ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРОБЛЕМЕ НЕИЗГИБАЕМОСТИ[1]

Роберт Коннелли

ЧАСТЬ I

Резюме. В статье рассматривается проблема неизгибаемости многогранников в трехмерном пространстве. В частности, доказывается, что если порядок экватора подвески (надстройки) относительно оси, проходящей через северный и южный полюсы (точки подвеса), отличен от нуля, то подвеска неизгибаема. Это утверждение распространяется также на случай подвесок, экватор которых является кусочно-гладкой кривой. Полученные в этой части формулы используются дальше в ч. II, где среди других утверждений показывается, в частности, что любая вложенная подвеска неизгибаема.

Используемый метод состоит в следующем: сначала устанавливается некоторая формула, которая должна быть удовлетворена, если многогранник изгибается, а затем, расширяя область изменения используемых переменных, в подходящим образом выбранной точке «улавливается» необходимая информация.

§ 1. Введение

В математике случается, что некоторая простая элегантная проблема, будучи однажды исследованной, длительное время остается почти в одном и том же состоянии. Так получилось с проблемой неизгибаемости многогранников в трехмерном пространстве. После первоначального успеха Коши в 1813 г. в этой проблеме были только некоторые не очень далеко идущие продвижения и новые идеи; однако нам кажется, что с новой методикой здесь можно найти большие возможности для важных приложений. Мы полагаем, что безвестность этой проблемы совершенно незаслуженна.

В этой работе мы предложим некоторые новые идеи и методы, независимые от методики Коши, и применим их к многогранникам в виде подвесок. Метод, описанный здесь, со-

[1]) Connelly Robert. An Attack on Rigidity. Preprint, 1974. This research was supported by National Science Foundation Grant GP — 33960X.

вершенно прост, и он фактически мог бы возникнуть 150 лет назад. В нем практически не используется никакой аппарат, обычно связываемый с дифференциальной геометрией, и, может быть, здесь представится удобный случай построить параллельную теорию или как-то развить старую современную теорию. Мы полагаем, что в этой области время для таких построений подходящее.

Наша идея доказательства теорем неизгибаемости несколько отличается от обычно применяемой в гладком случае идеи (см. Стокер [7, стр. 360]), в которой требуется, чтобы некоторая «потенциальная» функция обращалась в тождественный нуль. Вместо этого мы отправляемся от формулы, которая описывает движение многогранника при его изгибании, причем мы не делаем никаких предположений о том, является ли многогранник погруженным или вложенным в пространство (эта общая ситуация кажется принципиально трудной для описания в гладком случае). Оказывается, что переменные, используемые в этой формуле, могут быть продолжены за их естественную область задания, и при этом формула продолжает оставаться справедливой. Затем, применяя эту формулу в подходящим образом выбранной точке, мы можем получить и внутреннюю и внешнюю информацию об исходном многограннике. В тех специальных случаях, которые мы здесь рассматриваем, этой информации оказывается достаточно, чтобы показать, что многогранник не может быть погруженным. Значит, если многогранник был погруженным, он будет неизгибаемым.

Наша работа состоит из двух частей. В ч. I мы приводим основные формулы и переменные и связанную с ними теорию. Основная цель этой части — доказать (двумя методами), что если подвеска изгибается так, что расстояние между ее северным и южным полюсами изменяется, то порядок экватора относительно оси между полюсами равняется нулю.

В части II мы вводим понятие обобщенного объема, совпадающее с обычным объемом тела, ограниченного многогранником в случае его вложенности в E^3, и устанавливаем, что объем нетривиально изгибающейся подвески должен равняться нулю, откуда, в частности, следует неизгибаемость вложенных октаэдров[1]). Затем мы приступаем к систематической классификации всех изгибаемых октаэдров с точным их описанием, позволяющим проводить их построение (ска-

[1]) Неизгибаемость погруженных октаэдров может быть получена, как это показал Р. Коннелли в начальной редакции ч. II, также из результатов ч. I с использованием критерия Орланда о погруженности окрестности вершины многогранника, содержащегося в неявной форме в работе [17*]. — *Прим. перев.*

жем, циркулем и линейкой). Эта классификация, полезная для любой подвески, включает классические неособые кубические кривые алгебраической геометрии и потоковые графы, построенные с использованием хорошо известной групповой операции, определенной на неособых кубических кривых. В частности, это позволяет параметризовать такие изгибаемые подвески посредством эллиптической функции $\wp$ Вейерштрасса. Мы надеемся, что такое точное построение в конце концов окажется очень полезным[1]).

Ниже приводится содержание части I.

§ 2. **Основные определения и предварительные результаты.** Здесь мы формулируем два варианта гипотезы неизгибаемости.

§ 3. **Основное соотношение.** Здесь вводятся переменные и получаются основные уравнения.

§ 4. **Подвеска многоугольников.** В этом параграфе рассматриваются подвески и доказывается теорема о порядке (экватора).

§ 5. **Подвески дифференцируемых кривых.** Этот параграф не зависит от остальных, и читатель может его при желании пропустить. В нем дается другое доказательство (с обобщением на кусочно-гладкие кривые) теоремы о порядке. Если подвеска над C^1-гладкой кривой не подразделяется, то неизгибаемость получается очень легко.

§ 6. **Замечания и комментарии.** Здесь приводятся, с одной стороны, несколько безнадежных и, с другой стороны, обнадеживающих направлений возможных будущих исследований.

§ 2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть K — симплициальный комплекс. Мы не будем очень строго придерживаться стандартных обозначений и, следуя Глюку [5], будем рассматривать полиэдр в трехмерном пространстве как отображение из K в R^3, линейное на каждом симплексе комплекса K. Если $v_1, \ldots, v_V$ — вершины K и если $P\colon K \to R^3$ — полиэдр, то P определяется V точками $p_1, \ldots, p_V$, где $P(v_j) = p_j$. Мы будем также рассматривать P как множество V-наборов $p_1, \ldots, p_v$. Всюду дальше комплекс K считается фиксированным.

Если P и Q — два полиэдра, то мы будем говорить, что P и Q конгруэнтны, если в R^3 есть движение, которое переводит множество $p_1, \ldots, p_v$, соответствующее P, в соответствующее Q множество $q_1, \ldots, q_v$. Мы скажем, что P и Q изометричны, если каждое ребро полиэдра P имеет ту же длину, что и соответствующее ему ребро из Q, т. е. если $\langle v_j, v_k\rangle$ есть одномерный симплекс комплекса K, то $|p_j - p_k| = |q_j - q_k|$, где для длины мы используем стандартную евклидову норму, а через $q_1, \ldots, q_v$ обозначаем вершины Q.

[1]) Перевод этого абзаца выполнен с незначительными изменениями, согласованными с автором. — *Прим. перев.*

Следуя Глюку, мы имеем два следующих эквивалентных определения неизгибаемого полиэдра:

Определение 1. Полиэдр P называется *неизгибаемым*, если существует число $\varepsilon > 0$, такое, что любой другой полиэдр Q, изометричный P и находящийся в ε-окрестности P (как отображение или просто в каждой вершине), является конгруэнтным P.

Определение 2. Полиэдр P называется *неизгибаемым*, если в любом непрерывном однопараметрическом семействе (гомотопии) полиэдров P_t с $P_0 = P$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, таком что, P_t изометричен P_0, каждый полиэдр P_t оказывается конгруэнтным P.

Глюк показал, что на самом деле эти два определения эквивалентны. Теперь мы в состоянии сформулировать два варианта гипотезы неизгибаемости (первоначально сформулированной более или менее явно Эйлером [4]).

Сильная гипотеза неизгибаемости. *Пусть тело комплекса K гомеоморфно замкнутому двумерному многообразию, и пусть полиэдр P есть погружение K в R^3. Тогда полиэдр P неизгибаемый.*

Слабая гипотеза неизгибаемости. *Пусть K удовлетворяет вышеприведенным условиям, а P — вложение K в R^3. Тогда полиэдр P неизгибаемый.*

Очевидно, для каждого класса гомеоморфизмов двумерных многообразий мы имеем свою отдельную гипотезу.

Лучшие результаты, которые мы знаем, — это хорошо известные и прекрасные теоремы Коши и Дена, [1] и [3], которые утверждают, что если комплекс K гомеоморфен сфере, а полиэдр P строго выпуклый (без плоских вершин), то P неизгибаемый и в действительности жесткий (по поводу определений см. Глюк [5]; там же имеется прекрасное доказательство этих утверждений).

Также для случая гомеоморфных сфере комплексов K Глюк показал, что почти все полиэдры являются неизгибаемыми (даже независимо от того, погруженные они или нет).

Оба этих результата являются обнадеживающими[1]), однако методы Коши не кажутся допускающими обобщения (об одном исключении см. у Стокера [8]), а методы Глюка (который использует только элементарную алгебраическую геометрию) не кажутся способными отличить погруженные или вложенные полиэдры от произвольных отображений, среди которых имеется много тонких примеров непогруженных изгибаемых полиэдров, даже типа сферы.

Ранее в работе [2] мы показали, что если P — погруженная ортогональная подвеска, то она должна быть неизгибаема. Методы, использованные в [2], оказали некоторое влияние на настоящую работу, однако априори они не зависят друг от друга.

Насколько мы знаем, до сих пор нет никаких примеров, за исключением тривиального случая состыкованных вместе тетраэдров, когда для данного комплекса все его вложения были бы неизгибаемыми полиэдрами. В части II мы даем такой простейший нетривиальный пример — октаэдр[2]).

§ 3. Основные соотношения

Векторное уравнение

В этом параграфе мы получим одно уравнение, которое в дальнейшем окажется чрезвычайно полезным.

Пусть A_1, A_2, A_3 — три вектора в трехмерном пространстве, где A_1 и A_2 не являются коллинеарными с $A_3 \neq 0$. Пусть $A_3{}^{\perp}$ обозначает ортогональное к A_3 пространство, а π обозначает ортогональное проектирование на $A_3{}^{\perp}$. Пусть θ — угол поворота от πA_1 к πA_2. Мы хотим выразить θ через значения шести величин — произведений $A_j \cdot A_k$, $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 3$. На самом деле более удобно найти $e^{i\theta}$. Если смотреть на θ как на двугранный угол между плоскостями, определяемыми соответственно векторами A_1, A_3 и A_2, A_3, то легко видеть, что

$$\cos\theta = \frac{(A_1 \times A_3)\cdot(A_2 \times A_3)}{|A_1 \times A_3|\,|A_2 \times A_3|} = \frac{(A_1 \cdot A_2)(A_3 \cdot A_3) - (A_1 \cdot A_3)(A_2 \cdot A_3)}{|A_1 \times A_3|\,|A_2 \times A_3|},$$

$$(\sin\theta)\frac{A_3}{|A_3|} = \frac{(A_1 \times A_3)\times(A_2 \times A_3)}{|A_1 \times A_3|\,|A_2 \times A_3|} =$$

$$= \frac{((A_1 \times A_3)\cdot A_3)A_2 - ((A_1 \times A_3)\cdot A_2)A_3}{|A_1 \times A_3|\,|A_2 \times A_3|} = \frac{[A_1, A_2, A_3]\,A_3}{|A_1 \times A_3|\,|A_2 \times A_3|},$$

[1]) Мы даем здесь перевод оригинального текста автора от 1974 г. Позже сам автор построил примеры вложенных в E^3 изгибаемых полиэдров, так что обе гипотезы о неизгибаемости полиэдров оказались неверными. — *Прим. перев., сделанное по просьбе автора.*

[2]) Неизгибаемость всех вложений октаэдра была доказана ранее Р. Брикаром [16*]. — *Прим. перев., сделанное по просьбе автора.*

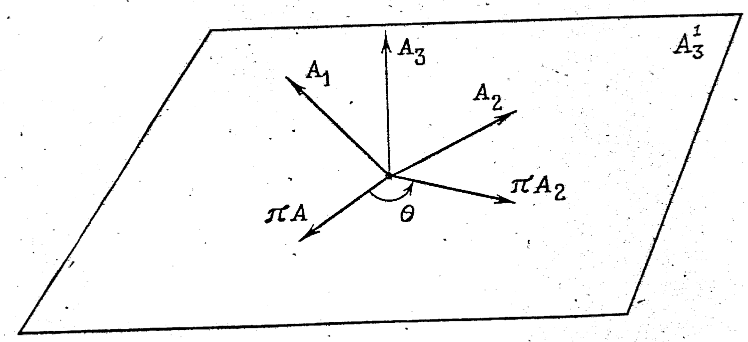

Рис. 1.

где через $[A_1, A_2, A_3]$ обозначено смешанное произведение трех векторов.

Значит,

$$(3.1)\quad e^{i\theta} = \frac{(A_1 \cdot A_2)(A_3 \cdot A_3) - (A_1 \cdot A_3)(A_2 \cdot A_3) + |A_3|\,[A_1, A_2, A_3]\,i}{|A_1 \times A_3|\,|A_2 \times A_3|},$$

где

$$|A_j \times A_3|^2 = (A_j \cdot A_j)(A_3 \cdot A_3) - (A_j \cdot A_3)^2 \quad j = 1,\ 2,$$

и

$$[A_1, A_2, A_3]^2 = [\det(A_1, A_2, A_3)]^2 = \det(A_1, A_2, A_3)\det(A_1, A_2, A_3)^t =$$
$$= \det(A_j \cdot A_k).$$ (^{t} означает транспонирование).

Это соотношение дает искомое выражение $e^{i\theta}$ через $A_j \cdot A_k$.

Определение цепочки ребер

Имея формулу (3.1), мы теперь получим несколько новых формул, которые должны удовлетворяться, если полиэдр P изгибаемый.

