

Листок 7. Накрывающие пространства и фундаментальные группы

27 марта 2012 г.

Задача 1. Докажите, что любое n -листное накрытие конечного графа есть конечный граф.

Задача 2. Докажите, что подгруппа (конечного индекса) свободной группы с k образующими является свободной группой. (это слабый вариант теоремы Нильсена–Шрейера о том, что всякая подгруппа свободной группы свободна).

Задача 3. Докажите, свободная группа ранга 2 содержит в качестве подгруппы свободную группу любого ранга n .

Задача 4. Постройте двулистное накрытие листа Мебиуса $\mathbb{M}^2$ цилиндром C . Покажите, что $\pi_1(\mathbb{M}^2) = \mathbb{Z}$. Опишите индуцированный гомоморфизм $\pi_1(C) \rightarrow \pi_1(\mathbb{M}^2)$.

Задача 5. Используя универсальное накрытие пространства $\mathbb{R}P^n$ из предыдущего листка, вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$.

Задача 6. Опишите двулистное накрытие $SU(2) \rightarrow SO(3)$, где $SU(2)$ — унитарные матрицы 2×2 с определителем 1, а $SO(3)$ — ортогональные матрицы 3×3 с определителем 1. Опишите, как топологически устроено это накрытие (как устроены эти пространства и это отображение). Найдите $\pi_1(SO(3))$.

Задача 7. Построить конечные графы X_1 и X_2 такие, что у них есть общее конечнолистное накрытие, но нету пространства, которое они оба накрывают.

Задача 8. Найти все (линейно) связные накрытия $RP^2 \vee RP^2$.

Задача 9. Нарисовать накрытия $S^1 \vee S^1$, соответствующие подгруппам (a) $\langle a^4, b^4, a^3b, ab^3, a^2b^2 \rangle$; (b) $\langle a^2, b^2, ab \rangle$; (c) $\langle b^{2n}a^2b^{-2n-1}, b^{2n+1}a^2b^{-2n} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$.

Задача 10. Постройте граф Кэли для (a) $(S_3, \{(12), (23)\})$; (b) $(S_n, \{(12), (23), \dots, (n-1, n)\})$ и вычислите его фундаментальную группу.