obtenue est bien sûr, en posant $f_R=V(R)^{-1}\int_{B(R)} f(x)\,dx$:

$$\int_{B(R)} |f(x)-f_R|^2\,dx \leqslant CR^2 \int_{B(R)} |\nabla f|^2(x)\,dx. \tag{P.1}$$

(2) $\varphi_R(t)=(1-t/R)^2$, $t\in[0, R]$. On vérifie facilement que $\varphi_R\in\mathscr{M}(1/4)$ pour tout $R>0$ et on obtient la famille d'inégalités $(P)$ utilisée au paragraphe III.

*Remarque.* Pour $R\leqslant 1$, (P.1) est démontrée dans [9] et il est assez aisé de vérifier que les arguments de [9] conduisent à (P.1) pour tout $R>0$ si on utilise comme point de départ

$$\int_{B(R)} |f(x)-f_R|^2\,dx \leqslant CR^2 \int_{B(2R)} |\nabla f(x)|^2\,dx \tag{P'.1}$$

qui est (essentiellement) démontrée dans [28]. (Cette remarque est dûe à P. Maheux, communication personnelle).

Pour prouver le théorème nous avons à revenir en détail sur la preuve de [9]. Fixons $G$ et $\varphi$ comme dans le théorème et notons $R=R_\varphi$, $E=B(e, R)$. Suivant [9] de près, notons $\mathscr{F}$ une famille de Whitney pour $E=B(e, R)$. Autrement dit $\mathscr{F}$ est une famille de boules $B\subset E$ disjointes deux à deux telle que:

(a) $E=\bigcup_{B\in\mathscr{F}} B'$

(b) $B\in\mathscr{F}$ implique $10^2\,\rho(B)\leqslant\rho(B,\partial E)\leqslant 10^3\,\rho(B)$

(c) $\#\{B\in\mathscr{F}, \eta\in B^*\}\leqslant M$

où on a posé $B'=B(x, 2r)$, $B^*=B(x, 10r)$, $\rho(B)=r$ lorsque $B=B(x, r)$ et où $\rho(B,\partial E)$ est la distance de $B$ à $\partial E$. $M$ est une constante géométrique ne dépendant que de $G$ et de la distance $\rho$ et $\#\{\ \}$ dénote le cardinal de $\{\ \}$.

Pour $B\in\mathscr{F}$, fixons $\gamma_B$ un chemin du contrôle de l'origine du centre de la boule $B$, tel que $l(\gamma_B)\leqslant R$ et posons

$$\mathscr{F}(B)=\{A\in\mathscr{F}/A'\cap\gamma_B\neq\varnothing, \qquad B\in\mathscr{F}\}$$

$$A(\mathscr{F})=\{B\in\mathscr{F}/A\in\mathscr{F}(B), \qquad A\in\mathscr{F}\}$$

Avec ces notations le lemme suivant est extrait de [9].

LEMME. (i) *Si* $A\in\mathscr{F}(B)$, $\rho(A)\geqslant 10^{-2}\,\rho(B)$

(ii) $\rho(A)^2\,|A|^{-1}\sum_{B\in A(\mathscr{F})}\#\mathscr{F}(B)\,|B|\leqslant cR^2$.

De (i) on déduit que si $A \in \mathscr{F}(B)$ la distance de $A$ au bord de $E$ est contrôlée par la distance de $B$ au bord de $E$, ce qui implique, si $\varphi \in \mathscr{M}(\alpha)$

$$\sup \left\{ \Phi(x)\, \Phi^{-1}(y),\, x \in B'',\, y \in \bigcup_{A \in \mathscr{F}(B)} A'',\, B \in \mathscr{F} \right\} \leqslant c(\alpha). \qquad (*)$$

Nous pouvons à présent donner la preuve du théorème: si $B \in \mathscr{F}$, (P.1) et l'hypothèse $\varphi \in \mathscr{M}(\alpha)$ entraînent:

$$\int_{B''} |f(x) - f_{B''}|^2\, \Phi(x)\, dx \leqslant c_\alpha \rho(B)^2 \int_B |\nabla f|^2 (x)\, \Phi(x)\, dx \qquad (1)$$

où

$$f_{B''} = \int_{B''} f(x)\, \Phi(x)\, dx \Big/ \int_{B''} \Phi(x)\, dx.$$

Fixons une fois pour toute $B_0 \in \mathscr{F}$ tel que $e \in B_0'$ et posons $f_0 = \int_{B_0''} f(x)\, \Phi(x)\, ds / \int_{B_0''} \Phi(x)\, ds$. Soit $B \in \mathscr{F}$, numérotons les éléments de $\mathscr{F}(B)$, $A_1, \ldots, A_l$, de sorte que $A_1 = B$, $A_l = B_0$, $A_i' \cap A_{i+1}'' \neq \varnothing$ et $l = \#\mathscr{F}(B)$. Nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{B''} |f(x) - f_0|^2\, \Phi(x)\, dx \\ &\quad \leqslant \int_{B''} \left| f(x) - f_{B''} + \sum_{i=1}^{l-1} f_{A_i''} - f_{A_{i+1}''} \right|^2 \Phi(x)\, dx \\ &\quad \leqslant l \left( \int_{B''} |f(x) - f_{B''}|^2\, \Phi(x)\, dx + \sum_{i=1}^{l-1} |f_{A_i''} - f_{A_{i+1}''}|^2 \int_{B''} \Phi(x)\, dx \right). \end{aligned}$$