Пусть $e_{\pm 1}$, $e_{\pm 2}$, ..., $e_{\pm E}$ обозначают ребра полиэдра P, т. е. $e_j = p_k - p_l$, где $\langle v_k, v_l\rangle$ — соответствующий одномерный симплекс комплекса K. Заметим, что ребра направлены так, что $-e_j = e_k$ для некоторого k (для простоты мы здесь предположим $j = -k$). Мы скажем, что e_j и e_k смежны, если вершины комплекса K, соответствующие e_j и e_k, образуют двумерный симплекс комплекса K. Тогда, в частности, e_j и e_k имеют одну общую вершину и $e_j \pm e_k = e_l$ для некоторого l.

Пусть $\mathscr{C} = \{(j, k)\}$ — конечное подмножество упорядоченных пар отличных от нуля целых чисел, $0 < |j|$, $|k| \leqslant E$. Мы скажем, что $\mathscr{C}$ есть цепочка ребер, если

(i) $\forall j$, j появляется в $\mathscr{C}$ на первом месте упорядоченной пары такое же число раз, что и на втором месте;

(ii) $\forall\,(j, k) \in \mathscr{C}$ ребра e_j и e_k смежны.

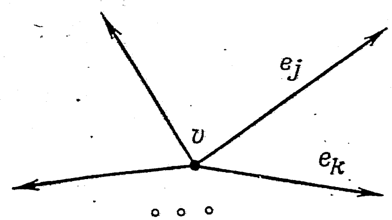

Рис. 2.

Пример

Для нас важнейшим является следующий пример цепочки ребер. Пусть тело комплекса K гомеоморфно двумерному многообразию, и пусть v — какая-либо вершина K. Тогда каждое ребро с вершиной в v является смежным с двумя соседними ребрами, исходящими из той же вершины (здесь мы пренебрегаем знаками). Ориентируем окрестность вершины v. Тогда цепочкой ребер $\mathscr{C}_v$ будет все множество пар (j, k), где e_k получается из e_j при движении по часовой стрелке вокруг v (считаем, что ребра e_j и e_k оба имеют v своей вершиной, см. рис. 2).

Переменные и основное уравнение

Чтобы установить основное уравнение, соответствующее полиэдру, мы сначала выберем произвольный вектор $R \neq 0$. Позже мы определим R в терминах самого полиэдра, однако для получения уравнения он пока будет нужен как вспомогательный вектор.

Переменные, участвующие в уравнении, будут следующие:

$$x \equiv R \cdot R,$$

(3.2) $z_j \equiv R \cdot e_j,$

$y_{jk} \equiv |R|[e_j, e_k, R]\,i$ (здесь e_j и e_k обычно считаются смежными).

В силу (3.1)

$$y_{jk}^2 = -x \det\begin{pmatrix} e_j \cdot e_j & e_j \cdot e_k & z_j \\ e_k \cdot e_j & e_k \cdot e_k & z_k \\ z_j & z_k & x \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Пусть $\mathscr{C}$ — цепочка ребер; π — ортогональное проектирование на перпендикулярную к R плоскость. Тогда, если $\pi e_j \neq 0$ для всех j, определяется угол θ_{jk} между πe_j и πe_k. Имеем

$$e^{i\theta_{jk}} = \frac{\pi e_j}{|\pi e_j|} \cdot \frac{|\pi e_k|}{\pi e_k},$$

если плоскость рассматривается как комплексная плоскость. Значит, согласно (3.1),

(3.4)

$$1 = \prod_{(j,k)\in\mathscr{C}} e^{i\theta_{jk}} = \prod_{(j,k)\in\mathscr{C}} \frac{((R \cdot R)\, e_j \cdot e_k - (R \cdot e_j)(R \cdot e_k) + |R|[e_j, e_k, R]\,i)}{|R \times e_j|\,|R \times e_k|}$$

и с учетом (3.2)

$$\prod_{(j,k)\in\mathscr{C}} (x(e_j \cdot e_k) - z_j z_k + y_{jk}) = \prod_{(j,k)\in\mathscr{C}} (x(e_j \cdot e_j) - z_j^2). \qquad (3.5)$$

Заметим, что между z_l имеются еще линейные соотношения, порожденные линейными соотношениями между e_j (например, каждый треугольник, $e_j + e_k = e_l$, дает соотношение $z_j + z_k = z_l$). Таким образом, мы можем считать, что изометричные полиэдры порождают точки на многообразии, определенном в пространстве переменных (3.2) равенствами (3.3), (3.5) и линейными соотношениями между z_j. Способ образования этого многообразия в некотором смысле противоположен методу, приводящему к многообразию, определяемому квадратными уравнениями, получаемыми из условия сохранения расстояний между соседними (смежными) вершинами.

Уравнение (3.5) является решающим для последующего анализа. По-видимому, оно улавливает локальную информацию намного более четко, чем квадратные уравнения.

Другие переменные

Для последующего перепишем сомножители в (3.4) следующим образом:

(3.6)

$$e^{i\theta_{jk}} = F_{jk} = \frac{(R \cdot R)(e_j \cdot e_k) - (R \cdot e_j)(R \cdot e_k) + |R|[e_j, e_k, R]\,i}{|R \times e_j|\,|R \times e_k|} = \frac{x(e_j \cdot e_k) - z_j z_k + y_{jk}}{\sqrt{x e_j \cdot e_j - z_j^2}\,\sqrt{x e_k \cdot e_k - z_k^2}},$$

где j, k относятся к смежным ребрам. Теперь (3.4) принимает вид

$$\prod_{(j,k)\in\mathscr{C}} F_{jk} = 1. \qquad (3.7)$$

Положим

$$G_{jk} = (R \cdot R)(e_j \cdot e_k)(R \cdot e_j)(R \cdot e_k) = |R|[e_j, e_k, R]\,i = x(e_j \cdot e_k) - z_j z_k + y_{jk}.$$

$$H_j = |R \times e_j| = \sqrt{x(e_j \cdot e_j) - z_j^2}. \qquad (3.8)$$

Тогда (3.5) перепишется в виде

$$\prod_{(j,k)\in\mathscr{C}} G_{jk} = \prod_{(j,k)\in\mathscr{C}} H_j^2, \text{ так как } F_{jk} = \frac{G_{jk}}{H_j H_k}.$$

§ 4. Подвески многоугольников

Определение подвесок

Здесь мы рассмотрим случай простейших нетривиальных примеров полиэдров, которые могут изгибаться, а именно подвески. Пусть комплекс K определен следующим образом: K имеет вершины $v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$, где $v_1, \ldots, v_n$ образуют окружность (вершина v_j смежна с $v_{j+1} (\mathrm{mod}\, n)$, $j = 1, \ldots, n$), а каждая из вершин v_0 и v_{n+1} смежна со всеми вершинами $v_1, \ldots, v_n$. Назовем $P(v_0) = N$ северным полюсом, а $P(v_{n+1}) = S$ — южным полюсом; пусть $P(v_j) = p_j$, $j = 1, \ldots, n$, — вершины экватора. Такой комплекс K называется *подвеской* [1]).

Допустим, что данная нам подвеска P изгибается. Если расстояние между N и S в процессе изгибания остается постоянным, то мы можем считать отрезок $N - S$ дополнительным ребром и P становится тогда совокупностью n тетраэдров, циклично скленных вдоль ребра $N - S$. Легко видеть, что тогда исходная подвеска P или не является погружением двумерной сферы или же она должна быть неизгибаемой. Таким образом, мы предполагаем, что длина $N - S$ при изгибании изменяется.

Определение R и вычисление z_j

Положим $R = N - S$ (вектор R может считаться отличным от нуля). Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{C}_N$ — цепочка смежных ребер $\mathscr{C}_N = \{(j, j+1)\}$, где $e_j = N - p_j$, $j, j+1 = 1, 2, \ldots, n (\mathrm{mod}\, n)$. Тогда применимы формулы (3.4), (3.5) и (3.6). Однако сейчас появятся некоторые специальные соотношения, которые мы и должны получить. Положим $e'_j = p_j - S$. Тогда

$$R = e_j + e'_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$z_j = R \cdot e_j = e_j \cdot e_j + e_j \cdot e'_j, \quad R \cdot R = e_j \cdot e_j + 2e_j \cdot e'_j + e'_j \cdot e'_j = x.$$

Исключая переменные $e_j e'_j$, получим

$$z_j = \frac{1}{2}(x + e_j \cdot e_j - e'_j \cdot e'_j). \tag{4.1}$$

[1]) Таким термином мы переводим английское слово «suspension»; обычно наиболее употребляемый для этого слова термин «надстройка» не кажется нам здесь вполне подходящим, особенно для ассоциированного с этим геометрическим объектом зрительного образа. — *Прим. перев.*

Значит, каждое z_j является линейной функцией от x. Таким же образом и y_{jk}, F_{jk}, G_{jk} и H_j можно рассматривать как функции от x, и так как x при изгибании P изменяется, то соотношения (3.4), (3.5) и (3.6) можно считать тождествами относительно x, и их определения можно распространить на подходящую риманову поверхность комплексного переменного x. Для лучшего понимания этих формул и для будущих ссылок мы сделаем несколько замечаний о свойствах функций F_{jk}.

Корни

Сначала мы опишем корни функций F_{jk}, G_{jk} и H_j геометрически. Заметим, что F_{jk} (и G_{jk}) имеет тот же вид, что и $F_{jk}(G_{kj})$, за исключением слагаемого

$$y_{jk} = -y_{kj}.$$

Так как $\{(j, k), (k, j)\}$ — цепочка, то

$$G_{jk} G_{kj} = H_j^2 H_k^2,$$

так что корни функций G_{jk} находятся среди корней H_j и H_k. Функция H_j^2 является квадратным многочленом от x, и поэтому она имеет самое большее два корня. Пусть $r_j = (|e_j| + |e'_j|)^2$, $r'_j = (|e_j| - |e'_j|)^2$. Когда $|R| = \sqrt{r_j}$ или $|R| = \sqrt{r'_j}$, из определения R легко видеть, что $R \times e_j = 0$. Значит, $r_j \neq r'_j$ — два корня функции H_j^2 (в частности, заметим, что они действительные). Это можно проверить также прямой подстановкой в (3.7). Отсюда

$$H_j^2 = -\frac{1}{4}(x - r'_j)(x - r_j). \tag{4.2}$$

Точки ветвления

Теперь мы найдем точки ветвления функций y_{jk} и G_{jk}. Согласно (3.3), y_{jk}^2 является кубическим многочленом от x (напомним, что z_j и z_k зависят от x линейно) с корнем $x = 0$. Рассмотрим два треугольника, определенные ребрами e_j, e_k и e'_j, e'_k. Заметим, что эти два треугольника определяют общую сторону, скажем $e_{jk} = e_j - e_k (= e'_k - e'_j)$. Как и выше, когда мы определяли корни, мы можем изгибать только эту часть полиэдра, чтобы получить информацию о G_{jk} и y_{jk}. В частности, пусть b_{jk} и b'_{jk} — максимальное и минимальное значения $x = |R|^2$ только для этих двух треугольников. Именно, при $x = b_{jk}$ оба этих треугольника компланарны,

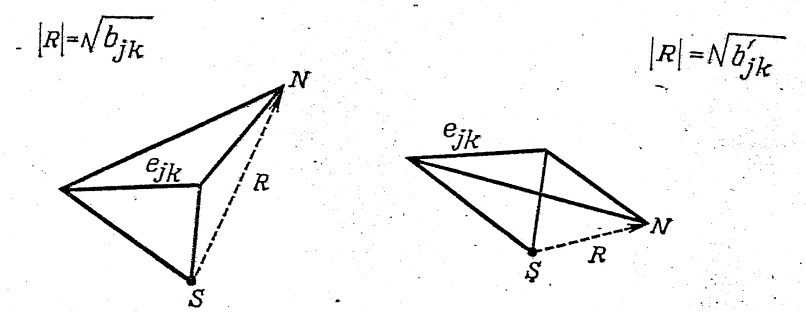

Рис. 3.

причем N и S лежат на противоположных сторонах от линии, определяемой стороной e_{jk}. Аналогично, при $x=b'_{jk}$ точки N и S расположены по одну сторону от этой прямой.

Значит, когда $x=b_{jk}$ или b'_{jk}, то $y_{jk}=|R|[e_j, e_k, R]i=0$, и тем самым корни y^2_{jk} суть 0, b'_{jk}, b_{jk}. (Легко видеть, что 0 является двукратным корнем при $b'_{jk}=0$.) Отсюда

$$y^2_{jk}=\frac{1}{4}e_{jk}\cdot e_{jk}\,x(x-b'_{jk})(x-b_{jk}), \tag{4.3}$$

согласно (3.3), (4.1) и определению $e_{jk}=e_j-e_k$. В частности, b'_{jk}, b_{jk} действительны, неотрицательны и

$$0\leqslant r'_j\leqslant b'_{jk}<b_{jk}\leqslant r_j,$$

так как r'_j и r_j получаются как значения $|R|^2$, когда мы ограничиваемся рассмотрением лишь маленькой части P. Теперь мы видим, что функции G_{jk} и G_{kj} имеют точки ветвления — 0, b_{jk}, b'_{jk}, и каждая из них имеет четыре корня (возможно, кратные) — r'_j, r_j, r'_k, r_k, которые рассматриваются как расположенные на соответствующей двулистной римановой поверхности функций G_{jk} или G_{kj}. Если какая-либо точка является корнем функции G_{jk}, то соответствующая точка на «другом» листе является корнем G_{kj}, но не G_{jk} (если, конечно, корень не совпадает с точкой ветвления).

