

Листок 6. Накрывающие пространства

19 марта 2012 г.

Определение. Накрытие называют *универсальным*, если любая петля в нем стягиваема.

Определение. Пусть задано накрытие $p: \tilde{X} \rightarrow X$. *Аutomорфизм* этого накрытия есть гомеоморфизм $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, такой что $p(f(\tilde{x})) = p(\tilde{x})$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Задача 1. Постройте универсальное накрытие тора T^2 .

Задача 2. Постройте универсальное накрытие букета $S^2 \vee S^1$.

Задача 3. Постройте универсальное накрытие проективного пространства $\mathbb{R}P^n$.

Задача 4. Постройте универсальное накрытие сферы с g ручками, где $g \geq 2$.

Задача 5. Докажите, что сферу с g_1 ручками можно накрыть сферой с g_2 ручками ($g_1, g_2 \geq 2$) тогда и только тогда, когда $g_2 - 1$ делится на $g_1 - 1$.

Задача 6. Докажите, что любой автоморфизм накрытия полностью задается образом одной точки при этом автоморфизме.

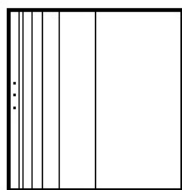


Рис. к задаче 7

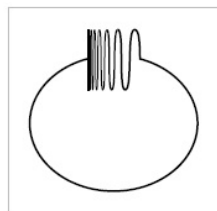


Рис. к задаче 8

Задача 7. Пусть X есть подпространство в $\mathbb{R}^2$, состоящее из границы квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ и вертикальных линий $x = 1/2, 1/3, 1/4, \dots$. Покажите, что для любого накрытия $\tilde{X} \rightarrow X$ существует окрестность левого ребра X , которая поднимается гомеоморфно в $\tilde{X}$. Выведите отсюда, что пространство X не имеет односвязного накрытия.

Задача 8. Пусть Y — *квази-круг*, то есть подпространство $\mathbb{R}^2$, которое состоит из части графика $y = \sin(1/x)$ когда $x \in (0, 1)$, вертикального отрезка $[-1, 1]$ и дуги, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(1, \sin(1))$. Стягивание вертикального отрезка $[-1, 1]$ в точку дает отображение $f: Y \rightarrow S^1$. Показать, что оно не поднимается до отображения $\tilde{f}: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Следовательно, условие линейной связности в теореме о накрывающей гомотопии является существенным условием.