Remarquons que $A_i' \cap A_{i+1}'' \neq \varnothing$ implique que $A_i$ et $A_{i+1}$ ont des rayons comparables et que $A_i'' \cap A_{i+1}''$ a un volume comparable à celui de $A_i$ (et $A_{i+1}$!). En conséquence:

$$\begin{aligned} &\int_{A_i'' \cap A_{i+1}''} \Phi(x)\, dx\, |f_{A_i''} - f_{A_{i+1}''}|^2 \\ &\qquad \leqslant 2 \left( \int_{A_i''} |f - f_{A_i''}|^2\, \Phi + \int_{A_{i+1}''} |f - f_{A_{i+1}''}|^2\, \Phi \right) \end{aligned}$$

et en utilisant de plus $(*)$

$$\int_{B''} \Phi(x)\, dx \Big/ \int_{A_i'' \cap A_{i+1}''} \Phi(x)\, dx \leqslant c(\alpha)\, |B|\, |A_i|^{-1}.$$

De ce qui précède nous déduisons en utilisant (1):

$$\int_{B''} |f-f_0|^2 \Phi \leqslant c(\alpha) \, \#\mathscr{F}(B) \, |B| \sum_{A \in \mathscr{F}(B)} \rho(A)^2 \, |A|^{-1} \int_{A''} |\nabla f|^2 \Phi.$$

Une application du lemme et les conditions (a) et (c) de Whitney conduisent à:

$$\int_E |f-f_0|^2 \Phi \leqslant cR^2 \int_E |\nabla f|^2 \Phi$$

ce qui termine la preuve du théorème.

## BIBLIOGRAPHIE

1. D. G. ARONSON, Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 890–896.
2. E. CARLEN, S. KUSUOKA, AND D. STROOCK, Upper bounds for symmetric Markov transition functions, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **23** (1987), 245–287.
3. E. D. DAVIES, Explicit constant for Gaussian upper bounds on heat kernel, *Amer. J. Math.* **109** (1986), 319–333.
4. E. DE GIORGI, Sulle differentiabilita e l'analiticita degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **3** (1957), 25–43.
5. E. FABES AND D. STROOCK, A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash, *Arch. Rational Mech. Anal.* **96** (1986), 327–338.
6. C. FEFFERMAN AND D. PHONG, Subelliptic eigenvalue problems, *in* "Proc. of the Conf. on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund," pp. 590–606, Wadsworth. Math. Series, Wadsworth, Belmont, CA, 1981.
7. C. FEFFERMAN AND A. SANCHEZ-CALLE, Fundamental solutions for second order subelliptic operators, *Ann. of Math.* **124** (1986), 247–272.
8. Y. GUIVARC'H, Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques, *Bull. Soc. Math. France* **101** (1973), 333–379.
9. D. JERISON, The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition, *Duke Math. J.* **53** (1986), 503–523.
10. D. JERISON AND A. SANCHEZ-CALLE, Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields, *Indiana Univ. Math. J.* **35** (1986), 835–854.
11. D. JERISON AND A. SANCHEZ-CALLE, Subelliptic second order differential operators, *in* "Complex Analysis, III," pp. 46–75, Lecture Notes in Math., Vol. 1277, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1986.
12. S. KUSUOKA AND D. STROOCK, Long time estimates for the heat kernel associated with uniformly subelliptic symmetric second order operators, *Ann. of Math.* **127** (1988), 165–189.
13. S. KUSUOKA AND D. STROOCK, Reversibility of solutions to martingale problems. Probability, statistical mechanics and number theory, *Adv. in Math. Suppl. Stud.* **9** (1986), 107–123.
14. S. KUSUOKA AND D. STROOCK, Applications of the Malliavin calculus, II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **32** (1985), 1–76.

15. S. Kusuoka and D. Stroock, Applications of the Malliavin calculus, III, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **34** (1987), 391–442.
16. J. Moser, On Harnack theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 47–79.
17. J. Moser, A Harnack inequality for parabolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964), 101–134; **20** (1967), 232–236.
18. A. Nagel, E. Stein, and S. Wainger, Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties, *Acta Math.* **155** (1985), 103–147.
19. J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.* **80** (1958), 931–954.
20. L. Rotschild and E. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups, *Acta Math.* **137** (1977), 247–320.
21. L. Saloff-Coste, Sur la décroissance des puissances de convolution sur les groupes, *Bull. Sci. Math.* **113** (1989), 3–21.
22. L. Saloff-Coste, Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynômiale, *Avkiv för Matematik* **28** (1990), 315–331.
23. M. N. Safanov, Harnack's inequality for elliptic equations and the Hölder property of their solutions, *J. Soviet. Math.* **21** (1983), 851–863.
24. A. Sanchez-Calle, Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields, *Invent. Math.* **78** (1984), 143–160.
25. D. Stroock, "Diffusion Semigroups Corresponding to Uniformly Elliptic Divergence Form Operators," Springer L.N.M., 1321, Sem. de Prob. XXII, 316–347.
26. N. Th. Varopoulos, Hardy–Littlewood theory for semigroups, *J. Funct. Anal.* **63** (1985), 240–260.
27. N. Th. Varopoulos, Analysis on Lie groups, *J. Funct. Anal.* **76** (1988), 346–410.
28. N. Th. Varopoulos, Fonctions harmoniques sur les groupes de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **304** (1987), 517–521.