Порядок экватора

Пусть E — экватор подвески P, и пусть πE — его проекция на $R^{\perp}$ (рассматривая ее как отображение окружности на $R^{\perp}$). Дополнительно предположим, что $\pi(E)\cap O=\varnothing$ (что оправданно, если подвеска P изгибаема). Мы определяем ω как порядок этого отображения (относительно O). Тогда для θ_{jk},

определенных как в § 3 с условием $-\pi<\theta_{jk}<\pi$, имеем

$$2\pi\omega=\sum_{(j,k)\in\mathscr{E}_N}\theta_{jk}.$$

Однако, согласно (3.6),

$$\theta_{jk}=\frac{1}{i}\log F_{jk}, \tag{4.4}$$

где ветвь логарифма выбрана так, что $-\pi<\theta_{jk}<\pi$.

Теорема о порядке экватора

Напомним, что F_{jk} рассматривается как функция от x, так что $\theta_{jk}=\theta_{jk}(x)$ будет аналитической функцией от x с точками ветвления или особенностями в r_j, r'_j, r_k, r'_k b_{jk}, b'_{jk}, которые все являются действительными. Если P изгибается, то сумма

$$\sum_{(j,k)\in\mathscr{E}_N}\theta_{jk}=\frac{1}{i}\sum_{(j,k)\in\mathscr{E}_N}\log F_{jk}=\frac{1}{i}\log\prod_{(j,k)\in\mathscr{E}_N}F_{jk}$$

является постоянной, равной $2\pi\omega$ для всех комплексных x, исключая особенности (которых конечное число). Теперь легко установить следующий замечательный факт.

Теорема 1. *Если подвеска P изгибаема (с непостоянным x), то $\omega=0$.*

Доказательство. Пусть x_0 — некоторое фиксированное значение x во внутренности некоторого действительного интервала, где $x=|R|^2$. Пусть A — путь, начинающийся в x_0 и идущий в ∞ по верхней полуплоскости, имея единственную действительную точку x_0. Мы покажем, что

$$\lim_{x\to\infty}F_{jk}=1$$

где предел берется по пути A. Очевидно,

$$G_{jk}/x^2=\frac{e_j\cdot e_k}{x}-\frac{z_j}{x}\frac{z_k}{x}+\frac{y_{jk}}{x^2}\to-\frac{1}{4},$$

$$H_j^2/x^2=\frac{e_j\cdot e_j}{x}-\left(\frac{z_j}{x}\right)^2\to-\frac{1}{4}$$

независимо от пути. Значит, $H_j/x\to\frac{i}{2}$ и $H_k/x\to\frac{i}{2}$, так как в обоих случаях путь один и тот же. Объединив это все вместе, получаем $F_{jk}\to 1$. Отсюда

$$\lim_{x\to\infty}\log F_{jk}=2\pi i\omega_{jk},$$

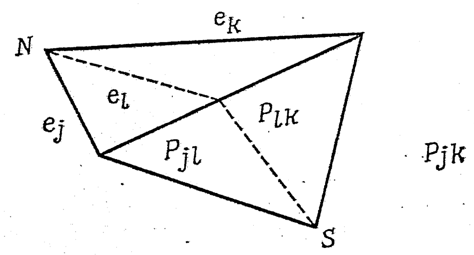

Рис. 4

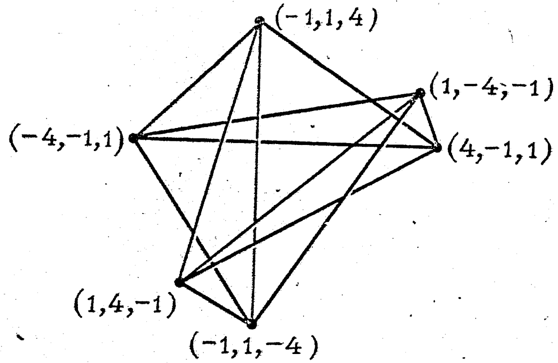

Рис. 5.

где ω_{jk} — некоторое целое число, являющееся некоторым аналогом локального порядка. Ясно, что

$$\sum \omega_{jk} = \omega.$$

Значит, мы получим требуемое, если сумеем показать, что каждое $\omega_{jk} = 0$. Заметим, что определение ω_{jk} зависит только от P_{jk} — части P, которая является подвеской над e_{jk} (а именно с ребрами e_j, e_j', e_k, e_k', e_{jk}), и ω_{jk} определенно не зависит от того, изгибается P или нет $\left(\text{изгибание} \Rightarrow \sum_{(j,\,k)\in\mathscr{E}_N} \omega_{jk} = \omega\right)$

Это наблюдение является ключевым. После него уже можно было бы выбрать подходящий путь A и аккуратно вычислить, что $\omega_{jk} = 0$. Однако вместо этого мы заметим, что функция ω_{jk} сама есть непрерывная функция от длин e_j, e_k, e_k', e_k', e_{jk} $\left(e_j \cdot e_k = \frac{1}{2}\left(e_{jk} \cdot e_{jk} - e_j \cdot e_j - e_k \cdot e_k\right)\right)$ в предположении непрерывности выбора знака y_{jk}. Значит, если мы деформируем подвески над e_{jk} непрерывно в пределах полиэдра, то ω_{jk} остается постоянной. Предположим теперь, что значение x_0 остается фиксированным при деформации, так что предел

вдоль A определен. Проведем подразделение части P_{jk}, выбрав точку во внутренности дуги, соответствующей e_{jk}. Скажем, новое ребро из северного полюса есть e_l (так что $P_{jk} = P_{jl} \cup P_{lk}$). Из сделанного выше замечания следует, что так как P_{jl} и P_{lk} деформируются в P_{jk}, то $\omega_{jl} = \omega_{lk} = \omega_{jk}$ и, кроме того, $\omega_{jl} + \omega_{lk} = \omega_{jk}$, а значит, $\omega_{jk} = 0$. (По-другому, можно было бы продеформировать e_j в e_k, и так как $\theta_{kk} = 0$, то получили бы $\omega_{jk} = \omega_{kk} = 0$.) (См. рис. 4.)

Следствие 1. *Если подвеска P вложена в пространство так, что прямая NS расположена вне P, то подвеска неизгибаема.*

Октаэдр

Заметим, что при $n = 4$ мы можем смотреть на октаэдр как на подвеску с полюсами в любой из трех его пар несмежных вершин. Таким образом, естественно надеяться, что если октаэдр вложен, то по крайней мере одна из его диагоналей проходит внутри. (Это равносильно тому, что триангуляция поверхности может быть продолжена внутрь без добавления новых вершин.) К сожалению, оказывается, что эта надежда неоправданна, как это можно видеть на рис. 5. Позже, в ч. II, мы проведем более детальное изучение октаэдров и там докажем, что все вложенные октаэдры неизгибаемы.

§ 5. Подвески дифференцируемых кривых

В этом параграфе мы исследуем ситуацию, которая в каком-то смысле является обобщением предыдущего результата и которая более основательно представляет несколько отличную (более классическую) точку зрения. Однако мы здесь придерживаемся той же идеи, что путь к доказательству неизгибаемости лежит в получении формулы, которая должна удовлетворяться, если поверхность изгибается, а затем продолжением переменных прийти к специальной (геометрической) информации о параметрах, использованных для этой формулы. В этом случае формула отличается (логарифмом) от предыдущей формулы в виде произведения и способ описания внутренних параметров тоже другой.

Помимо всего прочего, мы оказываемся в любопытной аномальной ситуации, которая обязывает нас быть очень аккуратными с нашим определением неизгибаемости. Именно, если мы определим C^1-подвеску естественным образом, то для нее слишком легко иметь свойство быть неизгибаемой. Так как поверхность вначале только «кусочно-гладкая», кажется естественным разрешать «подразделение» в определении неизгибаемости в нашем классе, и это в действительности оказывается имеющим смысл (хотя некоторые поверхности могут все еще быть неизгибаемыми скорее по причинам C^1-гладкости, чем по более собственно «геометрическим» причинам). С этим более подходящим определением мы получаем результат, обобщающий теорему 1; именно, экватор имеет нулевой порядок относительно оси север — юг, и в действительности это дает и другое доказательство теоремы 1.

Определение C^1-подвески

Пусть Y': $S^1 \to \mathbb{R}^3$ — отображение C^1-гладкости и $N, S \in \mathbb{R}^3$ — две точки, которые мы назовем соответственно северным и южным полюсом. Пусть Y: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ — периодическое отображение, определяющее Y' и параметризованное длиной дуги. Поверхность (образ поверхности), полученная объединением всех отрезков от N к $Y(s)$ и от S к $Y(s)$, называется *C^1-подвеской* Σ, ассоциированной с Y, N и S. *Изгибанием* подвески Σ (или, точнее, совокупности Y, N, S) называется гомотопия Y_t, $N(t)$, $S(t)$, такая, что $Y_0 = Y$, $N(0) = N$, $S(0) = S$, причем $Y_t \in C'$ для каждого фиксированного t $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon)$ и $Y_t(s) - N(t)$ и $Y_t(s) - S(t)$ постоянны для каждого фиксированного s. Кроме того, мы требуем, чтобы длина каждой дуги от $Y_t(s_0)$ к $Y_t(s_1)$ вдоль кривой, определенной отображением Y_t, оставалась постоянной для всех фиксированных s_0, s_1. Мы считаем кривую Y параметризованной длиной дуги, так что $\dot{Y} \cdot \dot{Y} = \frac{dY}{ds} \cdot \frac{dY}{ds} = 1$ и s есть параметр, использованный выше в $Y_t(s) - S(t)$, и т. д.

Заметим, что это определение не принимает во внимание некоторые виды изгибаний, которые можно было бы рассмотреть. Именно, если Y — окружность, лежащая в плоскости, проходящей через N и S, то мы можем изгибать Σ вдоль образующих, параллельных прямой NS. Это изгибание, однако, не сохраняет свойство Σ быть подвеской[1]), и по-видимому, если Y не лежит в такой плоскости (что должно быть, если подвеска Σ погружена), то любое «разумное» определение изгибания должно сохранять Σ как подвеску, а в случае погруженных Σ оно должно совпадать с нашим определением изгибания.

---

[1]) Так как при вращении кругового сегмента вокруг его основания «образующие» Y_tN и Y_tS будут ломаными, состоящими из двух отрезков. — *Прим. перев.*

Определение кусочно-C^1-гладкой подвески и неизгибаемость

Как уже указывалось выше, требование, что $Y(s)$ всегда остается C^1-гладкой, оказывается слишком ограничительным, так что с теми же самыми понятиями, введенными выше, мы назовем подвеску Σ (ассоциированную с Y, N, S) *кусочно-C^1-гладкой*, если для конечного числа точек $s_0 < s_1 < \ldots < s_n = s_0 + L$, где L — длина $Y'(S^1)$, ограничение Y на $[s_j, s_{j+1}]$ является C^1-гладким. (Производная слева в точке s_j может не совпадать с производной справа в s_j.)

Как и раньше, мы определим изгибание подвески Σ как гомотопию Y_t, $N(t)$, $S(t)$ с постоянными образующими, только от Y_t теперь требуется гладкость класса C^1 лишь на каждом $[s_j, s_{j+1}]$. Заметим, что полиэдральные подвески включаются сюда как частный случай и в действительности оказывается, что определение изгибания в этом случае эквивалентно прежнему.

Мы можем считать Y, S, N определяющими образ поверхности, гомеоморфной двумерной сфере S^2 в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим вопрос, в каких случаях подвеска Σ будет неизгибаемой, т. е. когда каждое изгибание Σ сводится к движению в $\mathbb{R}^3$ (к конгруэнтности). Довольно удивительно, что в C^1-классе практически каждое отображение неизгибаемо. Но есть C^1-отображения Y, такие, что если их рассматривать в классе кусочно-C^1-гладких отображений, то они оказываются изгибаемыми.

Переменные

Мы будем изучать одновременно оба случая. Как и раньше, положим $R = N - S$. Пусть $X(s)$ (или $X_t(s)$) — ортогональная проекция $Y(s)$ (или $Y_t(s)$) на перпендикулярную к R плоскость. Пусть $x = |R|^2 = R \cdot R$, $l_N(s) = |N - Y(s)|^2$, $l_S(s) = |S - Y(s)|^2$; l_N и l_S остаются постоянными в процессе изгибания. Чтобы не усложнять обозначений, без потери общности можно предположить, что $S = 0$ (для всех t).

Угол поворота и порядок кривой

Пусть s' и s'' — две точки в области задания Y. Пусть $\theta_{s', s''}$ обозначает угол (если он имеет смысл) от $X(s')$ до $X(s'')$ в $R^{\perp}$. Легко видеть, что если $X \neq 0$ для $s \in (s', s'']$, то (ср. Стокер [7]).

$$\theta_{s', s''} = \int_{s'}^{s''} \varepsilon(s) \left| \frac{d}{ds} \left(\frac{X}{|X|} \right) \right| ds, \tag{5.1}$$

где

$$\varepsilon(s)=\begin{cases} +1, \text{ если } \det\left(\begin{matrix} X \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{X}{|X|}\right)\end{matrix}\right)>0, \\ -1, \text{ если } \det\left(\begin{matrix} X \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{X}{|X|}\right)\end{matrix}\right)<0, \\ 0, \text{ если } \det(\text{—„—})=0. \end{cases}$$

Отметим, что $\theta_{s',s''}$ непрерывно зависит от s', s'' (даже в кусочно-C^1-гладком случае), хотя подынтегральное выражение только кусочно-непрерывно.

