

Листок 4. Фундаментальные группы

12 марта 2012 г.

Определение. Путем в топологическом пространстве X называется отображение $\gamma : I \rightarrow X$. Петлей с началом в точке $p \in X$ называется такой путь, что $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Произведением петель γ_1 и γ_2 называется петля $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$ такая, что

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(1 - 2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Пути (и, соответственно, петли) называются *гомотопными*, если существует соединяющая их гомотопия F , причем $F|_{\{0\} \times I} \equiv \text{const}$, $F|_{\{1\} \times I} \equiv \text{const}$.

Задача 1. Докажите, что гомотопность путей является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентности петель с началом в точке p обозначается $\pi_1(X, p)$.

Задача 2. Докажите, что если X — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, то $\pi_1(X, p)$ состоит из одного элемента.

Задача 3. Докажите, что если $\gamma_1 \sim \gamma'_1$, $\gamma_2 \sim \gamma'_2$, то $\gamma_1 \circ \gamma_2 \sim \gamma'_1 \circ \gamma'_2$. Из предыдущей задачи следует, что умножение петель порождает умножение на множестве $\pi_1(X, p)$.

Задача 4. Покажите, что $\pi_1(X, p)$ является группой относительно описанного умножения.

Задача 5. Покажите, что если существует путь между точками $p, q \in X$, то группы $\pi_1(X, p)$ и $\pi_1(X, q)$ изоморфны. Таким образом, в случае линейно связного X можно не указывать точку p и писать просто $\pi_1(X)$ — *фундаментальная группа* пространства X .

Определение. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — такое отображение, что $f(p) = q$. Тогда отображение $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, q)$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ называется *отображением, индуцированным f* .

Задача 6. Докажите, что отображение f_* корректно определено (не зависит от выбора представителя класса эквивалентности) и является гомоморфизмом групп.

Задача 7. Докажите, что если отображения f_0 и f_1 гомотопны, причем $f_t(p) = q \quad \forall t$, то $(f_0)_* = (f_1)_*$.

Задача 8. Обобщение предыдущей задачи. Пусть f_0 и f_1 гомотопны, причем $\gamma(t) = f_t(p)$ — петля, которую в процессе гомотопии описывает образ точки p . Тогда для произвольного элемента $\tau \in \pi_1(Y, q)$ верно равенство $(f_1)_*(\tau) = [\gamma]^{-1}(f_0)_*(\tau)[\gamma]$.

Задача 9. Выведите из предыдущих задач, что фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

Задача 10. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Показать, что множество классов гомотопии отображений $S^1 \rightarrow X$ есть множество классов сопряженных элементов в $\pi_1(X)$.