

Листок 8. Накрытия и группы монодромии

10 апреля 2012 г.

Везде, где не сказано противное, все пространства считаются хорошими (т.е. к ним применимы все теоремы про накрытия).

Задача 1. Можно ли проективную плоскость накрыть сферой, плоскостью, бутылкой Клейна?

Задача 2. Классифицируйте накрытия на торе $\mathbb{T}^2$. Опишите накрывающие пространства.

Задача 3. Опишите накрытие $S^1 \vee S^1$, соответствующее подгруппе $\pi_1(S^1 \vee S^1)$, порожденной кубами всех элементов.

Задача 4. Пусть $p : \tilde{X} \rightarrow X$ — универсальное накрытие X и $A \subset X$ — связное и локально связное подпространство. Обозначим через $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ произвольную компоненту связности в $p^{-1}(A)$. Показать, что $p : \tilde{A} \rightarrow A$ есть накрытие, соответствующее ядру отображения $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$.

Задача 5. Для заданной группы G и ее нормальной подгруппы N постройте нормальное накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям $\pi_1(X) = G$, $\pi_1(\tilde{X}) = N$, $G(\tilde{X}) = G/N$.

Определение. Связное накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$ называется *абелевым*, если оно нормально и имеет абелеву группу монодромий.

Задача 6. Покажите, что для любого пространства X существует и единственно абелево накрытие, удовлетворяющее свойству универсальности. Описать явно такое накрытие для $S^1 \vee S^1$.

Задача 7. Постройте *не* нормальные накрытия бутылки Клейна бутылкой Клейна и тором.

Задача 8. Пусть X — пространство, полученное из тора $S^1 \times S^1$ путем приклейки листа Мебиуса вдоль границы к окружности $S^1 \times \{x_0\}$. Вычислите $\pi_1(X)$, опишите универсальное накрытие и опишите действие $\pi_1(X)$ на универсальном накрытии.

Задача 9. Аналогичная задача для склеенных $\mathbb{R}P^2$ и листа Мебиуса (граница приклеивается вдоль $\mathbb{R}P^1$).

Задача 10. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет вид $\varphi(x, y) = (2x, y/2)$. Это преобразование порождает действие $\mathbb{Z}$ на $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Показать, что это действие является накрывающим и вычислить $\pi_1(X/\mathbb{Z})$. Показать, что пространство орбит $X/\mathbb{Z}$ нехаусдорфово, и описать его.