Простое вычисление дает

$$\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{X}{|X|}\right)\right|^2=\frac{(X\cdot X)(\dot X\cdot\dot X)-(X\cdot\dot X)^2}{(X\cdot X)^2},$$

так что

$$\theta_{s',s''}=\int_{s'}^{s''}\frac{\sqrt{(XX)(\dot X\dot X)-(X\dot X)^2}}{X\cdot X}\,ds, \tag{5.2}$$

где корень принимает значения подходящего знака и точка наверху указывает на дифференцирование по s.

Заметим, что если Σ — полигональная подвеска из предыдущего раздела и s_j соответствуют вершинам экватора, тогда перенумерацией, при которой $k=j+1$, согласно (4.4), получим

$$\frac{1}{i}\log F_{jj+1}=\theta_{jj+1}=\theta_{s_js_{j+1}}=\int_{s_j}^{s_{j+1}}\frac{\sqrt{(X\cdot X)(\dot X\cdot\dot X)-(X\cdot\dot X)^2}}{X\cdot X}\,ds.$$

Значит, мы пришли снова к тому же выражению, что и раньше, только другим путем.

Мы замечаем, что $\theta_{s's''}$ есть просто поворот (подъем) отображения $\frac{X}{|X|}$, так что ω, порядок X, будет равен (если $X\neq 0$)

$$\omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^L\frac{\sqrt{(X\cdot X)(\dot X\cdot\dot X)-(X\cdot\dot X)^2}}{X\cdot X}\,ds. \tag{5.3}$$

Таким образом, наша задача теперь ясна. Мы должны выразить произведения $X\cdot X$, $X\cdot\dot X$, $\dot X\cdot\dot X$ через $x=|R|^2$, l_N и l_S. Когда это будет сделано, мы сможем показать, что $\omega=0$, если подвеска Σ изгибается нетривиальным образом.

Вычисление X, $X\cdot X\cdot\dot X\cdot\dot X$, $\dot X$

Заметим, что $X=Y-\frac{RY}{x}R$ (напомним, что $S=0$), и $R=Y+Z$, $Z=N-Y$. Значит, для l_S и l_N, квадратов длин образующих, соответственно имеем $Y\cdot Y=l_S$, $Z\cdot Z=l_N$. Таким же вычислением, что и в 4.1 («поляризационное» тождество) получаем

$$R\cdot Y=\frac{1}{2}(x+l_S-l_N),$$

$$X=Y-\frac{1}{2x}(x+l_S-l_N)R,$$

$$\dot X=\dot Y-\frac{1}{2x}(\dot l_S-\dot l_N)R,$$

$$R\cdot\dot Y=\frac{1}{2}(\dot l_S-\dot l_N),$$

$$X\cdot X=l_S-\frac{1}{2x}(x+l_S-l_N)^2+\frac{1}{4x}(x+l_S-l_N)^2= -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}(l_S+l_N)-\frac{1}{4x}(l_S-l_N)^2. \tag{5.4}$$

Дифференцируя, имеем

$$X\cdot\dot X=\frac{1}{4}(\dot l_S+\dot l_N)-\frac{1}{4x}(l_S-l_N)(\dot l_S-\dot l_N). \tag{5.5}$$

Аналогично

$$\dot X\cdot\dot X=1-\frac{1}{2x}(\dot l_S-\dot l_N)^2+\frac{1}{4x}(\dot l_S-l_N)^2 =1-\frac{1}{4x}(\dot l_S-\dot l_N)^2 \text{ (напомним, что } \dot Y\cdot\dot Y=1). \tag{5.6}$$

Заметим, что если мы будем смотреть на l_S и l_N как на постоянные, то все скалярные величины в вышеприведенных формулах будут рациональными функциями от x.

Неизгибаемость при постоянном x

Допустим, что Σ изгибается (в кусочно-C^1-гладком смысле) с постоянным значением $|N-S|$. Пусть $[s',s'']$ — сегмент, где $X\neq 0$. Тогда, если мы зафиксируем, скажем, s', а s'' будем варьировать, то угол $\theta_{s',s''}$ определяется формулой (5.2) и поэтому должен оставаться постоянным в процессе изгибания (так как $\varepsilon(s)$ постоянен). Значит, подвеска над целым сегментом $[s,s'']$ должна оставаться неизгибаемой. Если на экваторе имеется самое большее одна точка, для которой $X=0$, то вся подвеска должна быть неизгибаемой, т. е.

все ее изгибания сводятся к движению. Если $X(s)=0$ более чем в двух точках, то тогда ясно, что Σ не является погружением или в N или в S[1]). Таким образом, мы имеем следующее предложение:

Предложение 1. *Если кусочно-C^1-гладкая подвеска Σ погружена в R^3, то она не допускает изгибаний с постоянным расстоянием $|N-S|$ между северным и южным полюсами.*

В силу этого дальше мы предполагаем, что x в процессе изгибания изменяется (и в действительности x будет параметром изгибания).

Корни произведения $X \cdot X$

Как и в § 4, мы можем изгибать часть Σ, чтобы получить желаемую информацию о параметрах. В нашем случае мы видим, что $X=0$ только тогда, когда радиус-вектор Y параллелен R, и это бывает только при

$$x=(\sqrt{l_S}-\sqrt{l_N})^2=r_1 \quad \text{или} \quad (\sqrt{l_S}+\sqrt{l_N})^2=r_2.$$

Значит с учетом (5.4)

$$X \cdot X=\frac{1}{4x}(x-r_1)(x-r_2), \tag{5.7}$$

что можно было бы проверить и непосредственно.

Таким образом, если Σ изгибается, то значение x должно быть по крайней мере между $\max_s r_1(s)$ и $\min_s r_2(s)$. Значит, если x изменяется, мы можем считать, что $\dot{X} \neq 0$ в процессе изгибания.

Заметим также, что (5.7) определяет некоторую функцию от x для всех комплексных x, исключая r_1 и r_2. Мы сейчас применим такую же процедуру к $(X \cdot X)(\dot{X} \cdot \dot{X})-(X \cdot \dot{X})^2$ и затем определим $\omega(x)$ для почти всех комплексных x и, действуя, как в § 4, вычислим $\omega(x)$ при изгибании Σ с параметром x.

Корни $(X \cdot X)(\dot{X} \cdot \dot{X})-(X \cdot \dot{X})^2$

Здесь тоже есть аналогия с точками ветвления, рассмотренными в § 4. Если, однако, кривая Y не является кусочно-линейной, то у нас не будет изгибаемой подвески над сегментом, как это было в § 4, наличие которой помогло найти нули. Вместо этого мы проведем к Y касательную и будем изгибать

[1]) Или в тех точках экватора, в которых $X(s)=0$ (если $X(s)=0$ ровно в двух точках). — *Прим. перев.*

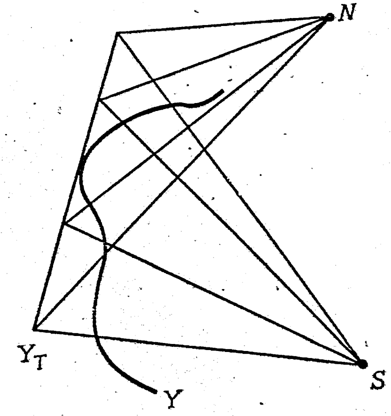

Рис. 6.

подвеску над касательной. Тогда мы увидим, что для подвески над кривой функция $(X \cdot X)(\dot{X} \cdot \dot{X})-(X \cdot \dot{X})^2$ всегда будет иметь два корня, лежащие между r_1 и r_2.

Положим $E(x)=(X \cdot X)(\dot{X} \cdot \dot{X})-(X \cdot \dot{X})^2$. Тогда из (5.4), (5.5), (5.6) имеем

$$E(x)=\frac{1}{4}x+a+\frac{b}{x}, \tag{5.8}$$

где

$$a=-\frac{1}{4}\dot{l}_S\dot{l}_N+\frac{1}{2}(l_S+l_N),$$

$$b=-\frac{1}{4}(l_S-l_N)^2-\frac{1}{8}(l_S+l_N)(\dot{l}_N-\dot{l}_S)^2+\frac{1}{8}(l_S-l_N)(\dot{l}_S^2-\dot{l}_N^2).$$

Значит, $xE(x)$ является квадратным многочленом с двумя корнями, которые, как мы сейчас покажем, различны и действительны. Здесь снова, по-видимому, можно было бы дать готовую формулу как в (5.7) (с добавлением нескольких простых свойств, отражающих свойства l_N и l_S, связанные с подвеской), однако мы укажем геометрические рассуждения, которые быстрее приведут к утверждаемому свойству корней.

Зафиксируем значение $s=s'$ и рассмотрим касательную в точке $Y(s')$ (рис. 6). Пусть $Y_T(s)$ обозначает касательную, так что $Y_T(s')=Y(s')$, $\dot{Y}_T(s')=\dot{Y}(s')$. Пусть $l_{NT}(s)=|N-Y_T(s)|^2$, $l_{ST}(s)=|S-Y_T(s)|^2$. Легко вычислить, что

$$l_{PT}(s)=l_P(s')-\frac{1}{4}\dot{l}_P(s')^2+\left(s-s'+\frac{1}{2}\dot{l}_P(s')\right)^2, \quad P=N,\ S$$

($l_{PT}(s')=l_P(s')$, $\dot{l}_{PT}(s')=\dot{l}_P(s')$; эта формула легко проверяется для прямой, и произведения $R \cdot \dot{Y}$, $Y \cdot \dot{Y}$, $\dot{Y} \cdot \dot{Y}$, которые определяют $\dot{Y}$, выражаются через l_P, $\dot{l}_P$, $P=N, S$).

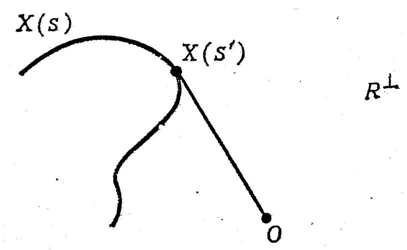

Рис. 7.

Таким образом, мы видим, что значение $E(x)$ в точке s' то же самое для Y, что и для Y_T, независимо от x. Изгибая N, S, Y_T, как в § 4, мы видим, что $E(x)$ имеет два действительных корня между корнями $X \cdot X$. Напомним, что если b_1 и b_2 — корни функции $xE(x)$, то $b_1(s) < b_2(s)$ ($b_1 = b_2$, только когда N или S находится на Y). Тогда

$$E(x) = -\frac{1}{4x}(x - b_1)(x - b_2),$$

где $r_1 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant r_2$. Значит,

$$\max_{s \in [s_j, s_{j+1}]} b_1(s) \leqslant x \leqslant \min_{s \in [s_j, s_{j+1}]} b_2(s). \tag{5.9}$$

Эти формулы дают довольно полное алгебраическое описание подынтегрального выражения в (5.3).

C^1-подвески и локальная неизгибаемость

Пусть нам дана C^1-гладкая подвеска Σ и требуется исследовать ее C^1-неизгибаемость. Мы предполагаем, что $N \neq S$. Рассмотрим три случая.

Случай 1 («крылья бабочки»). При двух значениях $s' \neq s''$ точки $Y(s')$ и $Y(s'')$ находятся на прямой NS и $\dot{Y}(s')$, $\dot{Y}(s'')$ параллельны R. В этом случае легко видеть, что Σ изгибается (в C^1-классе) с постоянным x, а именно фиксируется часть подвески от s' до s'', а оставшаяся ее часть от s'' до s' вращается (s' и s'' рассматриваются как точки на ориентированной окружности).

Случай 2. Существует точка s', в которой $Y(s') = N$ или S. Выше было указано, что в этом случае $b_1(s') = b_2(s'')$ и $E(x) \leqslant 0$ с достижением равенства только для одного значения x. Таким образом, если Σ изгибается, то изгибание происходит с постоянным x.

Случай 3. Существует точка s', для которой в любой ее окрестности $U_{s'}$ знак $\varepsilon(s)$ непостоянен (например, $\theta_{s's''}$ имеет в s' относительный максимум или минимум) и $\dot{X}(s') = 0$ (см. рис. 7). В этом случае мы покажем, что подвеска Σ локально неизгибаема в s' в C_1-классе гладкости. Очевидно, что если значение x постоянно, то подвеска в окрестности s' неизгибаема.

Из наложенных условий следует, что вектор $\dot{X}(s')$ параллелен $X(s')$. Значит, $E(x) = 0$ в s', и отсюда $x = b_1(s')$ или $x = b_2(s')$. Пусть $x = x_0$ — отправное значение x при изгибании. Согласно предыдущему, мы предполагаем, что x в процессе изгибания изменяется. Так как $\varepsilon(s)$ изменяет свой знак в окрестности $U_{s'}$ точки s', то при значении x_1, достаточно близком к x (с подходящей стороны), $\varepsilon(s)$ все еще меняет свой знак в $U_{s'}$. Значит, существует другая точка s'' в $U_{s'}$, такая, что для s'' и $x = x_1$ имеет место случай 3. Это означает, что $x_1 = b_1(s'')$ или $x_1 = b_2(s'')$, что невозможно, так как тогда значение x_0 не находилось бы с «нужной» стороны от x_1 (т. е. x_0 нарушало бы неравенство (5.9))[1]. Таким образом, значение x должно оставаться постоянным при изгибании, и поэтому окрестность точки s' неизгибаема в C^1-классе.

Обратим внимание, как существенно здесь использовано требование C^1-гладкости.

Подведем итог.

