

Листок 10. Теорема ван Кампена

17 апреля 2012 г.

Везде, где не сказано противное, все пространства считаются хорошими (т.е. к ним применимы все теоремы про накрытия).

Задача 1. Обозначим через M_g сферу с g ручками. Вычислите $\pi_1(M_g)$.

Задача 2. Обозначим через N_h сферу с h лентами Мебиуса. Вычислите $\pi_1(N_h)$.

Задача 3. Вычислите фундаментальную группу “шутовского колпака”.

Задача 4. С помощью теоремы ван Кампена покажите, что $\pi_1(S^n) = 1$, $n > 1$.

Задача 5. Пусть X есть объединение n прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало координат. Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}^3 - X)$.

Задача 6. Вычислите фундаментальную группу пространства, полученного из двух торов $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ отождествлением окружности $S^1 \times \{x_0\}$ одного тора с соответствующей окружностью $S^1 \times \{x_0\}$ другого тора.

Задача 7. Рассмотрим куб I^3 . Каждую грань куба отождествим с противоположной гранью с помощью параллельного переноса + поворота на угол 90° . Показать, что полученное пространство X есть CW -комплекс, содержащий две 0-клетки, четыре 1-клетки, три 2-клетки и одну 3-клетку. Показать, что $\pi_1(X)$ есть группа кватернионов $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ порядка 8.

Задача 8. Показать, что $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2)$ является несчетной. Что можно сказать про $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathbb{Q}^3)$?

Задача 9. Пусть p, q — взаимно простые натуральные числа. Рассмотрим тор $S^1 \times S^1$. Рассмотрим в нем меридиан $(e^{2\pi i x}, 1)$ и кривую $(e^{2\pi p i x}, e^{2\pi q i x})$. Приклеим к тору два диска вдоль этих кривых. Вычислите фундаментальную группу полученного пространства.