Листок 5. Фундаментальные группы и приложения

13 марта 2012 г.

Задача 1. Докажите, что для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

(a) всякое отображение $S^1 \to X$ гомотопно постоянному отображению $S^1 \mapsto \text{point}$;
(b) всякое отображение $S^1 \to X$ продолжается до отображения $D^2 \to X$;
(c) $\pi_1(X, x_0) = 0$ для любой точки $x_0 \in X$.

Задача 2. Докажите, что теорема Брауэра для отображений $D^n \to D^n$ равносильна тому, что $S^{n-1} = \partial D^n$ не является ретрактом в D^n.

Задача 3. Верна ли теорема Борсука–Улама для тора? Точнее, верно ли, что для любого отображения $f\colon \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ существует точка (x, y), для которой верно $f(x, y) = f(-x, -y)$?

Задача 4. Пусть A_1, A_2, A_3 — три компакта в $\mathbb{R}^3$. Используя теорему Борсука–Улама покажите, что существует такая плоскость $P \subset \mathbb{R}^3$, которая разбивает каждое из этих множеств на 2 части равной меры.

Комментарий. Под мерой понимается обычная мера Лебега в $\mathbb{R}^3$. Если вы не знакомы с понятием меры, то понимайте ее как обычный объем, полагая при этом, что точки, подмножества кривых и поверхностей имеют нулевой объем.

Задача 5. Вычислите $\pi_1(S^2 \vee S^1)$.

Задача 6. Какой будет фундаментальная группа букета $S^1 \vee S^1$? А букета $\bigvee\limits_{\alpha} S^1$?

Задача 7*. Рассмотрим связный CW-комплекс X. Пусть $X^2 = \mathrm{sk}^2(X)$ — его второй скелет. Покажите, что $\pi_1(X^2) \simeq \pi_1(X)$.

Подсказка. Пользуясь деформационными ретракциями $D^n = D^{n-1} \times I \to D^{n-1} \cup \partial D^{n-1} \times I$ покажите, что любую петлю в X можно продеформировать в петлю, лежащую в X^2.

Задача 8. Пользуясь предыдущей задачей вычислите фундаментальные группы CW-комплексов (a) $\pi_1(S^n)$, (b) $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$, (c)* $\pi_1(\mathbb{C}Gr(n, k))$.

Задача 9*. Покажите, что любая группа является фундаментальной группой некоторого CW-комплекса.