Теорема 2. *Пусть подвеска Σ является C^1-гладкой. Тогда если*

(a) *или расстояние $|N - S| = x$ остается постоянным и $X(s) = 0$; $\dot{X}(s) = 0$ самое большее для одного значения s (т. е. случай 1 исключается).*

(b) *или $\dot{X}(s) \neq 0$ для всех s и $\omega = 0$, то подвеска Σ является неизгибаемой в C^1-классе.*

Доказательство. Для доказательства (а)[2] мы должны только распространить предложение 1 на случай $X(s_0) = 0$, $\dot{X}(s_0) \neq 0$ для некоторого значения $s_0 \neq s$. Однако здесь ясно, что если θ_s обозначает аргумент $\frac{d}{ds}\left(\frac{X}{|X|}\right)$, то $\theta_{s''s'} = \theta_{s''} - \theta_{s'}$ и $\lim_{s' \to s_0^+} \theta_{s'} = \pi - \lim_{s' \to s_0^-} \theta_{s'}$. Значит, мы можем вычислить $\theta_{s's''}$

---

[1] Надо иметь в виду, что $b_1 < b_2$, и поэтому, если в начале, например, было $x_0 = b_1(s')$, то при малом изгибании x_1 не может равняться $b_2(s'')$, а значит, $x_1 = b_1(s'')$. — *Прим. перев.*

[2] По сравнению с оригиналом в приводимое здесь доказательство части (а) автором внесено некоторое улучшение изложения. — *Прим. перев.*

с обеих сторон от s_0, а тогда можно применить доказательство предложения 1.

Для части (b) мы просто заметим, что если $\omega = 0$, то или по крайней мере для двух точек будет иметь место случай 3, или вектор $\frac{X}{|X|}(s)$ постоянен (тогда, очевидно, подвеска Σ неизгибаема), или есть две точки $s' < s''$, такие, что $\frac{X}{|X|}(s)$ сохраняет постоянное значение в точках $s' \leqslant s \leqslant s''$, а $\varepsilon(s)$ меняет знак в $(s' - \delta, s'' + \delta)$ для произвольно малых δ. В этом последнем случае применимо рассуждение, подобно проведенному при рассмотрении случая 3, и оно даст C^1-неизгибаемость Σ над дугой $(s' - \delta, s'' + \delta)$.

Интересно сравнить этот случай с ситуацией, описанной Сабитовым для бесконечно малых изгибаний «гофрированных» поверхностей [6].

Теорема о порядке экватора

Предположим, что обе функции $E(x)$ и $X \cdot X$ отличны от нуля на сегменте $[s', s'']$. Учитывая (5.2), (5.4), (5.5) и (5.6), мы можем считать $\theta_{s's''} = \theta_{s's''}(x)$ функцией от x для любого комплексного x, за исключением действительных x из промежутков $(-\infty, \max_s B_1(s)]$, $[\min_s B_2(s), \infty)$. Легко убедиться, что это определение превращает $\theta_{s's''}(x)$ в аналитическую функцию от x.

Допустим, что кусочно-C^1-гладкая подвеска Σ изгибается с переменным значением x. Тогда из (5.9) видно, что для

$$s_j \leqslant s \leqslant s_{j+1}, \quad \max_{s \in [s_j, s_{j+1}]} b_1(s) < x < \min_{s \in [s_j, s_{j+1}]} b_2(x),$$

$E(x) \neq 0$, $X \cdot X \neq 0$, так что $\varepsilon(s)$ — постоянного знака. Значит, к $\theta_{s_j s_{j+1}}(x)$ можно применить метод предыдущего параграфа. Пусть A — путь, ранее указанный для x, который начинается в некоторой действительной точке и уходит в ∞. Пусть $\theta_{s_j s_{j+1}}(\infty) = \lim_{x \to \infty} \theta_{s_j s_{j+1}}(x)$. Из (5.4) и (5.8) видим, что подынтегральное выражение в (5.2) при $x \to \infty$ будет порядка $x^{-\frac{1}{2}}$. Значит, $\theta_{s_j s_{j+1}}(\infty) = 0$. Однако из (5.3) имеем, что сумма $2\pi\omega = \sum_j \theta_{s_j s_{j+1}}(x)$ остается постоянной для всех x из области определения θ, так как она постоянна на действительном интервале. Значит, $\omega = 0$. Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть кусочно-гладкая подвеска Σ изгибается с переменным значением x. Тогда порядок ω экватора относительно прямой, проходящей через полюсы подвески, равен нулю.*

Отметим, что теорема 3 в случае кусочно-гладкой подвески Σ сводится к теореме 1.

Следствие 2. *Если подвеска Σ является C^1-гладко погруженной в R^3, то она C^1-неизгибаема.*

Доказательство: Если Σ изгибается с постоянным x, то тогда возможен только случай 1 — «крылья бабочки». Но в этом случае Σ определенно не является погруженным. Если же Σ изгибается с переменным x, то мы можем считать, что $X(s) \neq 0$ для всех s, а так же, что $E(x) \neq 0$. Тогда из теоремы 3 следует, что $\omega = 0$, а по теореме 2(b) подвеска Σ неизгибаема в C^1-классе. Пришли к противоречию.

Разбиения подвески и один пример

Нам кажется, что понятие C^1-гладкой подвески в чем-то является ограничительным и что для изучения ее неизгибаемости следовало бы разрешать разбивать экватор по крайней мере в конечном числе точек. Грубо говоря, если $\varepsilon(s)$ меняет знак в s', а s' не является одной из точек разбиения, то подвеска Σ становится неизгибаемой в окрестности s', так как x не может изменяться. Если же мы включим s' в число точек разбиения, то ситуация изменится и Σ, может быть, станет изгибаемой или, может быть, останется неизгибаемой. Таким образом, разумно требовать, чтобы каждую точку s', в которой $\varepsilon(s)$ меняет знак, мы считали точкой разбиения (т. е. s' = некоторому s_j). (Однако для данной кривой Y может случиться, что она имеет бесконечное множество таких точек s', и тогда этим способом невозможно будет описать Y как кусочно-C^1-гладкую подвеску с конечным числом гладких участков.) Заметим, что это более или менее есть ответ на предположение работы [2]. Ясно, что описанная там подвеска с кривой Y будет изгибаться, если сделаем разбиение по всем s', а в противном случае она будет неизгибаемой.

Если построить из бумаги модель, соответствующую ситуации случая 3, и попытаться ее изгибать (модель строится только для окрестности s'), то на модели внезапно появляется сгиб, вдоль которого затем происходит изгибание.

Может быть, ситуацию случая 3 поможет прояснить следующий пример. Пусть Y — кривая в плоскости, перпендикулярной к $N - S = R$ и расположенной между N и S, и пусть в точке s' имеет место случай 3, когда $\theta_{s''s}$ достигает в точке s' своего минимума. Часть подвески Σ, соответствующую полуокрестности $s \geqslant s'$ точки s', отобразим зеркально отно-

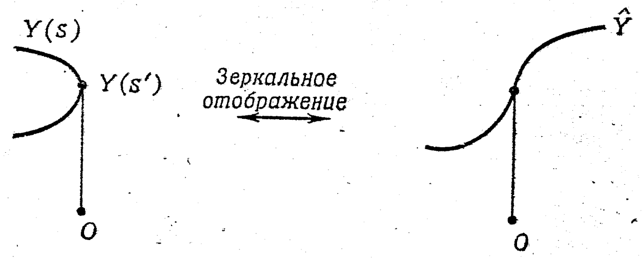

Рис. 8.

После изгибания

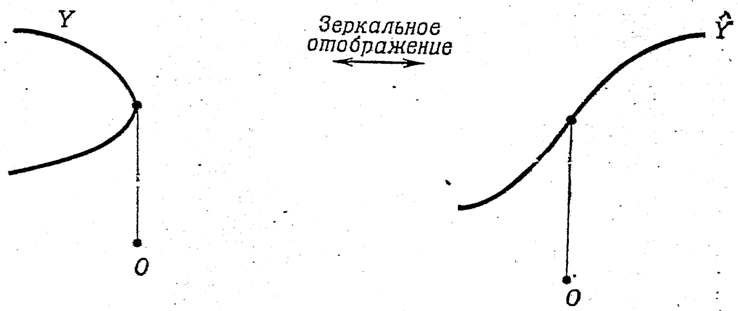

Рис. 9.

сительно плоскости, проходящей через N, S и $Y(s')$, и получим новую кривую $\hat{Y}$. Полученную новую подвеску можно изгибать с уменьшением расстояния $x = |N - S|$. Однако касательная $\dot{\hat{Y}}(s') = \dot{X}(s')$ уже перестанет быть параллельной $X(s')$, и если мы отразим подвеску обратно относительно плоскости, проходящей через $Y(s')$, N и S, то касательная $\dot{Y}(s')$ уже не будет определена: в точке s' образуется сгиб подвески (см. рис. 8 и 9).

§ 6. Замечания и комментарии

Пока мы еще не доказали, что вложение любого полиэдра (даже октаэдра) неизгибаемо. Как и в случае классической теории, нам пришлось наложить дополнительные условия на вложения или отображения. Это, конечно, нас не удовлетворяет, но для рассмотренных здесь случаев (полигональные подвески) мы значительно обобщили классический результат о выпуклых полиэдрах (имеются в виду только вопросы неизгибаемости).

P_7, P_2
P_1P_4 симметричны относительно оси y
OP_7 делит пополам P_1OP_5
$\angle P_2P_3P_4 = \angle P_7P_6P_5$
$|OP_6| = |OP_3|$
$P_7P_5P_4$ коллинеарны

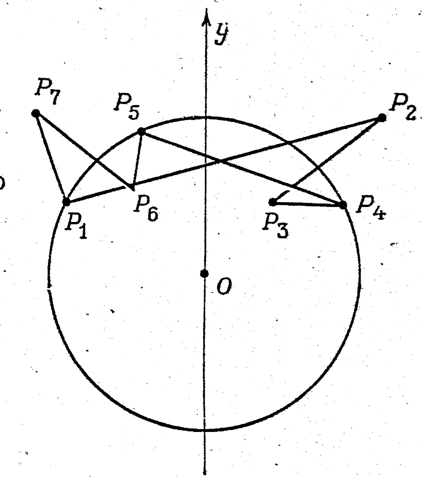

Рис. 10.

Порядок касательной к кривой

Прежде чем закончить ч. I, мы думаем, что здесь весьма удобно упомянуть о некоторых результатах (без доказательства) и высказать несколько идей, которые могут оказаться полезными, даже если они и покажутся безнадежными.

Понятие порядка касательной к кусочно-гладкой плоской кривой известно уже довольно давно. (Это есть в точности степень касательного вектора, возникающая при отображении S^1 в S^1, с соответствующими уточнениями для скачков в вершинах, см. [9].) Пусть Σ — подвеска, а τ — порядок касательной к проекции экватора на плоскость, перпендикулярную к оси подвески, проходящей через ее полюсы.

Теорема. *Если подвеска Σ погружена в R^3, то $\tau = \pm 1$.*

Таким образом, если бы мы могли доказать, что для изгибаемых подвесок (скажем, с переменным x) $\tau \neq \pm 1$, то тем самым для любой погруженной подвески была бы получена теорема об ее неизгибаемости. К сожалению, эта гипотеза неверна даже для кусочно-линейных ортогональных подвесок [2]. На рис. 10 показана плоская кривая, которая удовлетворяет условию F [1]), а, значит, ее ортогональная подвеска изгибается, но для нее $\tau = 1$.

Если искать контрпример к гипотезе неизгибаемости, то он должен быть по крайней мере в классе подвесок, типичный представитель которых похож на подвеску, определяемую кривой на рис. 10.

[1]) Из работы [2]. — *Прим. перев.*

Идеи об общей задаче

Ясно, что для общей задачи о неизгибаемости полиэдров нужно что-то больше. Однако мы полагаем, что уравнения из § 3 могут служить отправной точкой для полного доказательства. К сожалению, в настоящее время кажется трудным даже высказать подходящие предположения. Самое большее, что мы теперь можем, — это описать, как можно было бы модифицировать уравнения для общей ситуации и указать только весьма общее направление поисков, которое, несомненно, должно быть уточнено[1].

Сначала нужно выбрать некоторую точку O, назовем ее началом, причем этот выбор нужно сделать каким-то специальным образом в зависимости от положения точек p_j.

Затем рассмотрим нормирующее отображение $n\colon P \to S^2$, определяемое по формуле $n(p)=\frac{p}{|p|}$. Теперь мы хотим вычислить степень отображения n, исходя из внутренней и внешней информации. Именно, пусть $x_j = |p_j|^2$, и пусть p_j, p_k, p_l — вершины треугольника (2-симплекса) на P. Обозначим через $\theta_{j;k,l}$ угол между геодезическими на S^2, соединяющими $n(p_k)$ и $n(p_l)$ с $n(p_j)$. Тогда из анализа, проведенного в § 3, имеем

$$e^{i\theta_{j;k,e}}=\frac{(p_k\cdot p_l)\cdot(p_j\cdot p_j)-(p_j\cdot p_k)(p_j\cdot p_l)+|p_j|[p_k,p_l,p_j]\,i}{|p_j\times p_k||p_j\times p_l|},$$

где все переменные могут быть выражены через x_j, x_k, x_l и длины ребер. Алгебраическая площадь сферического треугольника с вершинами в $n(p_j)$, $n(p_k)$, $n(p_l)$ равна $\theta_{j;k,l}+\theta_{k;l,j}+\theta_{l;j,k}-\pi=\theta[j,k,l]$. Значит, $e^{i\theta[j,k,l]}$ можно выразить через значения x_j, x_k, x_l и длины ребер. Таким образом, мы придем к формуле, аналогичной (3.4). Кроме того, беря $R=p_j$, мы, как и раньше, получим формулу, соответствующую каждой вершине p_j. Эти формулы вместе должны дать некоторую внутреннюю и внешнюю информацию о полиэдре P при его изгибании. Внешняя информация должна бы дать что-нибудь в случае, когда степень отображения n равна нулю (при удачном выборе начала). Возможно, это было бы достаточно для получения неизгибаемости.

