Листок 12. Точная последовательность расслоения, примеры

9 мая 2012 г.

Напомним, что в прошлом листке была получена длинная точная последовательность гомотопических групп

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(X, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Пусть теперь $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение над связной базой B со слоем F. Пусть $e \in E$ — произвольная точка, $b = p(e)$, $F_b = p^{-1}(b)$. Рассмотрим отображение $p_* : \pi_n(E, F, e) \to \pi_n(B, b)$.

Задача 1. Показать, что отображение p_* является инъективным.

Подсказка. Используйте теорему о поднятии гомотопии.

Задача 2. Показать, что отображение p_* является сюръективным.

Подсказка. Используйте разбиения S^n и D^n на сферы S^{n-1}, и рассмотрите их как гомотопии некоторых отображений.

Замечание. Не забудьте отдельно рассмотреть случай $n = 1$.

Теперь, если мы заменим в длинной точной последовательности A на F, а X на E, то в силу доказанного изоморфизма получим следующую точную последовательность, называемую *точной последовательностью расслоения*:

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, e) \longrightarrow \pi_n(E, e) \longrightarrow \pi_n(B, b) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, e) \longrightarrow \pi_{n-1}(E, e) \longrightarrow \cdots$$

Задача 3. Опишите отображения этой последовательности в терминах расслоения.

Задача 4. Покажите, что $\pi_n(S^3) \simeq \pi_n(S^2)$.

Подсказка. Воспользуйтесь расслоением Хопфа.

Задача 5*. Какие гомотопические группы сфер вы можете вычислить из обобщений расслоения Хопфа? (см. предыдущий листок)

Задача 6. Постройте расслоение S^∞ над $\mathbb{C}P^\infty$ со слоем S^1.

Задача 7. Вычислите высшие гомотопические группы $\mathbb{C}P^\infty$.

Задача 8. Пусть задана коммутативная диаграмма абелевых групп с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
{\scriptstyle\phi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_2}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_3}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_4}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_5}\downarrow \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
\end{array}$$

Пусть $\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5$ — изоморфизмы. Показать, что тогда ϕ_3 также является изоморфизмом.