Листок 2. Примеры топологических пространств и гомотопий

20 февраля 2012 г.

Задача 1. Покажите, что $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ гомеоморфно $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

Задача 2. Покажите, что $S^{n+m-1} \setminus S^{n-1}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^n \times S^{m-1}$.

Задача 3. Покажите, что цилиндр и лента Мёбиуса не гомеоморфны.

Определение. Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X. Тогда *факторпространством* $X/\sim$ называется множество классов эквивалентности относительно $\sim$ со следующей топологией: $U \subset X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда открыто $\pi^{-1}(U) \subset X$, где π — естественное отображение.

Определение. *Проективным пространством* $\mathbb{R}P^n$ называется пространство $\frac{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}{\{x\sim\lambda x, \lambda\in\mathbb{R}^*\}}$.

Задача 4. Построить клеточные структуры на проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$ и на сфере S^n такие, что отображение факторизации $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ является клеточным.

Задача 5. Докажите, что пространства $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ и $S^2 \vee S^1$ гомотопически эквивалентны.

Задача 6. Пусть L — две зацепленные окружности в пространстве. Доказать, что $\mathbb{R}^3 \setminus L$ и $S^2 \vee T^2$ гомотопически эквивалентны.

Задача 7. Докажите, что отображения $f, g : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to GL_{2n}(\mathbb{R})$, $f(A,B) = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, $g(A,B) = \left(\begin{smallmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{smallmatrix}\right)$, гомотопны.

Подсказка. Элементарные преобразования строк.

Задача 8*. Введите структуру CW-комплекса на множестве всех k-мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Полученное пространство называется *многообразием Грассмана* $G(n,k)$.

Подсказка. Посчитайте "размерность"этого пространства. Выберите базис в $\mathbb{R}^n$ и проведите аналогию с проективным пространством.