---

[1]) Имеется в виду июль 1974 г.; как известно, гипотеза о неизгибаемости замкнутых многогранников была впоследствии опровергнута самим автором переводимой работы, однако мы сочли целесообразным оставить этот раздел в русском переводе, так как высказанные здесь идеи могут оказаться полезным для изучения вопросов неизгибаемости многогранников в тех или иных специальных классах. — *Прим. перев.*

ЧАСТЬ II[1])

§ 1. Введение

Основная цель этой части работы — показать, что вложенные в R^3 полигональные подвески являются неизгибаемыми.

Обозначения, используемые в этой части работы, те же, что и в ч. I. Формулы из ч. I будут обозначаться с добавлением перед их номером римской цифры I.

Приведем краткое содержание материала ч. II.

§ 2. Обобщенный объем

Каждому полиэдру, область определения которого есть ориентируемое двумерное многообразие, мы сопоставляем в соответствие число, которое в случае вложенного полиэдра сводится к обычному значению объема ограниченного им тела.

§ 3. Неизгибаемость вложенных полиэдров

Используя § 2 и обозначения ч. I, мы вычисляем объем нетривиально изгибающейся подвески. Оказывается, что он равен нулю, что и дает искомую теорему о неизгибаемости подвесок.

§ 4. Описание изгибаемых подвесок

Здесь мы даем довольно полное описание решений основного уравнения изгибания, установленного в ч. I. Оно использует некоторые основные результаты алгебраической геометрии о групповой операции на неособенных кубических кривых, а также потоковые графы для описания корней уравнения изгибания. Кроме того, мы описываем способ построения некоторых изгибаемых октаэдров (скажем, с помощью циркуля и линейки).

§ 5. Некоторые применения и предположения

Здесь мы приводим некоторые идеи, которые, как мы надеемся, могут быть полезны в строительной механике.

---

[1]) Connelly R., An attack on rigidity, II, September, 1974; эта часть работы переведена с незначительными сокращениями, согласованными с автором. В частности, во введении пропущены имеющиеся в оригинале напоминания использованных в первой части обозначений и формул. — *Прим. перев.*

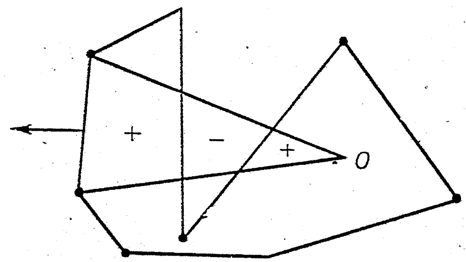

Рис. 11.

§ 2. Обобщенный объем

Каждому полиэдру (а не только подвеске), определенному на двумерном многообразии, сопоставим некоторое число, которое в случае вложенного полиэдра окажется равным значению объема, ограниченного этим полиэдром.

Пусть P — полиэдр с вершинами $p_1, p_2, \ldots$. Если P ориентируемый и $\langle p_j, p_k, p_l\rangle$ определяет двумерный симплекс полиэдра, мы можем сказать, согласована ли тройка j, k, l с ориентацией P или нет. Заметим, что если ориентация P дана, то для двух симплексов $\langle p_j, p_k, p_l\rangle$ и $\langle p_k, p_j, p_m\rangle$ с общим ребром их ориентация или для обоих согласована или для обоих противоположна ориентации P. (В действительности любая четная перестановка их индексов не меняет ориентацию, а любая нечетная перестановка меняет ориентацию.)

Хорошо известно, и это легко показать, что объем тетраэдра с вершинами в O (начале координат), p_i, p_k и p_l равняется $\pm\frac{1}{6}\det(p_j, p_k, p_l)=\frac{1}{6}[p_j, p_k, p_l]$. Поэтому число

$$V(P)=\frac{1}{6}\sum[p_j, p_k, p_l] \tag{2.1}$$

мы называем обобщенным объемом, где сумма берется по всем двумерным симплексам $\langle p_j, p_k, p_l\rangle$, ориентация которых согласована с ориентацией P. (Если мы изменяем ориентацию P, то знак $V(P)$ изменится на противоположный.)

Лемма 1. *Если полиэдр P вложен с соответствующим образом выбранной ориентацией, то $V(P)$ есть величина объема пространственной области, ограниченной полиэдром P.*

Доказательство. Из проведенных перед формулой (2.1) рассуждений мы знаем, что каждое слагаемое в (2.1), $\frac{1}{6}[p_j, p_k, p_l]$, есть в точности объем конуса над симплексом $\langle p_j, p_k, p_l\rangle$ с таким выбором знака, что если нормаль, направленная от тела, ограниченного поверхностью конуса (пирамидой), расположена на противоположной стороне плоскости, определенной тройкой p_j, p_k, p_l, то этот объем имеет знак $+$, а при противоположном направлении нормали — знак $-$. Заметим, что такой выбор знака согласован с ориентацией, определяемой вложением и внешней нормалью (рис. 11).

Теперь легко видеть, что объем, ограниченный полиэдром P, равен сумме объемов конусов в некотором разбиении полиэдра, где знаки выбраны в соответствии с вышесказанным. Так как $V(P)$ инвариантен относительно разбиений, то утверждение доказано.

Замечания

— Легко убедиться, что если полиэдр P ориентируемый, то в любом случае, вложен ли P или нет, объем $V(P)$ не зависит от выбора начала O. Кроме того, $V(P)\neq 0$, если P погружен и ограничивает некоторое погруженное трехмерное многообразие. В действительности $V(P)$ оказывается объемом погруженного трехмерного многообразия.

— В дифференцируемом случае мы можем провести подобный же анализ и показать, что объем, ограниченный поверхностью S, равен

$$\frac{1}{3}\int_S (N\cdot X)\,dA,$$

где $X=X(u, v)$ — радиус-вектор поверхности, N — внешняя нормаль, а dA — элемент площади.

Объем подвески

Применим полученное выше к случаю подвесок с учетом обозначений из ч. I.

Выберем южный полюс S за начало. Тогда $R=N$ и

$$[p_j, p_k, N]=[N-p_j, N-p_k, R]=[e_j, e_k, R] =\frac{y_{jk}}{|R|\,i}=\frac{y_{jk}}{\sqrt{x}\,i}.$$

Значит, если P — подвеска (с подходящей ориентацией), то

$$V(P)=\frac{1}{\sqrt{x}\,i}\sum_{(j,k)\in\mathscr{C}} y_{jk}. \tag{2.2}$$

Это есть основное соотношение, которое мы используем дальше в § 3.

§ 3. Неизгибаемость вложенных подвесок

Классы эквивалентности для y_{jk}

Напомним формулу 4.3 из ч. I

$$y_{jk}^2 = \frac{1}{4} e_{jk} \cdot e_{jk} x (x - b'_{jk})(x - b_{jk}),$$

где числа $b'_{jk} < b_{jk}$ действительны (и когда x находится между ними, то y_{jk} соответствуют реальному полиэдру).

Будем говорить, что $y_{j_1k_1}$ эквивалентно $y_{j_2k_2}$ (точнее, мы должны бы сказать, что пара (j_1, k_1) эквивалентна паре (j_2, k_2)), если $b'_{j_1k_1} = b'_{j_2k_2}$ и $b_{j_1k_1} = b_{j_2k_2}$. Идея теперь состоит в расщеплении основного уравнения изгибания на несколько других уравнений, каждое из которых соответствует одному классу эквивалентности.

Лемма 2. *Пусть P — полиэдральная подвеска, которая изгибается с переменным x, и пусть $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$ — подмножество, соответствующее определенному выше классу эквивалентности. Тогда соотношение*

$$\prod_{(j,k) \in \mathscr{C}_0} (Q_{jk} + y_{jk}) = \prod_{(j,k) \in \mathscr{C}_0} (Q_{jk} - y_{jk}) \tag{3.1}$$

является тождеством относительно x, где

$$Q_{jk} + y_{jk} = G_{jk} \quad \text{и} \quad Q_{jk} = x(e_j \cdot e_k) - z_j z_k.$$

Доказательство. Пусть b', b — общее значение b'_{jk} и b_{jk} в определении $\mathscr{C}_0$. Пусть $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}$ — подмножество, соответствующее тем y_{jk}, для которых $b_{jk} = b$ (независимо от b'_{jk}). Из (I. 3.5) имеем, что

$$\prod_{(j,k) \in \mathscr{C}} (Q_{jk} + y_{jk}) = \prod_{(j,k) \in \mathscr{C}} H_j^2,$$

где H_j^2 — квадратичная функция от x. Есть несколько способов проверить, что

$$\prod_{(j,k) \in \mathscr{C}} (Q_{j,k} + y_{jk}) = \prod_{(j,k) \in \mathscr{C}} (Q_{jk} - y_{jk}). \tag{3.2}$$

Например, $e^{i\theta_{jk}} = \dfrac{Q_{jk} + y_{jk}}{H_j H_k}$ и $e^{-i\theta_{jk}} = \dfrac{Q_{jk} - y_{jk}}{H_j H_k}$. Тогда (3.2) следует из равенства

$$\prod_{(j,k) \in \mathscr{C}} e^{i\theta_{jk}} = 1 = \prod_{(j,k) \in \mathscr{C}} e^{-i\theta_{jk}}.$$

Соотношение (3.2) является тождеством относительно x, в котором мы смотрим на Q_{jk} и y_{jk} как на аналитические функции от x. Функция Q_{jk} — обыкновенная квадратичная функция от x без полюсов и точек ветвления, а y_{jk} не имеет полюсов и имеет только две точки ветвления в b'_{jk} и b_{jk}. Значит, если мы отправимся из произвольного значения x по пути, обходящему один раз вокруг b и не обходящему ни одну из остальных точек b_{jk} или b'_{jk} (если только они не равны b), то в обеих частях (3.2) изменение будет только в знаках y_{jk}, соответствующих $\mathscr{C}_1$. Значит,

$$\prod_{\mathscr{C} - \mathscr{C}_1} (Q_{jk} + y_{jk}) \prod_{\mathscr{C}_1} (Q_{jk} - y_{jk}) = \prod_{\mathscr{C} - \mathscr{C}_1} (Q_{jk} - y_{jk}) \prod_{\mathscr{C}_1} (Q_{jk} + y_{jk}). \tag{3.3}$$

Разделив (3.3) на (3.2) и приведя к общему знаменателю, получим

$$\Big[\prod_{\mathscr{C}_1} (Q_{jk} + y_{jk})\Big]^2 = \Big[\prod_{\mathscr{C}_1} (Q_{jk} - y_{jk})\Big]^2.$$

Таким образом,

$$\prod_{\mathscr{C}_1} (Q_{jk} + y_{jk}) = \pm \prod_{\mathscr{C}_1} (Q_{jk} - y_{jk}). \tag{3.4}$$

Если равенство (3.4) справедливо со знаком минус, то мы вычислим коэффициенты при наибольшей степени x в левой и правой частях (т. е. разделим обе части на x^{2m}, где m — число элементов в $\mathscr{C}^1$, и найдем предел при $x \to \infty$). Слева получим $\left(-\frac{1}{4}\right)^m$, а справа будет $-\left(-\frac{1}{4}\right)^m$, так как старший коэффициент в Q_{jk} равен $-\frac{1}{4}$. Значит, в правой части (3.4) знак должен быть „плюс“.

Теперь мы повторяем вышеприведенное рассуждение с заменой (3.2) на (3.4), $\mathscr{C}_1$ — на $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_0$ — на $\mathscr{C}_1$ и b' — на b и получим (3.1).

Знаки углов и длины ребер

Изучим функции y_{jk} более подробно. Если P изгибается с переменным x, то равенство (3.1) (так же как (3.2) и т. д.) должно быть справедливо в некотором действительном интервале, а значит, и на некоторой подходящей римановой поверхности, как это подразумевалось выше и как это подробно обсуждалось в ч. I. Однако, когда x остается на действительном интервале, y_{jk} принимает чисто мнимые значения, и мы хотим выяснить, когда эта мнимая часть имеет знак + или —. Положим $\varepsilon_{jk} = \operatorname{sgn}[e_j, e_k, R]$ на этом интервале изгибания. Заметим, что ε_{jk} является также знаком угла θ_{jk}, и если ориентация P выбрана корректно, то $\varepsilon_{jk}=+1$ или -1 в зависимости от того, является ли полиэдр P выпуклым или вогнутым на e_{jk} (если P— вложение). В любом случае

$$y_{jk}=\frac{1}{2}\varepsilon_{jk}|e_{jk}|\sqrt{-x\left(x-b'_{jk}\right)\left(x-b_{jk}\right)}\,i, \tag{3.5}$$

где выбрано положительное значение квадратного корня и x находится в интервале изгибания.

Леммы о знаках углов и длинах ребер

Лемма 3. *Пусть P — изгибаемая подвеска с переменным x, и пусть $\mathscr{C}_0$ — класс эквивалентности y_{jk}. Тогда*

$$\sum_{(j,\,k)\in\mathscr{C}_0}\varepsilon_{jk}|e_{jk}|=0. \tag{3.6}$$

Доказательство. Если мы разложим обе части равенства (3.1) по формуле обобщенного бинома и соберем все слагаемые в одну сторону, то получим

$$\left(2\prod_{\mathscr{C}_0}Q_{jk}\right)\sum_{\mathscr{C}_0}\frac{y_{jk}}{Q_{jk}}+\ldots=0, \tag{3.7}$$

где невыписанные члены имеют более высокие степени y_{jk} и низшие степени Q_{jk}.

