Листок 11. Высшие гомотопические группы. Расслоение Хопфа

27 апреля 2012 г.

Определение. Обозначим через I^{n-1} грань куба I^n с нулевой последней координатой, и через J^{n-1} — замыкание множества $\partial I^n \backslash I^{n-1}$. *Относительной гомотопической группой* $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geq 1$ для пары (X, A) называется множество гомотопических классов отображений $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$. Операция сложения вводится аналогично обычным гомотопическим группам.

Задача 1. Покажите для пары (X, A) линейно связных пространств, что $\pi_1(X, A, x_0)$ можно естественным образом отождествить с множеством смежных классов αH, где $H \subset \pi_1(X, x_0)$ — подгруппа петель в A, начинающихся в x_0.

Определение. Определим отображение $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$, которое переводит класс отображений $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ в ограничение $(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0)$.

Задача 2. Покажите, что последовательность

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0)$$

точна, то есть для двух последовательных отображений образ первого совпадает с ядром второго.

Задача 3*. Покажите, что длинная последовательность

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(X, x_0) \longrightarrow \cdots$$

точна (концом последовательности является фрагмент из предыдущей задачи).

Задача 4. Покажите, что у квазиокружности (смотри предыдущие листки) все гомотопические группы тривиальны, но при этом она не стягиваема.

Задача 5. Склейте сферу S^{p+q+1} из $S^p \times D^{q+1}$ и $D^{p+1} \times S^q$.

Определение. На $\{(z, w) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\} = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ покоординатным умножением действует группа $S^1 = \{e^{i\varphi}\}$. Факторпространство S^3 по действию этой группы является проективная прямая $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$. *Расслоением Хопфа* называется отображение проекции $S^3 \to S^2$, соответствующее этому действию.

Задача 6. Докажите, что расслоение Хопфа является локально тривиальным.

Задача 7. $\mathbb{R}^3$ представляет собой S^3 с выкинутой точкой. Опишите разбиение $\mathbb{R}^3$ на слои расслоения Хопфа.

Задача 8. Докажите, что множество $D = \{(z, w) \in S^3 \mid w \in [0, 1]\}$ гомеоморфно кругу, границей которого служит слой расслоения Хопфа над точкой $[1 : 0] \in \mathbb{C}P^1$.

Задача 9. Докажите, что любой слой расслоения Хопфа (кроме границы D) пересекает D ровно в одной точке. Иными словами, любой слой зацеплен со слоем над $[1 : 0]$.

Задача 10. Покажите, что любые два слоя расслоения Хопфа зацеплены.

Задача 11. Докажите, что склейка D^4 по границе с $\mathbb{C}P^1$ по расслоению Хопфа равна $\mathbb{C}P^2$.

Задача 12. Постройте аналог расслоение Хопфа $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$.