# Листок 1. Основные понятия, клеточные комплексы

14 февраля 2012 г.

**Определение.** Семейство отображений $f_t : X \to Y, t \in I$ называется *гомотопией*, если соответствующее отображение $F : X \times I \to Y$, $(x,t) \mapsto f_t(x)$ непрерывно. Отображения $f_0, f_1 : X \to Y$ *гомотопны*, если существует соединяющая их гомотопия $f_t$ (обозначается $f_0 \simeq f_1$). Отображение, гомотопное константе, называется *нульгомотопным.*

**Определение.** *Деформационной ретракцией* пространства $X$ на подпространство $A$ называется такая гомотопия $f_t : X \to X$, что $f_0 = \mathbb{1}$, $f_1(X) = A$ и $f_t|_A = \mathbb{1} \quad \forall t$.

**Определение.** Отображение $f : X \to Y$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если существет такое отображение $g : Y \to X$, что $fg \simeq \mathbb{1} \simeq gf$. В таком случае пространства $X$ и $Y$ называются *гомотопически эквивалентными.* Пространство, эквивалентное точке, называется *стягиваемым.*

**Задача 1.** Явно построить деформационную ретракцию $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ на $S^{n-1}$.

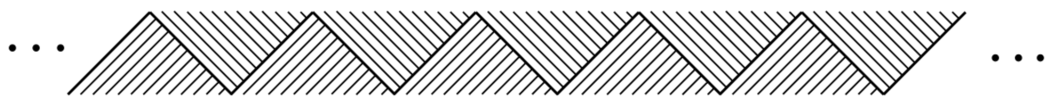
**Задача 2.** Явно построить деформационную ретракцию тора с выколотой точкой на граф, состоящий из двух окружностей, пересекающихся в одной точке (параллель и меридиан тора).

**Определение.** *Деформационной ретракцией в слабом смысле* пространства $X$ на подпространство $A$ называется такая гомотопия $f_t : X \to X$, что $f_0 = \mathbb{1}$, $f_1(X) \subset$ и $f_t(A) \subset A \quad \forall t$.

**Задача 3. (a)** Покажите, что если пространство $X$ деформационно ретрагирует в точку $x \in X$, то для любой окрестности $U \ni x$ в $X$ существует такая окрестность $V \subset U$ точки $x$, что вложение $V \hookrightarrow U$ гомотопно тождественному отображению.

**(b)** Пусть $X$ — подпространство $\mathbb{R}^2$, состоящее из горизонтального отрезка $[0,1] \times \{0\}$ и вертикальных отрезков $\{r\} \times [0, 1-r]$ для всех рациональных $r \in [0,1]$. Показать, что $X$ деформационно ретрагирует в любую точку горизонтального отрезка, но не ретрагирует ни в какую другую точку.

**(c)** Пусть $Y$ — подпространство $\mathbb{R}^2$, являющееся объединением бесконечного числа копий $X$ (см. рисунок). Покажите, что $Y$ стягиваемо, но не ретрагирует деформационно ни в какую своей точке.



**(d)** Пусть $Z$ — подпространство пространства $Y$в форме зигзага. Показать, что существует деформационная ретракция $Y$ в $Z$ в слабом смысле, но не существует настоящей деформационной ретракции.

**Задача 4.** Покажите, что пространство $X$ стягиваемо тогда и только тогда, когда для любого пространства $Y$ любое отображение $f : X \to Y$ нульгомотопно. Докажите аналогичный факт для отображений $g : Y \to X$.

**Определение.** Рассмотрим следующую конструкцию. Начнем с дискретного множества $X^0$, точки которого назовем 0-клетками. Далее, по индукции строим *n-скелет* $X^n$ из $X^{n-1}$, приклеивая к $X^{n-1}$ шары $D^n$ вдоль края $S^{n-1}$. Этот процесс мы либо заканчиваем на конечном шаге, определяя $X$ равным $X^n$, либо продолжаем до бесконечности, получая $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$. В последнем случае $X$ наделяется *слабой топологией*, то есть: множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $A \cap X^n$ открыто в $X^n$ для любого $n$.

Такое пространство $X$ называется *клеточным комплексом*, или *CW-комплексом*, где C обозначает cell (клетка), а W — weak (слабая топология). Если $X = X^n$, то $X$ называется *конечномерным*, и минимальное такое $n$ называется *размерностью* $X$.

**Задача 5.** Для произвольных натуральных чисел $v, e, f$, удовлетворяющих условию $v-e+f=2$, построить клеточную структуру на $S^2$, состоящую из $v$ 0-клеток, $e$ 1-клеток и $f$ 2-клеток.

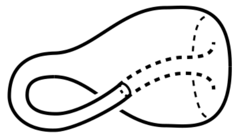
**Задача 6.** Построить двумерный клеточный комплекс, содержащий цилиндр $S^1 \times I$ и ленту Мёбиуса как деформационные ретракты.

**Задача 7.** Введите клеточную структуру на $S^\infty = \bigcup_{i=1}^\infty S^n$, и покажите, что $S^\infty$ стягиваема.

**Задача 8*.** Докажите, что если клеточный комплекс представляется в виде объединения двух стягиваемых комплексов, пересечение которых стягиваемо, то и сам он стягиваем.

**Задача 9.** Покажите, что если $X$ — связное пространство, являющееся объединением конечного числа двумерных сфер, любые две из которых пересекаются не более, чем в одной точке, то $X$ гомотопически эквивалентно букету одномерных и двумерных сфер.

**Задача 10.** Покажите, что подпространство $X \subset \mathbb{R}^3$, полученное из бутылки Клейна, самопересекающейся вдоль окружности (см. рисунок), гомотопически эквивалентно букету из двух окружностей и одной двумерной сферы.



**Задача 11*.** Пусть $X$ — конечный граф, лежащий в полуплоскости $P \subset \mathbb{R}^3$, и пересекающий ее край в некотором подмножестве своих вершин. Опишите гомотопический тип поверхности, полученной из $X$ вращением полуплоскости относительно своего края.

**Определение.** Говорят, что пара пространств $(X, A)$, $A \subset X$ удовлетворяет *свойству продолжения гомотопии*, если для любого отображения $f_0 : X \to Y$ и любой гомотопии $f_t : A \to Y$ отображения $f_0|_A$ существует продолжающая ее гомотопия $f_t : X \to Y$.

**Задача 12.** Покажите, что если $(X_1, A)$ удовлетворяет свойству продолжения гомотопии, то ему также удовлетворяет любая пара $(X_0 \sqcup_f X_1, X_0)$, полученная приклеиванием $X_1$ к $X_0$ с помощью отображения $f : A \to X_0$.