Из (3.5) видно, что порядок x в выражении для y_{jk} равен $^3/_2$, а для Q_{jk} он, конечно, равен 2. Значит, коэффициент наивысшей степени $\sqrt{x}$ в (3.7) в разложении в ряд в окрестности ∞ (т. е. при вычислении предела вдоль пути в верхней полуплоскости, не проходящему через точки ветвления) в точности равен

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{m-1}\sum_{(j,\,k)\in\mathscr{C}_0}\varepsilon_{jk}|e_{jk}|,$$

что и дает (3.6).

На (3.6) можно смотреть как на своего рода нежесткость в ∞.

Лемма 4. *При условиях леммы 3 имеем*

$$\sum_{(j,\,k)\in\mathscr{C}_0}y_{jk}=0,$$

и, значит, соотношение

$$\sum_{(j,\,k)\in\mathscr{C}}y_{jk}=0=V(P)$$

есть тождество относительно x.

Доказательство. Пусть b' и b — значения b'_{jk} и b_{jk}, определяющие класс $\mathscr{C}_0$. Тогда

$$\sum_{\mathscr{C}_0}y_{jk}=\sum_{\mathscr{C}_0}\varepsilon_{jk}|e_{jk}|\sqrt{-x(x-b')(x-b)}\,i=$$
$$=\left(\sum_{\mathscr{C}_0}\varepsilon_{jk}|e_{jk}|\right)\sqrt{-x(x-b')(x-b)}\,i=0.$$

Теорема 1. *Если подвеска P вложена или погружена с условием, что она ограничивает погруженное трехмерное многообразие, то она неизгибаема.*

Доказательство. В любом из случаев условия теоремы объем $V(P)\neq 0$. Если P изгибается с постоянным значением x, то P не является погружением ни в N, ни в S, как это было показано в ч. I.

§ 4. Описание изгибаемых подвесок

Мы хотим изучить более подробно возможный вид подвесок, которые могут изгибаться нетривиальным образом, а именно с изменяющимся x. Это сводится к «решению» основного уравнения изгибания, что в свою очередь зависит от природы корней каждой из частей равенства (3.2). Идея состоит в том, чтобы найти достаточные условия на внешние и внутренние параметры, использованные для определения F_{jk}, которые позволили бы нам построить некоторые нетривиальные «флексоры» (изгибаемые полиэдры) [1].

Корни

Напомним, что

$$e^{i\theta_{jk}}=F_{jk}=\frac{Q_{jk}+y_{jk}}{H_jH_k},$$

где параметры, использованные для определения входящих сюда величин, зависят только от длин пяти ребер e_j, e_k, e'_j, e'_k, e_{jk}. Далее,

$$(Q_{jk}+y_{jk})(Q_{jk}-y_{jk})=H_j^2H_k^2= \tag{4.1}$$
$$=\frac{1}{8}\left(x-r'_j\right)\left(x-r_j\right)\left(x-r'_k\right)\left(x-r_k\right),$$

что следует из I. 4.2 и раздела о корнях из ч. I.

Мы видим, что четыре корня в (4.1) полностью произвольны, с одним лишь условием, что все r'_j меньше, чем наимень-

[1]) Флексоры — от английского слова to flex — изгибаться. — *Прим. перев.*

ший из r_j. Кроме того, легко видеть, что четыре корня в (4.1) определяют $|e_j|$, $|e_j'|$, $|e_k|$, $|e_k'|$ (однако в неизвестном порядке), например, по формулам

$$|e_j|=\frac{1}{2}(\sqrt{r_j}+\sqrt{r_j'}),\quad |e_j'|=\frac{1}{2}|\sqrt{r_j}-\sqrt{r_j'}|$$

с возможной заменой e_j и e_j', и наоборот.

Другими параметрами, использованными для определения сомножителей в левой части (4.1), являются b_{jk} и b_{jk}'; позже, хотя и в неявном виде, мы обсудим их связь с r_j.

Важность формулы (4.1) состоит в том, что из него следует, что каждый множитель $Q_{jk}+y_{jk}=G_{jk}$ имеет ровно четыре корня (с учетом кратности) на определенной им римановой поверхности. Действительно, если один сомножитель имеет корень на одном листе римановой поверхности, то на другом листе та же точка является уже корнем не этого, а другого сомножителя (исключая, конечно, точку ветвления).

Стандартная форма сомножителей

Основным уравнением, с которым мы будем работать, является уравнение (3.1), справедливое для каждого класса эквивалентности $\mathscr{C}_0$. Если для каждого класса эквивалентности у нас есть уравнение (3.1), то для всей цепочки $\mathscr{C}$ мы имеем уравнение (3.2). Из него в свою очередь в силу (4.1) следует, что $\prod_{\mathscr{C}} F_{jk}=\pm 1$, и здесь, как и раньше, для того, чтобы это равенство было тождеством по x, нужно брать знак $+$. Это есть основное уравнение изгибаемости, которое в некотором смысле означает, что подвеска остается замкнутой (т.е. не появляются щели и отверстия при изменении x). Таким образом, если мы сможем разделить подвеску так, чтобы для каждого класса $\mathscr{C}_0$ было верно (3.1), то подвеска будет флексором.

Рассмотрим некоторый фиксированный класс $\mathscr{C}_0$ с b' и b, определенными, как прежде. Положим $y=\sqrt{-x(x-b')(x-b)}i$, так что

$$y^2=x(x-b')(x-b). \tag{4.2}$$

С учетом § 3 имеем, что корни G_{jk} получаются пересечением кривой, определенной равенством (4.2), и квадрики

$$y=\frac{2Q_{jk}}{\varepsilon_{jk}|e_{jk}|}. \tag{4.3}$$

Это замечание дает нам способ описания корней.

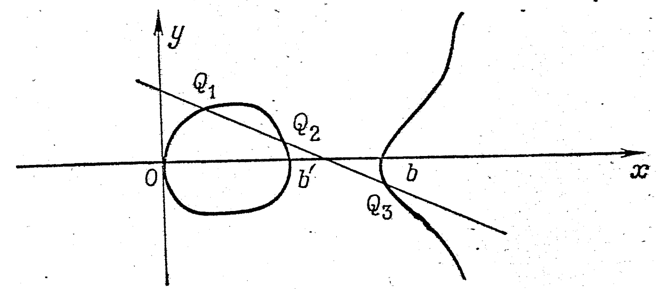

Рис. 12.

Симметрия корней

Заметим, что $y_{jk}=\frac{1}{2}\varepsilon_{jk}|e_{jk}|y$. Значит, мы можем рассматривать обе части (3.1) как полиномы от x и y, а корень — как пару (x,y). Тогда соотношение (3.1) утверждает, что пара (x_0,y_0) является корнем левой части тогда и только тогда, когда $(x_0,-y_0)$ тоже является корнем. Это в свою очередь означает, что пересечения кривой (4.2) со всеми кривыми, определяемыми (4.3), являются симметричными относительно оси x. Нетрудно также видеть и обратное: если нам даны квадрики, определяемые равенством (4.3), и их пересечения с (4.2) симметричны относительно оси x, то справедливо (3.1).

Можно было бы ожидать, что из условия симметрии следует, что квадратные сомножители в (3.1) сократятся, однако в действительности это не обязательно.

Неособенные кубические кривые

Теперь перед нами стоит задача, как в разумных общих терминах описать свойства, которые появляются при наличии множителей с упомянутым выше условием симметричности корней.

К счастью, неособенная кубическая кривая, примером которой является кривая (4.2), имеет долгую и знаменитую историю. Об этой кривой известно очень много, но основное то, что это есть абелево многообразие. Оказывается, что на этой кривой очень естественным образом можно определить групповую операцию. Именно, выберем любую точку и назовем ее O. В качестве O мы выберем точку ∞ на оси y. Тогда, если Q_1, Q_2 и Q_3 — три различные точки на пересечении кривой с какой-либо прямой или если две точки Q_i совпадают и прямая касается кривой в этой точке, то группа определяется условием $Q_1+Q_2+Q_3=0$ (рис. 12). Если Q — точка на кривой, то $-Q$ есть отражение Q относительно оси x. Хорошо известно, что это свойство в действительности определяет абелеву группу (см. Уолкер [15]). Над комплексной плоскостью эта группа есть тор $S^1 \oplus S^1$, а в нашем случае — над действительными числами с добавлением 0 и ∞ она становится подгруппой, изоморфной $Z_2 \oplus S^1$.

Эллиптические функции

Мы замечаем также, что (4.2) является эллиптической кривой в том смысле, что для ее параметризации могут быть использованы эллиптические функции. Действительно, она имеет почти ту самую стандартную форму, которая используется для классической функции Вейерштрасса $\wp$. Обычно если задана кривая

$$y^2 = 4x^3 - g_2 d - g_3, \tag{4.4}$$

то она удовлетворяется при $y = \wp'(z)$, $x = \wp(z)$. Значит, функции $y = \frac{\wp'(z)}{2}$, $x = \wp(z) + \frac{b+b'}{2}$ для подходящих g_2 и g_3, определяющих $\wp$, параметризуют кривую (4.2) и дают в действительности групповой гомоморфизм. Эллиптическая функция является двоякопериодической, и ее фундаментальный параллелограмм в нашем случае есть прямоугольник с образом верхней стороны и средней линии на действительной части кривой (см. Ленг [13] и Дю Вал [14]). Таким образом, даваемое дальше описание легко может быть перенесено на комплексную плоскость.

Квадрики

Наша основная задача — описать, как несимметричные квадрики могут пересекать кубическую кривую (4.2) так, что пересечения являются симметричными.

Пусть $y = \hat{Q}_{jk}$ — квадрика, где $\hat{Q}_{jk}$ — некоторая квадратичная функция от x. Легко видеть, что эта кривая пересекает кривую (4.2) в четырех конечных точках (может быть, комплексных в общем случае, но в нашем случае действительных). Легко также видеть, что если сделаем уравнения однородными (т. е. дополним все до проективной ситуации), то еще на ∞ (которую мы раньше называли началом) будет двойной корень, в согласии с теоремой Безу. Пусть Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 — четыре конечных пересечения квадрики $y = \hat{Q}_{jk}$ с кривой (4.2). Тогда по хорошо известным результатам алгебраической геометрии (см., например, теорему 9.2 из книги Уолкера [15]) имеем, что $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$, и это условие достаточно для существования квадрики $\hat{Q}_{jk}$, пересекающейся с кривой (4.2) в этих четырех данных точках.

Условия

Мы хотим выписать совокупность условий, которые необходимо должны быть выполнены, если подвеска изгибается (с переменным x). Нам, однако, нужно ввести несколько новых обозначений.

Пусть $\hat{Q}_{jk} = \frac{2Q_{jk}}{\varepsilon_{jk}|e_{jk}|}$ — квадрика из (4.3). Мы имеем четыре корня функции (4.1), которые являются пересечениями кривых (4.2) и (4.3), и нам нужен какой-то способ для их описания. Для Q_{jk} предполагаем $k = j + 1$ или $j = r$, $k = 1$. Тогда на кривой (4.3) мы имеем четыре точки (x, y): Q'_{j-}, Q_{j-}, Q'_{k+}, Q_{k+}, соответствующие значениям x, равным r'_j, r_j, r'_k, r_k. Далее, пусть для каждой точки Q на кривой через $\bar{Q}$ обозначена ее координата x.

Если $Q_{j\pm}$ соответствуют корням (3.1), то они должны удовлетворять следующим условиям:

(A) $\bar{Q}'_{j-} = \bar{Q}'_{j+}$, $\bar{Q}_{j-} = \bar{Q}_{j+}$, $j = 1, 2, \ldots, k$,

(B) $Q'_j + Q_{j-} + Q'_{k+} + Q_{k+} = 0$,
$(j, k) \in \mathscr{C}$.

(C) В каждом классе эквивалентности $\mathscr{C}_0$ совокупность точек Q (с учетом кратности) симметрична относительно оси x. (Кроме того, точки Q' расположены на конечной компоненте, а точки Q — на бесконечной компоненте.)

Условия (B) и (C) обсуждались выше.

Условие (A) просто означает, что r_j и r'_j зависят только от $|e_j|$ и $|e'_j|$. Кроме того, полезно отметить, что если (k, j) и (j, l) из одного класса эквивалентности (и они определяют тем самым одну и ту же кривую (4.2) и одну и ту же группу), то (A) есть в точности условие того, что $Q'_j = \pm Q'_{j+}$, $Q_{j-} = \pm Q_{j+}$.

Используя условия (A), (B) и (C), можно выписать точки на кривой (4.2), которые, как можно надеяться, соответствуют нетривиальному флексору. Следующая таблица составлена для случая, когда на кривой (4.2) выбраны три точки A, B и C, из которых, скажем, A и B расположены на бесконечной компоненте, а C — на конечной. (Ясно, что $Q'_{j\pm}$ находятся на конечной компоненте, а $Q_{j\pm}$ — на бесконечной.) Здесь только один класс эквивалентности, а $n = 4$.

Таблица 1

j	$Q_{j-1,-}$	Q_{j+}	$Q'_{j-1,-}$	Q'_{j+}
1	A	B	C	$-A-B-C$
2	B	$-A$	$A+B+C$	$-2B-C$
3	$-A$	$-B$	$2B+C$	$A-B-C$
4	$-B$	A	$-A+B+C$	$-C$

(Первый и третий столбцы служат для облегчения проверки условия (B).)

Граф

Вышеприведенные условия достаточны для построения большого числа нетривиальных флексоров, в частности в случае $n=4$, т. е. октаэдров. Однако мы полагаем, что было бы не совсем честно, если бы мы не указали, как строятся таблицы, подобные вышеприведенным. В частности, здесь можно рассмотреть граф, ассоциированный с нетривиальным флексором, который значительно упрощает составление таких таблиц.

Мы строим граф, $G_{\mathscr{C}_0}$ (мультиграф в смысле Харари [12]), соответствующий каждому классу эквивалентности или группе, по следующему способу. Вершины графа $G_{\mathscr{C}_0}$ состоят из элементов $(j, k) \in \mathscr{C}_0$. По свойству (C), между корнями есть пары по симметрии: $Q_{j\pm}$ и $Q'_{j\pm}$. Выберем одну такую пару. Мы будем говорить, что пара (j_1, k_1) смежна с парой (j_2, k_2), если одно из значений Q: $Q'_{j_1-}, Q_{j_1-}, Q'_{k_1+}, Q_{k_1+}$ для (j_1, k_1) находится в парном соответствии с минусовым (по группе) значением одного из значений Q для (j_2, k_2).

Далее мы определяем на $G_{\mathscr{C}_0}$ поток в описанном в книге Берга [10] смысле. Каждому ребру из $G_{\mathscr{C}_0}$ припишем произвольное направление. Если направление ребра идет от (j_1, k_1) к (j_2, k_2), то поток есть X, где X является значением (в групповом смысле) того Q для пары (j_1, k_1), которое находится в парном соответствии со значением Q для (j_2, k_2). Заметим, что из условия (B) следует, что общий поток в любой вершине равен нулю.

Так как каждой паре (j, k) соответствует четыре значения Q, степень (не считая направления) каждой вершины равна четырем. Заметим также, что из строения графа и наличия у кривой (4.2) двух компонент следует, что каждое Q' необходимо будет в парном соответствии с некоторым другим Q', и аналогично для значений Q. Это происходит потому, что все Q' находятся на конечной компоненте, а все Q — на бесконечной. Таким образом, все ребра могут быть разделены

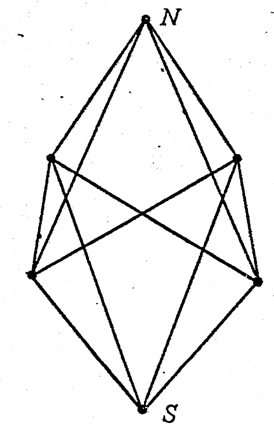

Рис. 13.

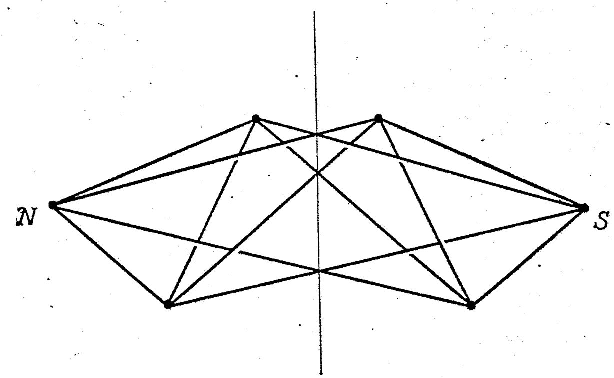

Рис. 14.

на две равные совокупности, соответствующие Q' и Q, и каждая вершина инцидентна двум ребрам каждого типа. Каждая совокупность ребер называется два-фактором, и мы обозначим их через F' и F соответственно. Значит, полученный граф есть просто граф с двумя дизъюнктными два-факторами, и он имеет нетривиальный поток. В главе 5 книги Берга [10] имеется прекрасное обсуждение вопроса о том, как построить все возможные потоки (в любой абелевой группе) в подобной ситуации. Ниже мы даем пример такого построения.

Октаэдры

Мы имеем, наконец, достаточно информации, чтобы построить хотя бы все изгибаемые октаэдры. Мы предполагаем, что ребра октаэдра не перекрываются, чтобы не получилось тривиального типа флексора.

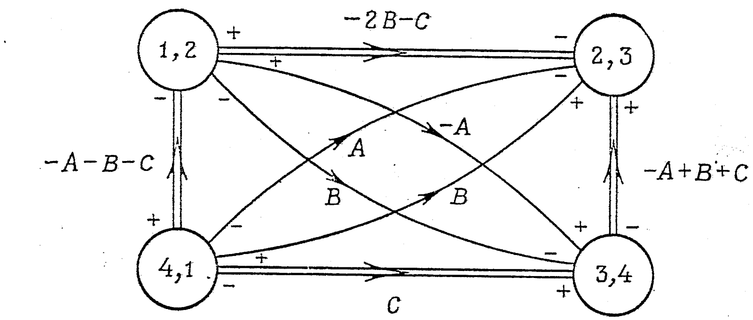

Рис. 15.

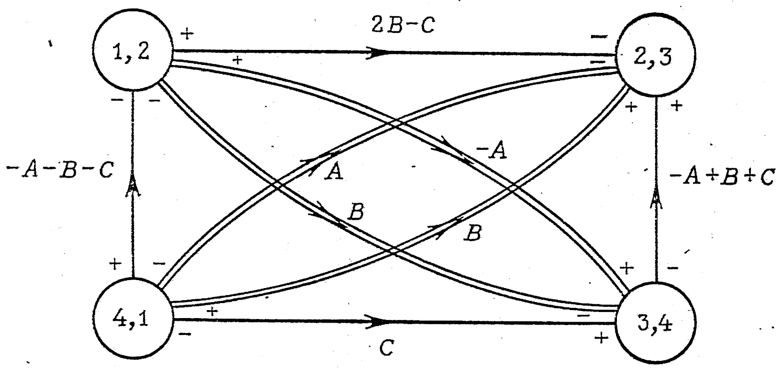

Рис. 16.

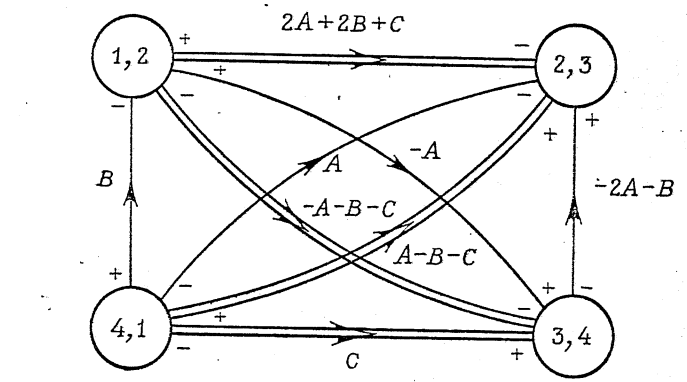

Рис. 17.

Имеется три основных типа изгибающихся октаэдров[1]). Первый тип, который мы называем плоскостным, строится следующим образом: берется самопересекающийся плоский четырехугольник с равными противоположными сторонами, и на плоскости симметрии, проходящей через точку самопересечения, берутся северный и южный полюсы (рис. 13). Такие октаэдры были описаны в примере 1 в [2].

У второго типа изгибаемых октаэдров, которые мы называем симметричными флексорами, все противоположные стороны равны и они симметричны относительно некоторой прямой (рис. 14).

В этих обоих типах есть два класса, каждый из которых состоит из двух элементов. В этих случаях сомножители в (3.2) попарно сокращаются.

Третий тип изгибаемых полиэдров, которые мы называем плоскими флексорами, состоит только из одного класса, и, когда N и S находятся на максимальном или минимальном расстоянии друг от друга, весь флексор лежит на одной плоскости. Эти флексоры — первые, описанные с помощью ассоциированного графа, как это показано на рис. 15, 16 и 17, где ребра // относятся к фактору F', а ребра / — к фактору F. Рис. 15 приводит к табл. 1. Заметим, что условие (А) накладывает дополнительные ограничения на поток, и они автоматически включены в вышеприведенные потоки. Некоторыми дополнительными рассуждениями можно показать, что эти три графа порождают все возможные плоские флексоры, а описанные выше три типа исчерпывают все возможные нетривиально изгибаемые октаэдры.

Построения с помощью линейки и циркуля

Здесь мы приведем для плоских флексоров способ их построения с помощью линейки и циркуля (мы выражаем благодарность Р. Уолкеру, предложившему эту конструкцию, которая упрощает прежний способ построения).

Шаг 1. Отметить на плоскости две точки N и S и с центром в точке S построить окружность C (не слишком большую и не слишком маленькую).

Шаг 2. Отметить две точки p_1 и p_3 на эллипсе (или на гиперболе) с фокусами N и S (следовательно,

$$|p_1 - N| + |p_1 - S| = |p_3 - N| + |p_3 - S|).$$

[1]) Приведенная ниже классификация изгибаемых октаэдров согласуется с ранее известной и полученной другим путем классификацией Р. Брикара в [16*]. — *Прим. перев., сделанное по просьбе автора.*

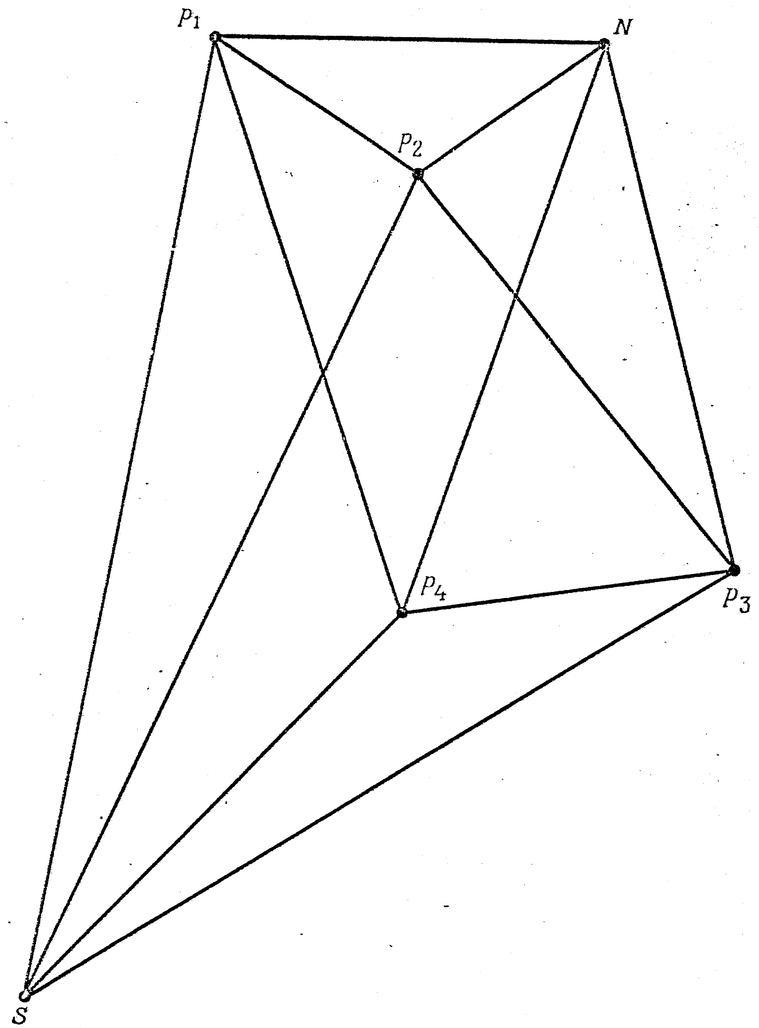

Рис. 18.

Шаг. 3. Провести через p_1 две прямые L_1 и L_1', которые отражают N в C (т. е. если окружность с центром в p_1 и проходящая через N пересекает C в точках A и A', то L_1 и L_1' являются перпендикулярами к $\overline{NA}$ и $\overline{NA'}$ соответственно, проходящими через их середины).

Шаг 4. Аналогично провести через p_3 две прямые L_3 и L_3', которые отражают N внутрь C.

Шаг 5. Положим $p_2 = L_1 \cap L_3$, $p_4 = L_1' \cap L_3'$.

В итоге: N и S — северный и южный полюсы, p_1, p_2, p_3, p_4 — точки экватора плоского флексора (рис. 18), изгибающегося с выходом из плоскости, если вы сделали каждый выбор так, чтобы построение было возможным.

§ 5. Некоторые применения и предложения

Строительная механика

Обычно довольно трудно убедить других в том, что то, что у вас есть, является для них жизненно важным, если они даже не сознают, что это им нужно. Мы, однако, надеемся, что некоторые из представленных здесь идей могут быть полезными в определенных областях строительной механики. Рассмотренная проблема, как нам кажется, в большей своей части входит в строительную механику, связанную с задачами, которых мы коснулись при изучении неизгибаемости и изгибаемости, в той мере, в какой эти задачи относятся к тому, что в механике называется геометрической устойчивостью (см., например, [11]), и которая для математиков есть не что иное, как (бесконечно малая) жесткость. Основа этой связи заключается в том, что для того, чтобы можно было (более или менее точно) вычислить все силы, необходимо, чтобы структура была геометрически устойчивой[1]).

Однако если структура находится в неустойчивом состоянии, но все еще неизгибаема, то для поддержания структуры требуются бесконечно большие внутренние силы. Поэтому можно ожидать, что элементы структуры будут постепенно деформироваться так, чтобы получилась геометрически устойчивая структура, в которой действующие силы уже могут быть вычислены. (Например, плоские вершины, введенные в неизгибаемую структуру, должны, несомненно, обладать этим свойством.) Так будет, наверно, в случае, если структура не была непрерывно изгибаема в начале, в противном случае структура, по-видимому, развалится.

С другой стороны, Глюк показал, что шансы построить такую (изгибаемую) структуру наугад равны нулю (см. [5]). Однако результат Глюка ничего не говорит о близости к изгибаемой структуре. Может случиться, что какая-нибудь структура построена близко (в смысле естественной тополо-

[1]) По поводу излагаемых здесь идей о применении математической теории изгибаний поверхностей к «строительной» механике, в частности к теории оболочек, см. также сноску на стр. 228 и указанную там литературу.